

Herschrijfsystemen (wat wiskunde mooi maakt!)

Een bloem uit een regel

L-systemen

1. Parallele herschrijfsystemen

Beschouwen we het volgende streng-herschrijfsysteem over het alfabet $\{a, b\}$

$$\begin{aligned}a &\longrightarrow ab \\ b &\longrightarrow a\end{aligned}$$

Parallele herschrijving vereist dat in een streng alle herschrijfbare componenten terzelfdertijd herschreven worden.

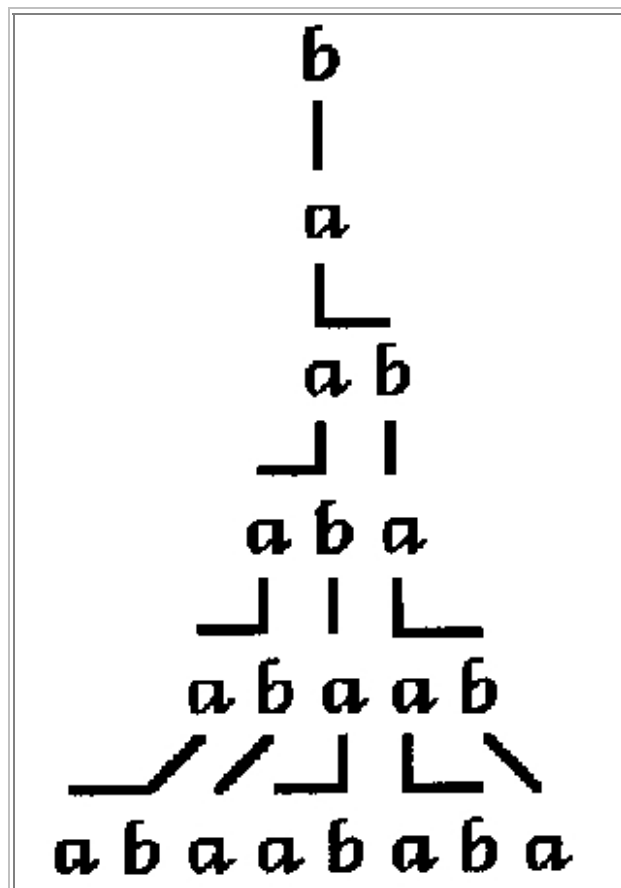
Op die manier krijgen we:

$$\begin{aligned}b &\longrightarrow a \longrightarrow ab \longrightarrow aba \\ &\longrightarrow abaaab \longrightarrow abaaab \\ &\quad aba \longrightarrow \dots\end{aligned}$$

2. Naar een grafische interpretatie van herschrijfsystemen

Wanneer we bovenstaande reductie sequent in een boomstructuur gieten, krijgen we reeds een eerste "grafische interpretatie" van een herschrijving:

