

# Hipparchus, Mercator en Wiskundige Analyse

Herman Serras  
Vakgroep Wiskundige Analyse  
Universiteit Gent

## 1 Inleiding

In deze bijdrage wordt, door gebruik te maken van de exponentiële functie in het complex gebied een verband gelegd tussen twee bekende kaartprojecties. Tevens wordt aangetoond hoe belangrijk de zoektocht naar een primitieve van de secansfunctie geweest is voor de wiskundige behandeling van de kaartprojectie, die sinds het einde van de zestiende eeuw gebruikt wordt voor de zeekaarten en die bovendien de naam draagt van de beroemdste cartograaf uit onze gewesten: Gerard Mercator.

Sommige aspecten worden ook in andere publicaties behandeld. We vermelden V. F. Rickey and P. M. Tuchinsky [7], W. Pijls [6], J. Benitez and N. Thome [1] en E. Maor [5]. Het leven en werk van Mercator worden uitgebreid behandeld in het standaardwerk van M. Wattelet (red.) [8] en N. Crane [2] beschreef het levensverhaal van de beroemde cartograaf, geplaatst in het algemeen kader van de bewogen zestiende eeuw. In onze benadering wordt een centrale rol gespeeld door "*de eerste grondvorm*", een basisbegrip uit de differentiaalmeetkunde. De figuren i.v.m. de kaartprojecties werden gemaakt met behulp van Maple en het *maptools package* van Vince Costanzo.

We vinden het passend deze bijdrage op te dragen aan Prof. Dr. R. Delanghe, die steeds een grote interesse heeft getoond voor de geschiedenis van de wiskunde en voor de wisselwerking tussen de wiskunde en andere wetenschappen.

## 2 Kaartprojecties

We gaan uit van een bolvormig model van de aarde. Elk punt op het aardoppervlak, behalve de polen, wordt geografisch gekenmerkt door zijn *lengte*  $\lambda$  en zijn *breedte*  $\varphi$ . De breedte wordt gemeten ten opzichte van de evenaar, die geografisch bepaald is. De lengte wordt gemeten ten opzichte van de nulmeridiaan, die bij afspraak werd vastgelegd (sinds 1884 de meridiaan van Greenwich). Breedte en lengte worden in de toepassingen meestal uitgedrukt in zestigdelige graden, maar voor een wiskundige behandeling gebruiken we radialen. We kiezen  $\varphi \in ] - \pi/2, \pi/2[$  en  $\lambda \in ] - \pi, \pi[$ . In het vervolg zullen  $\lambda$  en  $\varphi$  steeds beperkt worden tot deze intervallen.

De *parameterkrommen*  $\varphi = \varphi_0$  en  $\lambda = \lambda_0$  bepalen op het aardoppervlak een orthogonaal netwerk. Op het aardoppervlak kunnen afstanden, hoeken en oppervlakten van gebieden gemeten worden.

Een *kaart* is een voorstelling in het vlak van het aardoppervlak, of van een gedeelte ervan. De manier waarop dit gebeurt noemen we een *kaartprojectie*. Meestal is de werkwijze wiskundig bepaald en in sommige gevallen het resultaat van een meetkundige constructie. Voor een wiskundige behandeling volstaat het afbeeldingen in het vlak te beschouwen van de eenheidssfeer, die dan opgevat wordt als een schaalmodel van het aardoppervlak en die we verder ook soms een *globe* zullen noemen.

Een parametervoorstelling van de eenheidssfeer, als functie van  $\lambda$  en  $\varphi$  is

$$\mathbf{P}(\lambda, \varphi) = (\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi), \quad \varphi \in ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \quad \lambda \in ] - \pi, \pi[ \quad (2.1)$$

De parameterkrommen  $\lambda = \lambda_0$  en  $\varphi = \varphi_0$  zijn respectievelijk de meridianen (halve grote cirkels) en de parallelcirkels. Het is de gekozen parametervoorstelling die van de noord- en zuidpool *singuliere* punten maakt: men kan deze punten niet eenduidig bepalen d.m.v. een lengte- en breedteligging.

