

Redeneren, Abstraheren en Structureren

Woensdag 30 november 2016

Een goede leraar is

- Vakbekwaam
- Didactisch onderlegd

Vakbekwaamheid is absoluut

Didactiek is relatief tov het publiek

Sterke interactie tussen die twee

Drie standaardvoorbeelden
waar **vakbekwaamheid** het
didactisch proces kan helpen

- (1) Een ingewikkeld probleem opdelen in stukjes
- (2) Nieuwsgierige vragen beantwoorden
- (3) Verwardheden achterhalen

Doel van deze les:

• Eigenheid van wiskunde naar voor brengen

* Tweespaltigheid van de wiskunde:

enerzijds: hulpwetenschap (oude Egypte)

anderzijds: zelfstandige discipline

(oude Griekenland)

Maar "zelfs" als hulpwetenschap of receptenboek is enig inzicht wenselijk!

Doel van deze les:

- Eigenheid van wiskunde naar voor brengen
- Materiaal bieden voor volgende vragen:
 - * Wat kan je doen met wiskunde?
 - * Is wiskunde nog nodig met de huidige technologie?
 - * Is wiskunde niet af? Kunnen we het niet allemaal ergens "lezen"?
 - * Waarom worden wij daarmee geplaagd?
 - * Is wiskunde niet alleen voor nerds?
 - * Waarom mogen we geen GRM gebruiken voor deze oefening?
 - * Waartoe dient een bewijs; je ziet dat toch zo?
 - * Waarom die theorie en niet alleen toepassingen?

Wat is wiskunde?

www.wiskunde.ugent.be:

Wiskunde bestudeert **structuur**, ruimte, kwantiteit en verandering, herleid tot hun meest **abstracte** essentie. Wiskundigen zoeken patronen, formuleren vermoedens en leiden waarheid af via rigoureuze **deductie** uit oordeelkundig gekozen axioma's en definities.

Wat is wiskunde?

Structuur, abstractie, deductie

→ Wiskunde = kunst om
abstractie te structureren door
middel van logische
redeneringen

Abstraheren

Voorbeeld:

De natuurlijke getallen

Axiomatische aanpak (Peano) vs
rechtstreekse definitie

Zijdelingse vraag (tussendoortje):

Wat is het verschil tussen een
axioma en een definitie?

Abstraheren

Voorbeeld:

De natuurlijke getallen

Definitie:

Een natuurlijk getal is een
equivalentieklasse van
gelijkmachtige (niet-ledige)
eindige verzamelingen

Abstraheren

Voorbeeld:

De natuurlijke getallen

- * Denken aan een vertegenwoordiger
- * Gestructureerd door orderrelatie geërfd van inclusierelatie van verzamelingen

Abstraheren

Abstraheren = verschillende situaties
in één concept vatten

---> zuivere wiskunde, toepasbare wiskunde,
toegepaste wiskunde, abstracte wiskunde

---> ketting van concepten van meest concreet
naar meest abstract

Abstraheren

Voorbeelden van zo een ketting:

netwerken \rightarrow grafen \rightarrow chromatisch getal \rightarrow
chromatische polynoom \rightarrow Tutte polynoom \rightarrow
polynomiale schema's \rightarrow combinatorische schema's

kaarten schudden \rightarrow permutaties \rightarrow permutatie-
groep \rightarrow abstracte groep \rightarrow semigroep \rightarrow repre-
sentatietheorie \rightarrow groepenschema's (Grothendieck)

\rightarrow concentrisch model

Abstraheren

In secundair onderwijs:

Abstractie groeit

“Toevallig” ook toepassingsradius!

Geef voorbeelden (succeservaringen)!

* vraagstukken oplossen met een vergelijking

Abstraheren

In secundair onderwijs:

Abstractie groeit

“Toevallig” ook toepassingsradius!

Geef voorbeelden (succeservaringen)!

* de determinant van een matrix

Abstraheren

In secundair onderwijs:

Abstractie groeit

“Toevallig” ook toepassingsradius!

Geef voorbeelden (succeservaringen)!

