Supplementaire Opgaven "INLEIDING TOT DE VARIATIEREKENING"

<u>OPGAVE 4</u> (Februari '97)

Beschouw de volgende functieruimte V én twee functionalen op V

$$V = \left\{ v \in C^2([a,b]) | v(a) = v(b) = 0 \right\}, \qquad (a \text{ en } b \text{ vast, gegeven}),$$

$$J : V \to R, \qquad J[v] = \int_a^b [p(x)(v')^2 + q(x)(v)^2]dx,$$

$$I : V \to R, \qquad I[v] = \int_a^b r(x)(v)^2 dx,$$

met

$$p \in C^1([a,b]), \qquad p > 0 \text{ in } [a,b];$$

$$q \text{ en } r \in C^0([a,b]), \qquad q \geq 0 \text{ en } r > 0 \text{ in } [a,b].$$

Noem λ_1 het minimum van de functionaal J over V onder de nevenwaarde $I[v] = 1$ (m.a.w. $\lambda_1 = \min\limits_{v \in V, I[v]=1} J(v))$.

Toon aan dat λ_1 de kleinste eigenwaarde is van het volgende eigenwaardenprobleem (P):

$$?[\lambda, y] \in R \times C^2([a,b]) : \begin{cases} -\frac{d}{dx}[p(x)\ \frac{dy}{dx}] + q(x)y = \lambda r(x)y, \ a < x < b, \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases}$$

<u>ANTWOORD</u>

Het gebonden minimiseringsvraagstuk voor de functionaal $J : V \to R$, onder de nevenvoorwaarde dat $I[v] = 1$ is in de opgave bondig genoteerd als $\min_{v \in V, I[v]=1} J[v]$.
Dit vraagstuk wordt herleid tot een vrij minimiseringsprobleem voor $J - \lambda I$, waarbij λ een constante multiplicator is.

1e Stap: Euler-Lagrange DV voor $J - \lambda I \equiv [p(v')^2 + qv^2] - \lambda rv^2$. (cf. 1ste aanwijzing)

Deze DV luidt

$$2(q - \lambda r)v - \frac{d}{dx}(2pv') = 0$$

of

$$\boxed{-\frac{d}{dx}(pv') + qv = \lambda rv}$$

Een kandidaat minimiserende functie voor $J - \lambda I$ is dus een eigenfunctie van het vraagstuk (P) en de bijhorende eigenwaarde is juist de Lagrange-multiplicator.

2e Stap: Voor een eigenpaar $[\mu, \varphi]$ *van* (P) *geldt:* $J[\varphi] = \mu I[\varphi]$. (cf. 2de aanwijzing)

Inderdaad, uit de DV van (P) volgt

$$\mu \int_a^b r\varphi^2 \, dx = \int_a^b \varphi \left[-\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx} \right) + p\varphi^2 \right] dx = \int_a^b \left[p(\varphi')^2 + q\varphi^2 \right] dx,$$

waarbij in de tweede stap (toegelaten) partiële integratie werd gebruikt en rekening werd gehouden met $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

3e Stap: Combinatie van de vorige stappen [doordenkertje]

- Wanneer $w \in V$, met $I[w] = 1$, voldoet aan

  $$J[w] = \min_{v \in V, I[v]=1} J[v],$$

  dan is die functie een eigenfunctie van (P) en voor de bijhorende eigenwaarde – genoteerd λ_1 – geldt er

  $$\lambda_1 = J[w].$$

- Die λ_1 is kleiner dan elke eigenwaarde μ van (P). Inderdaad, uit

  $$\lambda_1 = J[w] \leq J[v] \qquad \forall v \in V \text{ met } I[v] = 1,$$

  volgt in het bijzonder dat

  $$\lambda_1 \leq J[\varphi] \quad \text{voor elke eigenfunctie } \varphi \text{ van } (P)\text{, met } I[\varphi] = 1.$$