## 3 Oppervlakkentheorie: de eerste grondvorm

Als  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$  de parametervoorstelling is van een oppervlak  $S$ , dan wordt met deze parametervoorstelling de zogenaamde "*eerste grondvorm*" op  $S$  geassocieerd, die bepaald wordt door

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (3.1)$$

waarbij

$$E = \mathbf{P}_u \cdot \mathbf{P}_u, \quad F = \mathbf{P}_u \cdot \mathbf{P}_v, \quad G = \mathbf{P}_v \cdot \mathbf{P}_v. \quad (3.2)$$

Indien men bovendien stelt  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ ,  $t \in ]a, b[$ , dan wordt hierdoor op  $S$  over het algemeen een *kromme* gedefinieerd  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(u(t), v(t))$ ,  $t \in ]a, b[$ . Booglengten, hoeken en oppervlakten van gebieden, bepaald door dergelijke krommen op  $S$  worden berekend met behulp van formules waarin de eerste grondvorm of zijn coëfficiënten voorkomen.

Associeert men met  $(u, v) \in D$  een ander oppervlak  $S_1$  d.m.v. een parametervoorstelling  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(u, v)$  dan is de eerste grondvorm voor dit oppervlak

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 dudv + G_1 dv^2 \quad , \quad (3.3)$$

waarbij

$$E_1 = \mathbf{Q}_u \cdot \mathbf{Q}_u \quad , \quad F_1 = \mathbf{Q}_u \cdot \mathbf{Q}_v \quad , \quad G_1 = \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{Q}_v \quad . \quad (3.4)$$

Met eenzelfde  $(u, v)$  corresponderen dan een punt op  $S$  en een punt op  $S_1$ . Op die manier worden beide oppervlakken op elkaar afgebeeld. Over het algemeen correspondeert met een kromme op  $S$  een kromme op  $S_1$ . Uit (de coëfficiënten van) beide eerste grondvormen kan afgeleid worden welke eigenschappen van krommen of oppervlakten van corresponderende gebieden op beide oppervlakken eventueel behouden worden bij de afbeelding.

Het is ook belangrijk te vermelden dat de "*totale kromming*" in een punt van een oppervlak enkel afhangt van de coëfficiënten van de eerste grondvorm en de eerste en tweede partiële afgeleiden van zijn coëfficiënten. Dit is het befaamde *Theorema Egregium* van *Gauss*. Het belang van deze stelling voor de cartografie zal verder verduidelijkt worden.

Passen we (3.1) en (3.2) toe op de parametervoorstelling (2.1) van de eenheidssfeer, dan vinden we als eerste grondvorm

$$(ds^2)_{sfeer} = \cos^2 \varphi d\lambda^2 + d\varphi^2 \quad . \quad (3.5)$$

## 4 Isometrische, conforme en oppervlakgetrouwe afbeeldingen

Een afbeelding tussen de oppervlakken  $S$  en  $S_1$ , zoals gedefinieerd in de vorige paragraaf wordt *isometrisch* genoemd als voor alle bogen met gelijke lengte op  $S$  geldt dat ze op  $S_1$  afgebeeld worden als bogen met gelijke lengte. Hiervoor is nodig en voldoende dat de verhouding van de corresponderende eerste grondvormen een constante is.

De totale kromming van een sfeer is constant maar verschillend van nul, terwijl de totale kromming van een vlak in elk punt gelijk is aan nul. Omdat de

totale kromming van beide oppervlakken verschillend is volgt uit het *Theorema Egregium* dat er geen afbeelding bestaat die een sfeer (of een gedeelte ervan) isometrisch afbeeldt op een vlak. Oppervlakken die wel isometrisch kunnen afgebeeld worden op een vlak zijn o.a. cilinder- en kegeloppervlakken. Zij worden in de cartografie vaak gebruikt als tussenstap en dan "ontvouwd" in het vlak.

De afbeelding tussen de oppervlakken  $S$  en  $S_1$ , zoals gedefinieerd in de vorige paragraaf wordt *hoekgetrouw* of *conform* genoemd als de hoek tussen elke twee bogen op  $S$  gelijk is aan de hoek tussen hun beelden op  $S_1$ . Hiervoor is nodig en voldoende dat de corresponderende eerste grondvormen evenredig zijn, waarbij de evenredigheidsfactor een functie mag zijn van de gebruikte parameters. Conforme afbeeldingen zijn belangrijk voor kaarten die gebruikt worden voor navigatie.

