Supplementaire Opgaven "INLEIDING TOT DE EINDIGE-ELEMENTENMETHODEN"

Opgave 1: antwoord

1. De niet-lokale Dirichlet-conditie kan herschreven worden als

$$\int_{\partial\Omega}\left(u-\frac{a}{4}\right)\,ds=0.$$

Het volstaat te stellen

$$\tilde{u}=u-\frac{a}{4}$$

om herleid te zijn tot een randwaardeprobleem voor $\tilde{u}$ met *dezelfde* DV, *dezelfde* Neumann-conditie, maar met een *homogene* niet-lokale Dirichlet conditie.

2. 1ste stap:
Vermenigvuldig beide leden van de DV met een testfunctie $v\in C_D^1(\overline{\Omega})$ en integreer over Ω (merk op dat de integralen bestaan):

$$-\int_\Omega v\Delta u\,dx=\int_\Omega fv\,dx\qquad\forall v\in C_D^1(\overline{\Omega}).$$

2de stap:
De uitgebreide formule van Green kan toegepast worden:

$$\int_\Omega \mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v\,dx-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}v\,ds=\int_\Omega fv\,dx\qquad\forall v\in C_D^1(\overline{\Omega}).\tag{1}$$

3de stap:
De normale afgeleide is constant ondersteld op $\partial\Omega$, maar onbekend. Om $\frac{\partial u}{\partial n}$ te verwijderen uit de variationele formulering –**wat de gebruikelijke werkwijze is in de cursus**– beperken we de testfunctie (die wij **kiezen**) tot

$$V=\left\{v\in C_D^1(\overline{\Omega})\mid\int_{\partial\Omega}v\,ds=0\right\}\subset C_D^1(\overline{\Omega}).$$

Dit werd ook al gesuggereerd door de gegeven gedaante van V_h.
Merk op dat de klassieke oplossing –zo die bestaat– ook tot V behoort: enerzijds is uiteraard $C^2(\overline{\Omega})\subset C_D^1(\overline{\Omega})$; anderzijds is $a=0$. De variationele formulering luidt wegens (1) dus:

$$\boxed{u\in V:\int_\Omega \mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v\,dx=\int_\Omega fv\,dx\qquad\forall v\in V.}$$

3. In de definitie van V_h worden de functies uit X_h onderworpen aan één extra voorwaarde ($\int_{\partial\Omega} v\,ds = 0$). Het aantal vrijheidsgraden vermindert hierdoor met één, zodat $m = \dim V_h = 8$. Dit wordt hieronder streng bevestigd:

- **Het stel $(\Psi_i)_{i=1}^{8}$ is lineair onafhankelijk**

$$\sum_{i=1}^{8} c_i \Psi_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{8} c_i \varphi_i - \sum_{i=1}^{8} \frac{c_i \alpha_i}{\alpha_9} \varphi_9 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_8 = 0.$$

- **Het stel $(\Psi_i)_{i=1}^{8}$ is voortbrengend in V_h**

  Voor $v \in V_h$ geldt zeker dat $v \in X_h$ en dus $v = \sum_{i=1}^{9} b_i \varphi_i$. Bovendien hebben we dan

$$\int_{\partial\Omega} v\,ds = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{9} b_i \alpha_i = 0,$$

  zodat

$$v = \sum_{i=1}^{9} b_i \varphi_i = \sum_{i=1}^{8} b_i \varphi_i - \frac{\sum_{i=1}^{8} b_i \alpha_i}{\alpha_9} \varphi_9 = \sum_{i=1}^{8} b_i \Psi_i$$