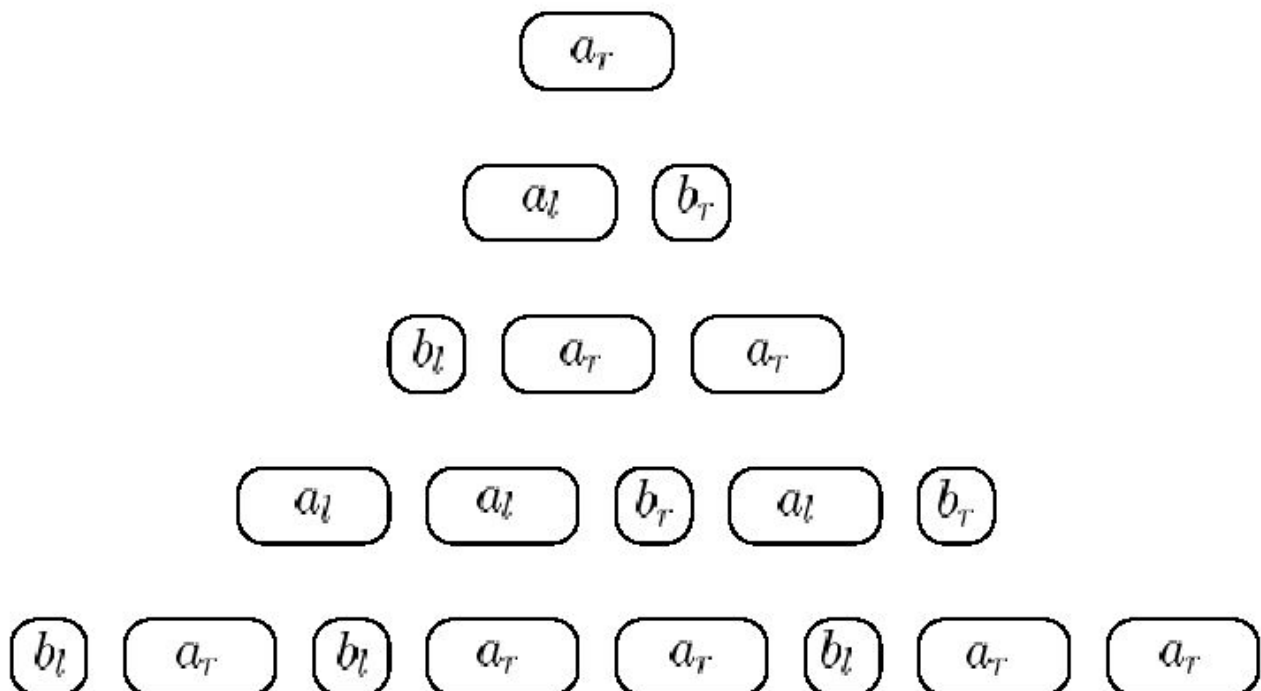
$$\begin{aligned} a &\rightarrow ab \\ b &\rightarrow a \end{aligned}$$



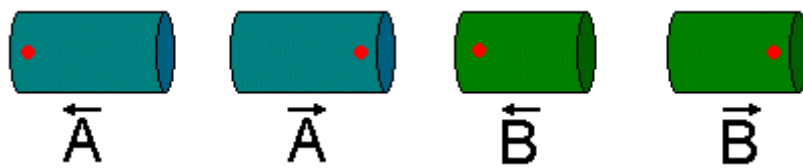
Een betere illustratie

Regels	Herschrijving
$\omega : a_r$ $p_1 : a_r \rightarrow a_l b_r$ $p_2 : a_l \rightarrow b_l a_r$ $p_3 : b_r \rightarrow a_r$ $p_4 : b_l \rightarrow a_l$	a_r $a_l b_r$ $b_l a_r a_r$ $a_l a_l b_r a_l b_r$ $b_l a_r b_l a_r a_r b_l a_r a_r$ $\dots$

Door nu aan a_r , b_r , a_l , b_l de gepaste pictogrammen toe te kennen, beschrijft de bovenstaande reductie de celgroei van de **Anabaena catenula**.



Verdere verbetering:



Regels

$$\omega: \overleftarrow{A}$$

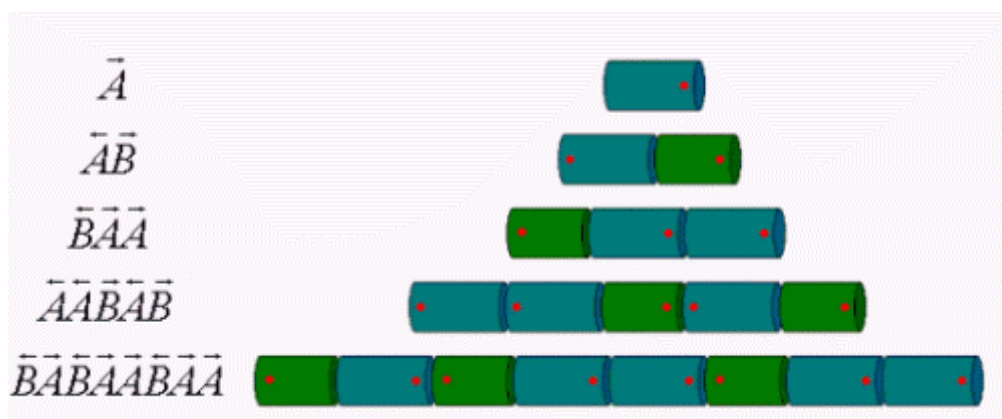
$$p_1: \overleftarrow{A} \rightarrow \overleftarrow{A}\overrightarrow{B}$$