De afbeelding tussen de oppervlakken  $S$  en  $S_1$ , zoals gedefinieerd in de vorige paragraaf wordt *oppervlakgetrouw* genoemd als gebieden op  $S$  met gelijke oppervlakte op  $S_1$  afgebeeld worden als gebieden met gelijke oppervlakte. Opdat een afbeelding oppervlakgetrouw zou zijn moet ook een bepaald verband bestaan tussen de coëfficiënten van de corresponderende eerste grondvormen. Oppervlakgetrouwe afbeeldingen zijn belangrijk voor (staatkundige) kaarten waarbij men de verhouding tussen de oppervlakten van verschillende landen wil respecteren.

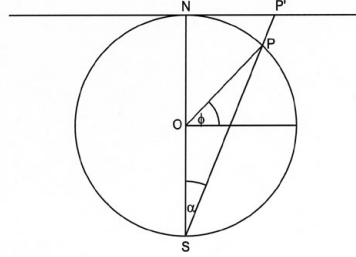
Een kaartprojectie van een sfeer op een vlak kan niet terzelfertijd conform en oppervlakgetrouw zijn, want men kan aantonen dat ze in dat geval ook isometrisch zou zijn.

## 5 De polaire stereografische projectie

We beschouwen eerst de *polaire stereografische projectie*. Niettegenstaande er aanwijzingen zijn dat ze reeds gebruikt werd in het oude Egypte wordt ze meestal geassocieerd met Hipparchus (Griekenland - 2de eeuw B.C.). Tot in de zestiende eeuw werd ze enkel gebruikt om de sterrenhemel voor te stellen. Sindsdien wordt ze bijvoorbeeld ook gebruikt voor de afbeelding van gebieden in de omgeving van de polen.

Een polaire stereografische projectie kan meetkundig gedefinieerd worden. Elk punt van de globe wordt geprojecteerd uit een van de polen op het vlak dat de globe raakt in de andere pool. We kiezen als projectiecentrum de *zuidpool*, het projectievlak is dan het raakvlak in de *noordpool*. Elk punt,

behalve de zuidpool heeft een eigenlijk beeld. Uit onderstaande figuur volgt dat  $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$  zodat de afstand van de noordpool tot de projectie  $P'$  van een punt  $P$ , dat gelegen is op een breedte  $\varphi$  gelijk is aan  $NP' = 2 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ .



Figuur 1: Bepalen van de afstand van het beeld van een punt op de sfeer tot de noordpool

Het noordelijk halfrond wordt afgebeeld binnen een cirkel met straal 2, het zuidelijk halfrond buiten deze cirkel. De meridianen worden afgebeeld volgens halve rechten met beginpunt in de noordpool, de parallelcirkels volgens cirkels met middelpunt in de noordpool.

Kiezen we in het projectievlak een assenstelsel  $(x_1, y_1)$  bepaald door de projecties van de nulmeridiaan en de meridiaan  $\lambda = \pi/2$ , dan wordt het punt op de eenheidssfeer, bepaald door  $(\lambda, \varphi)$  afgebeeld op het punt met coördinaten

$$x_1 = 2 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos \lambda \quad , \quad y_1 = 2 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sin \lambda . \quad (5.1)$$

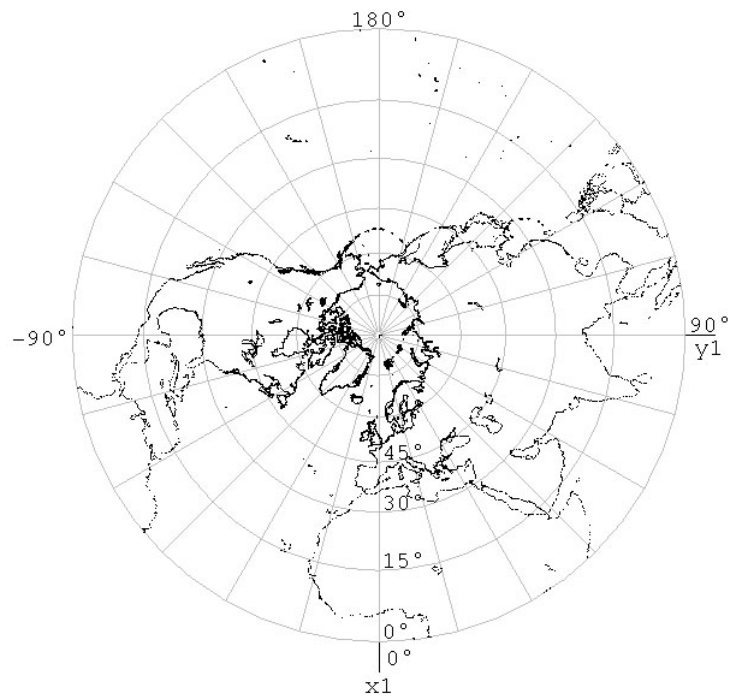
Merk op dat (5.1) ook kan geschreven worden als

