Supplementaire Opgaven "INLEIDING TOT DE EINDIGE-DIFFERENTIEMETHODEN"

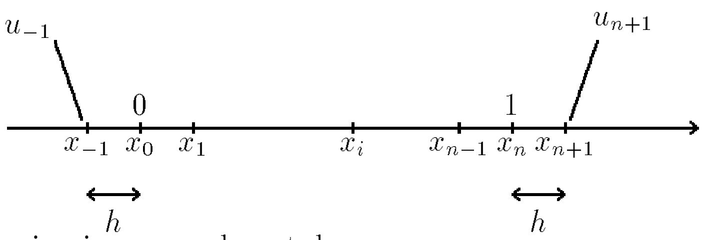
<u>OPGAVE 2: ANTWOORD</u>

Stap 1: centrale-differentieversie van de DV in de interne roosterpunten

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + q_i u_i = \lambda u_i, \qquad 1 \leq i \leq n-1 \tag{1}$$

Stap 2: centrale-differentieversie van de DV in de randpunten

Merk op dat de randpunten wel degelijk moeten beschouwd worden, aangezien $u(0)$ en $u(1)$ niet expliciet gegeven zijn. Voer dus "spookpunten" x_{-1} en x_{n+1} in, met bijhorende "spookonbekenden" u_{-1} en u_{n+1}, zie figuur.



$(h = \dfrac{1}{n})$

De discretisering in $x = x_0$ levert dan

$$-\frac{u_{-1} - 2u_0 + u_1}{h^2} + q_0 u_0 = \lambda u_0, \tag{2}$$

terwijl we voor $x = x_n$ bekomen

$$-\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} + q_n u_n = \lambda u_n. \tag{3}$$

Merken we nog op dat (1)–(3) een stelsel vormt met $n+1$ homogene vergelijkingen voor $n+3$ onbekenden, namelijk u_i, $i = -1, 0, 1, \ldots, n, n+1$. [Afgezien van de eigenwaarde λ, die uiteraard ook onbekend is.]
We hebben dus nog twee vergelijkingen tekort. Dit brengt ons bij stap 3.

Stap 3: discretisering van de randcondities

De randconditie $u(0) = u(1)$ discretiseren we tot

$$u_0 = u_n. \tag{4}$$

Via centrale differenties discretiseren we de randconditie $u'(0) = u'(1)$ tot

$$u_1 - u_{-1} = u_{n+1} - u_{n-1}. \tag{5}$$

Nu vormt (1)–(5) een stelsel van $n+3$ homogene vergelijkingen voor evenveel onbekenden, opnieuw afgezien van λ. Dit vraagstuk voor $[\lambda; u_{-1}, u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}]$ kunnen we vereenvoudigen tot een EWP voor $[\lambda; u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}]$, wanneer we de niet relevante "spookonbekenden" u_{-1} en u_{n+1} elimineren én wanneer we bovendien u_n elimineren – die evenmin relevant is, daar toch (4) geldt.

Stap 4: vereenvoudiging tot een EWP voor $[\lambda; u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}]$

We willen enkel (1)–(2) overhouden, waarin we rekening houden met (4) én u_{-1} elimineren. Dat verloopt als volgt: combinatie van (5), (3) en (4) geeft

$$u_{-1} = u_1 + u_{n-1} - u_{n+1} = u_1 + u_{n-1} - \left[2u_0 - u_{n-1} + h^2(q_n - \lambda)u_0\right]$$

of

$$\boxed{u_{-1} = -2u_0 - h^2(q_n - \lambda)u_0 + u_1 + 2u_{n-1}} \tag{6}$$

Het beoogde stelsel met n homogene vergelijkingen voor $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ (afgezien van λ) luidt dus:

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + q_i u_i = \lambda u_i, & 1 \le i \le n-2 \\ -\dfrac{u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_0}{h^2} + q_{n-1}u_{n-1} = \lambda u_{n-1} & \\ -\dfrac{-4u_0 + 2u_1 + 2u_{n-1}}{h^2} + (q_0 + q_n)u_0 = 2\lambda u_0 & \end{cases}$$

of nog, in matrixgedaante:

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 + h^2\dfrac{(q_0+q_n)}{2} & -1 & & & -1 \\ -1 & 2 + h^2 q_1 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ -1 & & & -1 & 2 + h^2 q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$