$$p_2: \overleftarrow{A} \rightarrow \overrightarrow{B}\overleftarrow{A}$$

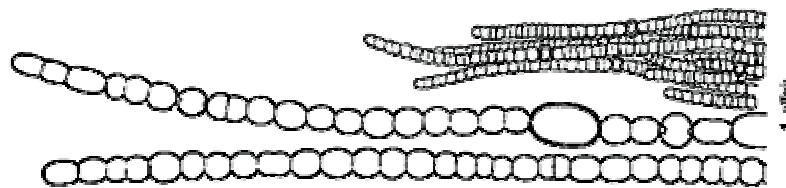
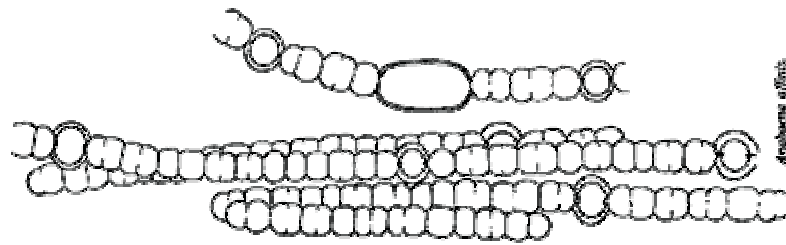
$$p_3: \overrightarrow{B} \rightarrow \overleftarrow{A}$$

$$p_4: \overrightarrow{B} \rightarrow \overleftarrow{A}$$

Herschrijving



Anabaena catenula in werkelijkheid:



L-systemen



Naar een verbeterde beschrijving van deze werkelijkheid:

Regels die rekening houden met mogelijke wijzigingen in de loop van de ontwikkeling:

- de grote A-component deelt om de 15 uur
- de kleine B-component deelt om de 3 uur

We kunnen dit nu realiseren door het alfabet uit te breiden naar

$$V = \{\vec{A}_4, \vec{A}_3, \vec{A}_2, \vec{A}_1, \vec{A}_0, \vec{A}_4, \vec{A}_3, \vec{A}_2, \vec{A}_1, \vec{A}_0, \vec{B}, \vec{B}\}$$

en de herschrijfgeregels als volgt aan te passen

$$\vec{A}_4 \rightarrow \vec{A}_3 \rightarrow \vec{A}_2 \rightarrow \vec{A}_1 \rightarrow \vec{A}_0 \rightarrow \vec{B}\vec{A}_4$$

$$\vec{A}_4 \rightarrow \vec{A}_3 \rightarrow \vec{A}_2 \rightarrow \vec{A}_1 \rightarrow \vec{A}_0 \rightarrow \vec{A}_4\vec{B}$$

Het aangepaste herschrijfsysteem wordt nu:

$$\omega : \vec{A}_4$$

$$p_1 : \vec{A}_{t>0} \rightarrow \vec{A}_{t-1}$$

$$p_2 : \vec{A}_{t=0} \rightarrow \vec{A}\vec{B}$$

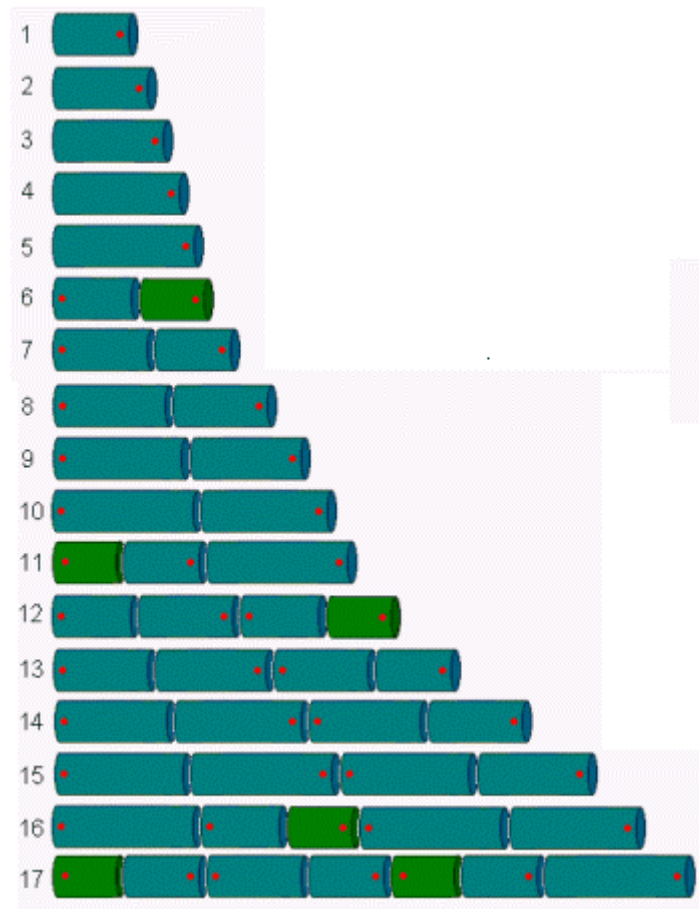
$$p_3 : \vec{A}_{t>0} \rightarrow \vec{A}_{t-1}$$