$$x_1 = 2(\sec \varphi - \tan \varphi) \cos \lambda \quad , \quad y_1 = 2(\sec \varphi - \tan \varphi) \sin \lambda . \quad (5.2)$$

Bepalen we de eerste grondvorm  $(ds^2)_{hipp}$ , die correspondeert met (5.2) en vergelijken we deze met (3.5), dan vinden we

$$(ds^2)_{hipp} = 4 \left( \frac{1}{1 + \sin \varphi} \right)^2 (ds^2)_{sfeer} \quad (5.3)$$

Uit dit verband tussen beide eerste grondvormen volgt dat de polaire stereografische projectie een conforme afbeelding is van de eenheidssfeer in het vlak. Onderstaande figuur is de afbeelding van het noordelijk halfrond volgens de beschouwde polaire stereografische projectie.



Figuur 2: het noordelijk halfrond in een polaire stereografische projectie

Een andere polaire stereografische projectie bekomt men door het projectiecentrum te kiezen in de noordpool en als projectievlak het raakvlak in de zuidpool aan de eenheidssfeer. Deze keuze is meer geschikt voor afbeeldingen van gebieden in het zuidelijk halfrond. Merk op dat de afbeelding van de volledige globe via een polaire stereografische projectie zich uitstrekt over heel het projectievlak.

Een mooie eigenschap van de polaire stereografische projectie is dat elke cirkel op de sfeer, die niet door beide polen gaat, op de kaart ook als een cirkel wordt voorgesteld (zie E. Kreyszig [4]). Zo kan men op de kaart gemakkelijk een idee krijgen van alle punten die op de sfeer gelegen zijn binnen een bepaalde afstand van een gegeven punt. J.L. Lagrange toonde aan dat een stereografische projectie de enige conforme afbeelding is van een sfeer op een vlak, waarbij alle cirkels afgebeeld worden als cirkels, of in bijzondere gevallen als halve rechten.

## 6 De mercatorprojectie

De polaire stereografische projectie is niet zeer geschikt om gebruikt te worden bij navigatie op zee. Een koers wordt bepaald t.o.v. de meridianen. Deze worden afgebeeld als (halve) rechten, die vertrekken vanuit de noordpool en dus niet evenwijdig zijn, zodat het uitzetten van een koers niet eenvoudig is. Daarom ging men op zoek naar een conforme kaartprojectie, waarbij de meridianen afgebeeld worden als uniform gespatieerde evenwijdige rechten. Omdat de afbeelding conform moet zijn zullen de parallelcirkels dan afgebeeld worden als evenwijdige lijnstukken. In 1569 publiceerde Mercator zijn wereldkaart "*Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium accommodata*". Deze kaart is bijzonder interessant, in de eerste plaats voor datgene wat erop voorgesteld wordt. De grote exploratiereizen van de Spanjaarden en Portugezen hadden heel wat informatie opgeleverd i.v.m. de geografie van verafgelegen gebieden. Bovendien geeft Mercator in verschillende tekstvakken op de kaart uitvoerige verduidelijkingen, o.a. omtrent zijn keuze van een referentie-meridiaan en zijn ideeën omtrent de ligging van de magnetische polen. Historisch is deze kaart wellicht nog belangrijker voor de manier waarop de aarde wordt afgebeeld. Op een dergelijke kaart kan immers gemakkelijk de reisweg uitgezet worden, die men dient te volgen indien men een constante koers wil aanhouden. Het volstaat het lijnstuk te tekenen dat het vertrekpunt verbindt met de plaats van bestemming. De hoek tussen de richting van de meridianen en de richting van dit lijnstuk bepaalt dan de route en de constante koers die moet aangehouden worden. De kromme die daarmee correspondeert op de globe noemt men een *loxodroom*. De kortste verbinding tussen twee punten op de globe (en op het aardoppervlak) wordt bepaald op de grote cirkel die door deze punten gaat en valt in het algemeen niet samen met de loxodroom door deze punten. Het is interessant te vermelden dat een loxodroom in een polaire stereografische projectie voorgesteld wordt als een logaritmische spiraal.