* de bepaalde integraal

Abstraheren

In secundair onderwijs:

Abstractie af en toe toetsen aan praktijk en tegelijkertijd kritische zin van leerlingen aanzwengelen ten aanzien van berichtgeving

Voorbeeld: kans dat prinses Kate zwanger was van een tweeling

Gegeven: * misselijkheid in vierde maand van zwangerschap 3x zo groot bij tweeling

* Eén op tachtig geboortes is een tweeling

Redeneren

Oefening:

Wat is de enige juist oplossing op deze vraag?

- * Alle onderstaande antwoorden
- * Geen van onderstaande antwoorden
- * Alle bovenstaande antwoorden
- * Eén van bovenstaande antwoorden
- * Geen van bovenstaande antwoorden
- * Geen van bovenstaande antwoorden

Redeneren

Basisregels: logica

vgl verkeersregels

Redeneren

Basisregels: logica

waarheidstabel of verzamelingenleer

Redeneren

Basisregels: logica

Oefening: is volgende conclusie waar?

$f(x)$ en $f(y)$ zijn niet beide verschillend van nul.

x is verschillend van nul of $f(y)$ is verschillend van nul.

Dus $x \neq 0$ of $f(x) = 0$.

Redeneren

Basisregels: logica

Oefening: is volgende conclusie waar?

Als $x < 0$, dan is $y > 0$ als $z = 0$.

$z = 0$ of $y = 0$.

Dus $x < 0$ of $y = 0$.

Redeneren

Basisregels: logica

Voor uitspraken met kwantoren kunnen we geen waarheidstabellen maken.

Let op met volgorde van de universele en existentiële kwantoren:

$$\forall x \exists y \neq \exists y \forall x$$

Redeneren

Basisregels: logica

Ook opletten met logica rechtstreeks toe te passen op de praktijk: (oude Grieken) ik kan in mijn pyjama, mijn pyjama kan in mijn valies, dus ik kan in mijn valies ($A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$)

Redeneren

Redeneringen worden gestructureerd tot stellingen. De redenering die tot een stelling leidt vormt het **bewijs** van de stelling.

Ook evidente feiten; intuïtie kan bedriegen

Redeneren

Bewijs = creatief gebeuren

Zelf vinden: moeilijke opgave
(gekunsteld, kunstgreep)

Begrijpen: makkelijker

Redeneren

Bewijs: ideale plaats om "schoonheid in de wiskunde" te demonstreren.

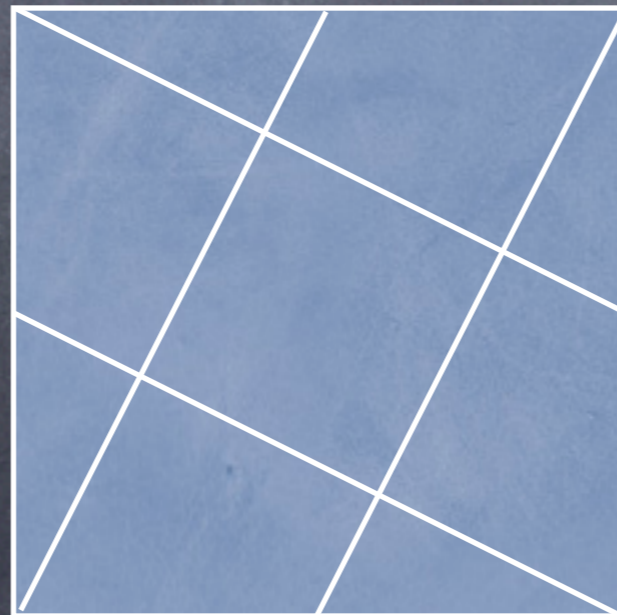
Waar zit die schoonheid?

- * onverwachte (bvb een link)
- * symmetrie
- * eenvoud (hoe technischer, hoe minder mooi)
- * synthetische (hoe minder rekenen, hoe mooier)
- * opeenvolging van korte argumentjes (tic-tac-voetbal)

Redeneren

Voorbeeld: wat is de diameter van de ingeschreven cirkel van een driehoek met zijden 3,4,5?

Wat is de oppervlakte van het kleine vierkant:



Redeneren

Voorbeeld: wat is de diameter van de ingeschreven cirkel van een driehoek met zijden 3,4,5?