$$p_4 : \vec{A}_{t=0} \rightarrow \vec{B}\vec{A}$$

$$p_5 : \vec{B} \rightarrow \vec{A}_4$$

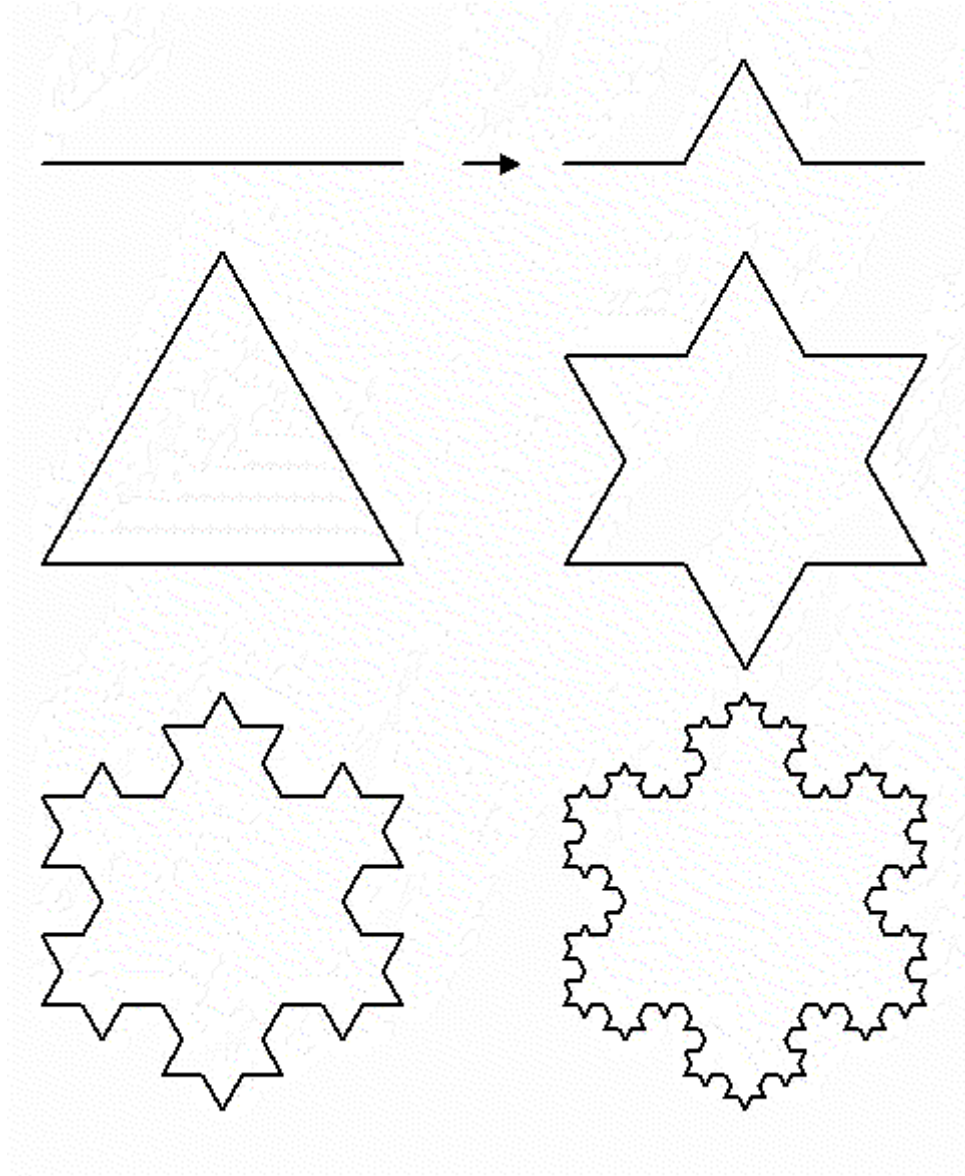
$$p_6 : \vec{B} \rightarrow \vec{A}_4$$

wat volgende herschrijvingen opleveren:



3 Grafische herschrijfsystemen in LOGO

In LOGO kunnen we als volgt een grafisch herschrijfsysteem definiëren:



Deze figuren worden ook nog de sneeuwvlok-krommen van Koch genoemd.

4. Grafische interpretatie van strengen

Wanneer we de schildpad bewegingen van LOGO respectievelijk voorstellen als:

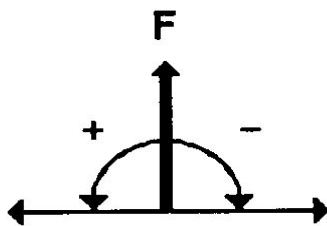
fd 100	F
rt 90	-
lt 90	+

krijgen we voor

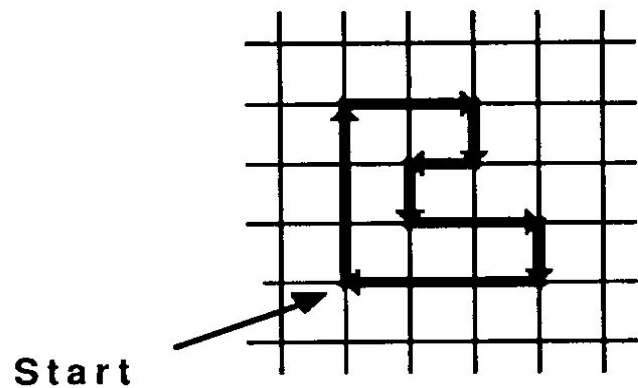
FFF-FF-F-F+F+FF-F-FFF

de volgende figuur

a



b



FFF-FF-F-F+F+FF-F-FFF

5. Voorbeeld