Om de eenheidssfeer met parametervoorstelling (2.1) in een rechthoekig assenstelsel  $(x_2, y_2)$  voor te stellen volgens een mercatorprojectie moet gelden:

- de meridianen worden afgebeeld op  $x_2 = \lambda$ ,
- de parallelcirkels worden afgebeeld op  $y_2 = f(\varphi)$  met  $f(0) = 0$  (de evenaar wordt afgebeeld op de  $x_2$ -as), waarbij de functie  $f$  zodanig bepaald wordt dat de afbeelding conform is.

De eerste grondvorm voor deze afbeelding is.

$$(ds^2)_{mercator} = d\lambda^2 + f'^2(\varphi) d\varphi^2 \quad (6.1)$$

Opdat de gewenste afbeelding van de eenheidssfeer conform zou zijn, moeten de coëfficiënten van de eerste grondvormen voor de eenheidssfeer en de kaart, uitgedrukt met behulp van dezelfde parameters  $(\lambda, \varphi)$  evenredig zijn, waarbij de evenredigheidsfactor een functie mag zijn van deze parameters. Dit zal het geval zijn als

$$f'^2(\varphi) = \frac{1}{\cos^2 \varphi}. \quad (6.2)$$

Dan geldt

$$(ds^2)_{mercator} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} (ds^2)_{sfeer}. \quad (6.3)$$

We wensen dat  $f$  een strikt stijgende functie zou en dat  $f(0) = 0$ . Dit is het geval als

$$f(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\cos t}. \quad (6.4)$$

Het bepalen van een primitieve van de secansfunctie is een geliefkoosde opgave in een eerste cursus differentiaal- en integraalrekening. Weinigen zijn ervan op de hoogte dat deze opdracht zo nauw verbonden is met de historisch wellicht belangrijkste kaartprojectie. Toen Mercator in 1569 zijn beroemde kaart publiceerde was de differentiaal- en integraalrekening nog onbekend en er zijn geen aanwijzingen over de werkwijze die hij zou gebruikt hebben om de exacte positie te bepalen voor de voorstelling van de parallelcirkels. In 1599 stelde Edward Wright een tabel op met behulp van een methode die men thans "numerieke integratie" zou noemen. Hiertoe liet hij de breedte toenemen per boogminuut. Het is wel gemakkelijk in te zien dat de secansfunctie iets te maken heeft met de gezochte spatiëring. De breedtecirkel op breedte  $\varphi$ , waarvan de werkelijke lengte gelijk is aan  $2\pi \cos \varphi$  wordt afgebeeld volgens een lijnstuk met lengte  $2\pi$ . Elke breedtecirkel wordt dus uitgerekt met een factor  $\sec \varphi$ . Dus is het plausibel te veronderstellen dat, om een conforme afbeelding te bekomen, ook langs de verticale as een uitrekking nodig is die voor een bepaalde breedte in verband staat met de secans van die breedte. Deze uitrekking moet echter *continu geaccumuleerd* worden, wat men pas veel later wiskundig kon behandelen. In 1614 (dus 45 jaar nadat Mercator de vermelde wereldkaart geproduceerd had) publiceerde John Napier zijn ontdekking van de logaritmen en rond 1645 schreef Henry Bond *het vermoeden* neer dat

$$f(\varphi) = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right). \quad (6.5)$$

Het duurde nog tot 1668 vooraleer James Gregory (op een ingewikkelde manier) voor het eerst aantoonde dat dit vermoeden correct was. In 1670 bewees Isaac Barrow de formule op een eenvoudiger manier.



