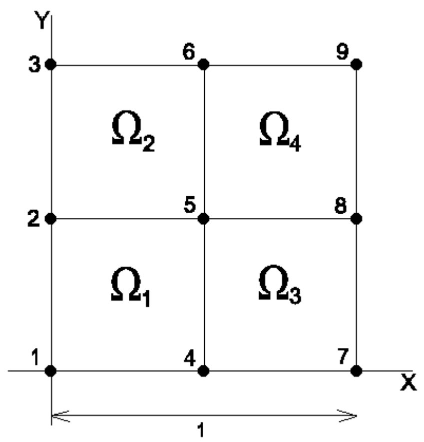
Supplementaire Opgaven "INLEIDING TOT DE EINDIGE-ELEMENTENMETHODEN"

Opgave 1

Beschouw het volgende randwaardeprobleem (P).

$$(P): \quad \text{vind } u \in C^2(\overline{\Omega}): \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x,y) & \text{in } \Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} = C \text{ (constant)} & \text{op } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} u\, ds = a \text{ (constant)} & \text{("niet-lokale" Dirichlet)} \end{cases}$$

Hierin is $f \in C^0(\overline{\Omega})$ gegeven en is ook de constante a gegeven, terwijl de constante C onbekend is; Ω is het vierkant met zijde 1, zoals in de figuur, waarvan we de grens noteren als $\partial\Omega$.



1. Toon aan dat het niet schaadt aan de algemeenheid om $a = 0$ te nemen.
   Neem dus voortaan $a = 0$.

2. Stel een variationele formulering op van (P) in een gepaste deelruimte van $C^1_D(\overline{\Omega})$.

3. Leg op Ω een rechthoekig net met 4 identieke elementen zoals in de figuur. Beschouw de functieruimten

$$\begin{aligned} X_h &= \left\{ v \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v_{|\Omega_e} \text{ is bilineair }, 1 \le e \le 4 \right\}, \\ V_h &= \left\{ v \in X_h \mid \int_{\partial\Omega} v\, ds = 0 \right\}. \end{aligned}$$

   Nummer de hoekpunten zoals in de figuur. Zij

$$(\varphi_i)_{i=1}^{9} = \text{"cardinale" basis van } X_h.$$

Noteer

$$\alpha_i = \int_{\partial\Omega} \varphi_i \, ds. \qquad 1 \le i \le 9.$$

Toon aan dat een basis van V_h gegeven wordt door $(\Psi_i)_{i=1}^m$, met

$$\boxed{\Psi_i = \varphi_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_9}\varphi_9}, \qquad m = ?$$

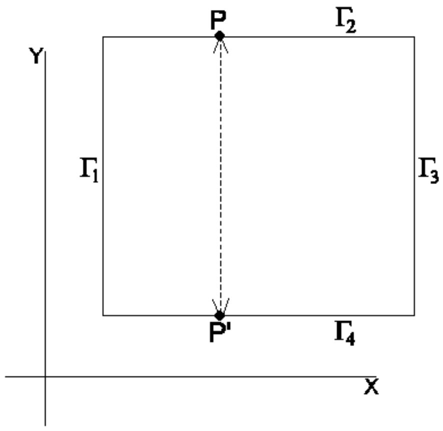
Opgave 2

Beschouw een rechthoek Ω met zijden Γ_1, Γ_2, Γ_3 en Γ_4 (evenwijdig aan de coördinaatassen, zoals in Fig.1. Beschouw het Poisson-randwaardeprobleem met gemengde Dirichlet en periodieke randcondities:

$$(P): \quad \text{vind } u \in C^2(\overline{\Omega}): \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{op } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \\ u(P) = u(P') & \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(P) = -\dfrac{\partial u}{\partial n}(P') & \end{cases}$$

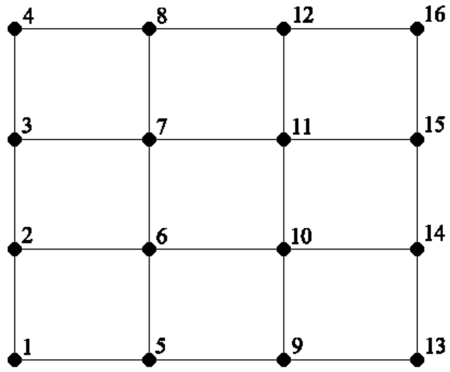
waarbij de laatste twee voorwaarden worden opgelegd aan elk puntenpaar $P \in \Gamma_2$ en $P' \in \Gamma_4$, gerelateerd zoals aangegeven in Fig.1.

Ter herinnering: $\partial/\partial n$ staat voor de "normale afgeleide" volgens de uitwendige normaal op het betreffende randdeel.



Figuur 1: Domein

1. Stel een variationele formulering op in een gepaste deelruimte V van $C_D^1(\overline{\Omega})$.



Figuur 2: Partitie

2. Kies de partitie $\mathcal{T}_h$ van $\overline{\Omega}$ met 9 identieke rechthoekige elementen Ω_e, $1 \leq e \leq 9$. Nummer de hoekpunten zoals in Fig.2.

   Beschouw de functieruimten

$$\begin{aligned} X_h &= \left\{ v \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v_{|\Omega_e} \text{ is bilineair }, 1 \leq e \leq 9 \right\}, \\ X_{0h} &= \left\{ v \in X_h \mid v = 0 \text{ op gans } \partial\Omega \right\}. \end{aligned}$$

   Beschouw het stel functies $(\varphi_i)_{i=1}^{16}$ gedefinieerd door

$$\varphi_i \in X_h, \qquad \varphi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq 16.$$

   U weet dat

$$X_{0h} = \text{span}\left\{ \varphi_6, \varphi_7, \varphi_{10}, \varphi_{11} \right\}.$$

   Construeer een lineaire combinatie $\Psi^{(1)}$ van φ_5 en φ_8 en een lineaire combinatie $\Psi^{(2)}$ van φ_9 en φ_{12}, waarvoor geldt dat

$$\boxed{\Psi^{(s)}(P) = \Psi^{(s)}(P') \text{ voor alle } P \in \Gamma_2 \text{ en } P' \in \Gamma_4 \text{ gerelateerd zoals in Fig.1 } (s = 1, 2)}$$

3. Bekom nu een benaderingsruimte $V_h \subset V$.