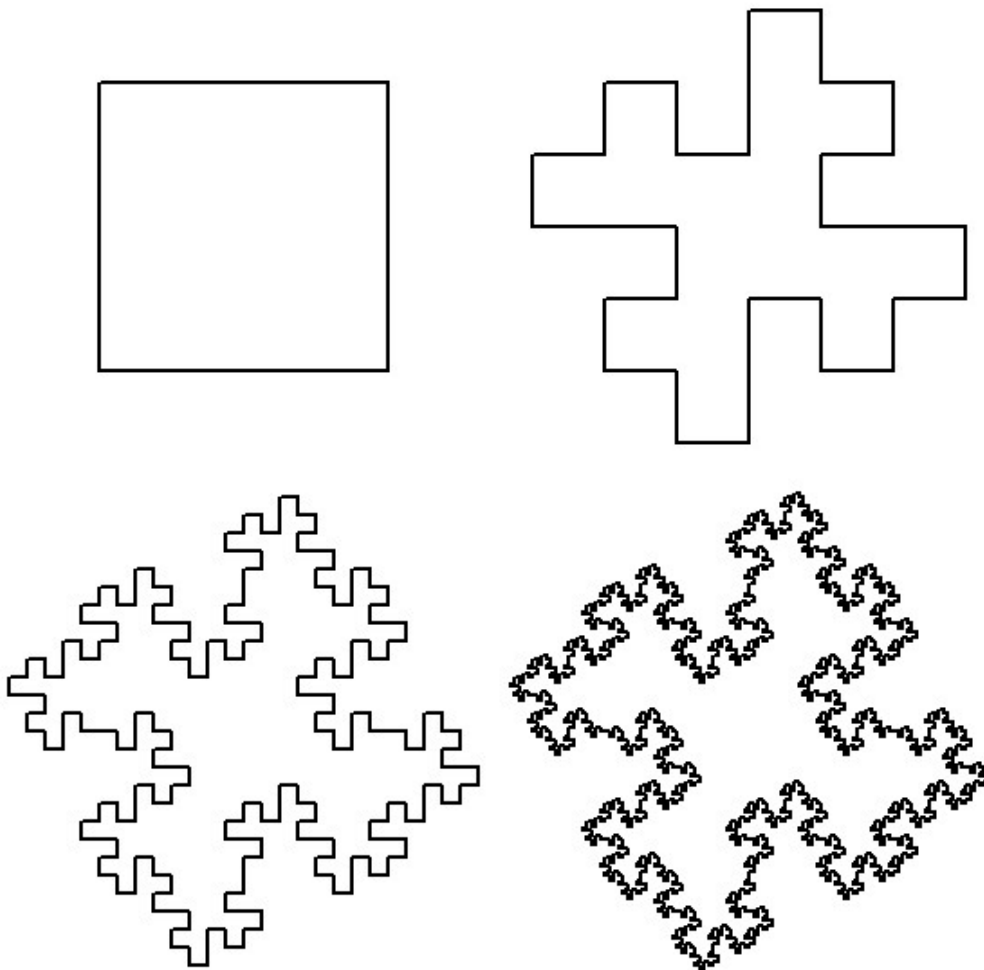
Als we nu vertrekken van

F-F-F-F

en we beschouwen de volgende herschrijfgregel

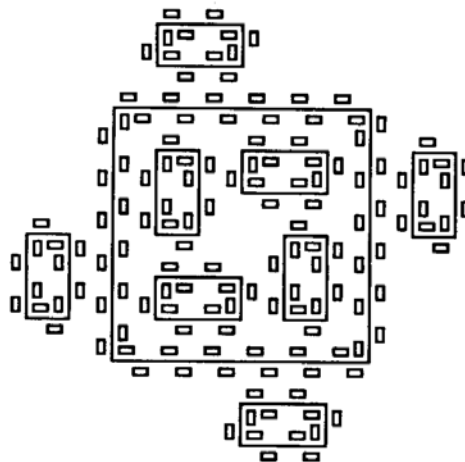
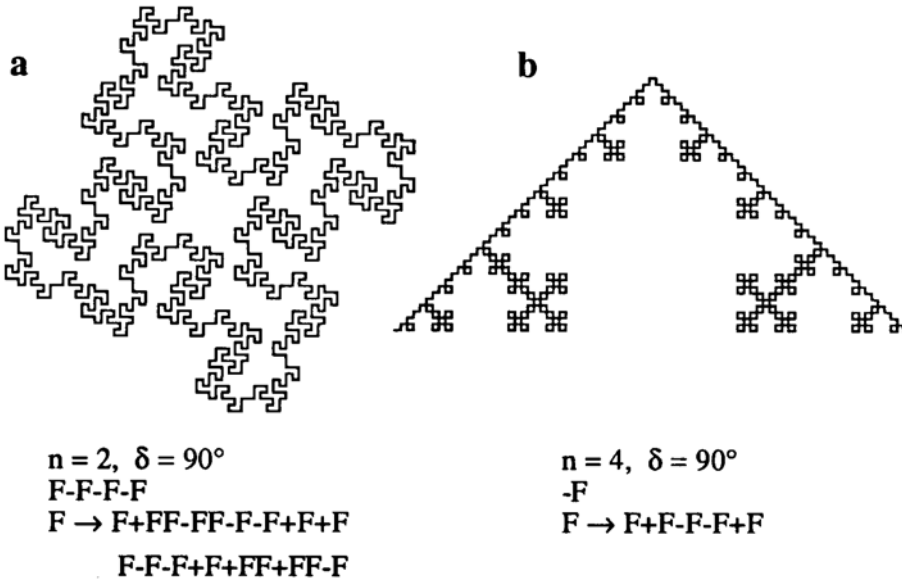
F $\rightarrow$ F-F+F+FF-F-F+F

dan krijgen we na drie achtereenvolgende toepassingen de volgende figuren



6. L-Studio

Deze figuren kunnen aangemaakt worden met behulp van **cpfg** [6] in het L-Studio.



$n = 2, \delta = 90^\circ$
 $F+F+F+F$
 $F \rightarrow F+f-FF+F+FF+Ff+FF-f+FF-F-FF-Ff-FFF$
 $f \rightarrow ffffff$