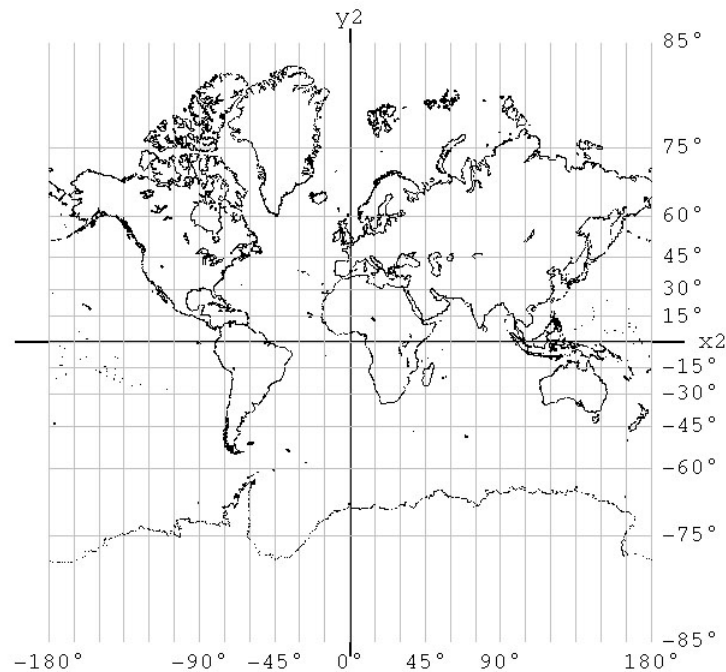
Merk op dat (6.5) ook kan geschreven worden als

$$f(\varphi) = \ln(\sec \varphi + \tan \varphi), \quad (6.6)$$

Er zijn aanwijzingen (B. English [3]) dat de projectie, die thans algemeen de *mercatorprojectie* genoemd wordt, reeds vroeger gebruikt werd door *Etzlaub* (1460-1532) op zijn *Compass Map* (1511).

Het punt op de eenheidssfeer, bepaald door  $(\lambda, \varphi)$  wordt volgens de mercatorprojectie in het gekozen rechthoekig assenstelsel  $(x_2, y_2)$  afgebeeld op het punt met coördinaten

$$x_2 = \lambda, \quad y_2 = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \ln(\sec \varphi + \tan \varphi). \quad (6.7)$$



Figuur 3: mercatorprojectie voor  $-85^\circ < \varphi < 85^\circ$

De eenheidssfeer wordt dus afgebeeld op de (oneindige) strook  $-\pi < x_2 \leq \pi$ . Bij de mercatorprojectie wordt de vervorming van de oppervlakte van een gebied op de globe groter naarmate men zich verder verwijdt van de evenaar: zo wordt Groenland veel groter afgebeeld dan Zuid-Amerika, terwijl

Zuid-Amerika ongeveer acht keren zo groot is als Groenland. Ook Europa wordt t.o.v. gebieden rond de evenaar proportioneel te veel vergroot, wat voor sommige machthebbers niet ongelegen was.

Niettegenstaande de mercatorprojectie gerangschikt wordt bij de *cilinderprojecties*, waarbij elk punt van de eenheidssfeer eerst "geprojecteerd" wordt op een geassocieerde cilinder, die dan ontvouwd wordt, bestaat er geen meetkundige constructie zoals dat het geval is voor de polaire stereografische projectie. De mercatorprojectie wordt vaak verward met, maar is dus NIET de *centrale cilindrische projectie*, waarbij elk punt van de globe eerst meetkundig geprojecteerd wordt uit het middelpunt van de globe op de cilinder, die langs de evenaar aan de globe raakt en waarbij deze cilinder vervolgens opengerold wordt. Bij deze kaartprojectie worden de meridianen wel op dezelfde wijze afgebeeld als bij de mercatorprojectie en worden de parallelcirkels ook afgebeeld als evenwijdigen, maar de toename van de afstanden tussen deze evenwijdigen is nog veel groter dan bij de mercatorprojectie. De centrale cilindrische projectie is niet conform, wat gemakkelijk kan aangetoond worden door de eerste grondvorm te bepalen en hem te vergelijken met die van de sfeer.

