Supplementaire Opgaven "INLEIDING TOT DE VARIATIEREKENING"

Opgave 1

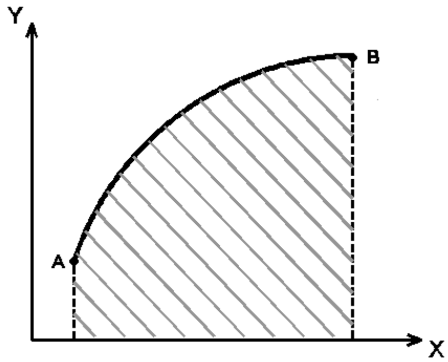
Bepaal de gladde kromme K, met cartesische vergelijking $y = y(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, met vaste eindpunten (t_0, y_0) en (t_1, y_1), waarvoor de volgende functionaal extremaal wordt:

$$I[y] = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + 2gy \right] dt, \qquad g \text{ constant (aardversnelling).}$$

Toon aan dat de gevonden $y(t)$ een *minimum* oplevert van de functionaal over de één-parameterfamilie $y_\alpha(t) = y(t) + \alpha\,\eta(t)$, met $\eta \in V_0 = \{v \in C^2([t_0, t_1]) | v(t_0) = v(t_1) = 0\}$ en $|\alpha| < \alpha_0$. Is er een beperking voor α_0 ?

Opgave 2 (Februari '96)

Beschouw twee vaste punten $A(x_0, y_0)$ en $B(x_1, y_1)$ (in het eerste kwadrant).



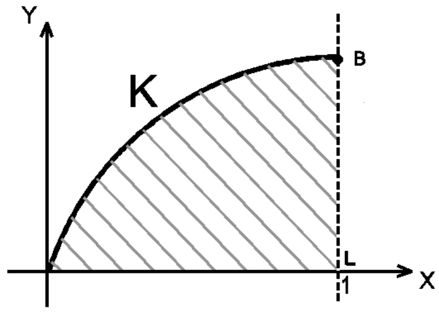
Bepaal de voldoende gladde boog of bogen tussen A en B met een vooropgegeven lengte l $> |\overrightarrow{AB}|$, waarvoor de gearceerde oppervlakte extremaal is.
De integratieconstanten in de extremalen én de multiplicator moeten niet expliciet berekend worden. Zeg wel hoe u die – in principe – zou kunnen vinden. Wat is de meetkundige betekenis van de multiplicator ?

Opgave 3 (Augustus '98)

Bepaal een kromme K (voldoende glad) die de oorsprong verbindt met een niet vooraf gekend punt B op de rechte $x = 1$, die de volgende eigenschappen heeft:

(a) De gearceerde oppervlakte is vooropgegeven (zeg S).

(b) De lengte van K is extremaal.



De integratieconstanten in de extremalen moeten niet expliciet bepaald worden. Evenmin moet de multiplicator, noch de ordinaat van het punt B expliciet bepaald worden. Zeg wel hoe u die zou kunnen vinden.

<u>Opgave 4</u> (Februari '97)

Beschouw de volgende functieruimte V én twee functionalen op V

$$V = \left\{v \in C^2([a,b]) | v(a) = v(b) = 0\right\}, \qquad (a \text{ en } b \text{ vast, gegeven}),$$

$$J : V \to R, \qquad J[v] = \int_a^b [p(x)(v')^2 + q(x)(v)^2]dx,$$

$$I : V \to R, \qquad I[v] = \int_a^b r(x)(v)^2 dx,$$

met

$$p \in C^1([a,b]), \qquad p > 0 \text{ in } [a,b];$$

$$q \text{ en } r \in C^0([a,b]), \qquad q \geq 0 \text{ en } r > 0 \text{ in } [a,b].$$

Noem λ_1 het minimum van de functionaal J over V onder de nevenwaarde $I[v] = 1$ (m.a.w. $\lambda_1 = \min_{v \in V, I[v]=1} J(v))$.

Toon aan dat λ_1 de kleinste eigenwaarde is van het volgende eigenwaardenprobleem (P):

$$?[\lambda, y] \in R \times C^2([a,b]) : \begin{cases} -\frac{d}{dx}[p(x)\ \frac{dy}{dx}] + q(x)y = \lambda r(x)y, \ a < x < b, \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases}$$

<u>Aanwijzing:</u>

- Aan welke differentiaalvergelijking voldoet een (kandidaat) oplossing van het gebonden minimiseringsprobleem ?

- Toon aan dat voor een eigenpaar $[\mu, \varphi]$ van (P) geldt

$$J[\varphi] = \mu\ I[\varphi].$$