## 7 Verband tussen de polaire stereografische projectie en de mercatorprojectie

In de formules voor de polaire stereografische projectie die we gekozen hebben (projectiecentrum in de zuidpool) komt

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{of} \quad \sec \varphi - \tan \varphi \quad (7.1)$$

voor, terwijl in de formules voor de mercatorprojectie

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{of} \quad \sec \varphi + \tan \varphi \quad (7.2)$$

voorkomt.

Het is gemakkelijk in te zien dat

$$\sec \varphi - \tan \varphi = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{\sec \varphi + \tan \varphi} .$$

Het verband tussen (6.7) en (5.1) kan als volgt uitgedrukt worden:

$$x_1 = 2e^{-y_2} \cos x_2 \quad , \quad y_1 = 2e^{-y_2} \sin x_2 . \quad (7.3)$$

Stellen we voor de mercatorprojectie  $z = x_2 + iy_2$  en voor de beschouwde polaire stereografische projectie  $w = x_1 + iy_1$ , dan geldt

$$w = 2e^{-y_2}(\cos x_2 + i \sin x_2) = 2e^{-y_2} \cdot e^{ix_2} = 2e^{i(x_2+iy_2)} = 2e^{iz}. \quad (7.4)$$

De complexe functie  $2e^{iz}$  is analytisch en bepaalt dus een conforme transformatie in het vlak. Met de strook, die de voorstelling is van de globe in de mercatorprojectie correspondeert dan het volledig vlak in de polaire stereografische projectie. Met de rechten  $x = C$  en  $y = C$  in het vlak corresponderen respectievelijk de halve rechten vanuit de oorsprong en de cirkels met middelpunt in de oorsprong.

De factor 2 in (7.4) kan men vermijden door in de polaire stereografische projectie als projectievlak niet het raakvlak in de noordpool te kiezen, maar het vlak door de evenaar. Door een aangepaste keuze van het assenstelsel bij de mercatorprojectie en/of de polaire stereografische projectie (zie [6]) kan men er verder voor zorgen dat het verband tussen beide projecties uitgedrukt wordt d.m.v. de "basis-exponentiële functie"  $w = e^z$ . We hebben evenwel geopteerd voor de gebruikelijke keuze van het assenstelsel bij de mercatorprojectie en we hebben tevens gekozen voor de polaire stereografische projectie met projectie vanuit de zuidpool.

## 8 Besluit

In deze bijdrage werd aangetoond hoe een aantal fundamentele begrippen uit verschillende domeinen van de wiskundige analyse (de primitieve van de secansfunctie, de exponentiële functie in het complex gebied en de eerste grondvorm uit de differentiaalmeetkunde) kunnen toegepast worden bij twee belangrijke kaartprojecties waaraan de namen verbonden zijn van de beroemde cartografen Hipparchus en Mercator.

## Referenties

- [1] Benitez, J. and Thome, N.: *Applications of differential geometry to cartography*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 2004, Vol. 35, No. 1, 29-38.
- [2] Crane, N.: *Mercator - De Man die de Aarde in Kaart bracht*, ISBN 90-7634-150-8, Ambo-Athos, Amsterdam en Jos den Bekker, 2003 (vert.)
- [3] English, B.: *Erhard Etzlaub's Projection and Methods op Mapping*, Imago Mundi, 48, 1996.

- [4] Kreyszig, E.: *Differential Geometry*, Dover Publications, 1991, ISBN 0-486-66721-9.
- [5] Maor, E.: *Trigonometric Delights*, Princeton University Press, Princeton, 2002, ISBN 0-691-09541-9
- [6] Pijls, W.: *Some Properties Related to Mercator Projection*, The Mathematical Association of America Monthly 108 (June-July 2001), 537-543
- [7] Rickey, V. F. and Tuchinsky, P. M. 1980: *An Application of Geography to Mathematics: History of the Integral of the Secant*, Mathematics Magazine, Vol. 53, No. 3 (May, 1980), 162-166.
- [8] Watelet, M. (red.): *Gerardus Mercator Rupelmundanus*, Mercatorfonds, Antwerpen, 1994, ISBN 90-6153-313-9