Opgave: Wat is mooiste bewijs in secundair onderwijs?

Extra **voorbeeld:** bewijs dat $\sqrt{2}$ irrationaal is
(volgens Stanley Tennenbaum)

Tweede extra **voorbeeld:** het eerste irrationale getal zou wel eens het gulden getal kunnen geweest zijn dank zij ... de pythagoreërs.

Redeneren

Bewijstechnieken

Voor "universele beweringen" $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x))$

* Rechtstreeks bewijs

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}: x < y < 0 \Rightarrow 0 < y^2 < x^2$$

Redeneren

Bewijstechnieken

Voor "universele beweringen" $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x))$

- * Rechtstreeks bewijs
- * Contrapositie $(\neg q(x) \Rightarrow \neg(p(x)))$

$\forall n \in \mathbb{Z}$: is $5n+4$ oneven dan ook n oneven

Redeneren

Bewijstechnieken

Voor "universele beweringen" $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x))$

* Rechtstreeks bewijs

* Contrapositie $(\neg q(x) \Rightarrow \neg(p(x)))$

* Gevallenonderzoek $(p(x) \equiv p_1(x) \vee p_2(x));$

$$p_1(x) \Rightarrow q(x) \wedge p_2(x) \Rightarrow q(x))$$

Als a en b niet-kruisende verschillende rechten zijn, dan zijn ze bevat in een uniek vlak

Redeneren

Bewijstechnieken

Voor "universele beweringen" $(\forall x)(p(x) \Leftrightarrow q(x))$

* Rechtstreeks bewijs

* Wederzijdse implicatie

$$p(x) \Rightarrow q(x) \wedge q(x) \Rightarrow p(x)$$

Redeneren

Bewijstechnieken

Voor "universele beweringen" $(\forall x)(p(x) \Leftrightarrow q(x))$

* Rechtstreeks bewijs

* Wederzijdse implicatie

* Cyclische implicatie (voor $p(x) \Leftrightarrow q(x) \Leftrightarrow r(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow s(x)$)

$$p(x) \Rightarrow q(x) \Rightarrow r(x) \Rightarrow \dots \Rightarrow s(x) \Rightarrow p(x)$$

Redeneren

Bewijstechnieken

Voor "existentiële beweringen" $(\exists x)(p(x))$

* Constructief bewijs

Er bestaat een irrationaal getal

Redeneren

Bewijstechnieken

Voor "existentiële beweringen" $(\exists x)(p(x))$

- * Constructief bewijs
- * Niet-constructief bewijs

Er bestaan irrationale getallen x, y zó dat x^y rationaal is

Redeneren

Bewijstechnieken

Voor "existentiële beweringen" $(\exists x)(p(x))$

- * Constructief bewijs
- * Niet-constructief bewijs

Elke complexe veeltermvergelijking heeft een oplossing

Redeneren

Bewijstechnieken

Algemene techniek: Contradictie, ongerijmde

Toegepast op $p(x) \Rightarrow q(x)$: $\neg q(x) \wedge p(x) \Rightarrow$ Valse uitspraak

Redeneren

Bewijstechnieken

Beweringen van de vorm: $\forall n \in \mathbb{N}: p(n)$

- * Inductie: $p(1) \wedge (p(n) \Rightarrow p(n+1))$
- * Sterke inductie: $\forall n \in \mathbb{N}: p(n)$ volgt uit $p(n-1), \dots, p(1)$
- * Kleinste tegenvoorbeeld: uit het ongerijmde, stel $\exists n \in \mathbb{N}: \neg p(n)$; zij $\neg p(n_0)$, onderstel n minimaal, dan $\forall n \in \mathbb{N}: n < n_0 \Rightarrow p(n)$. Zoek valse uitspraak.

Redeneren

Bewijstechnieken

In meetkunde en combinatoriek

- * Rekenkundig (of algebraïsch) bewijs
- * Conceptueel (of synthetisch) bewijs

voorbeeld: bewijs $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Structureeren

Wiskunde is zelf gestructureerd in grote vakgebieden

- * Algebra
- * Analyse
- * Meetkunde
- * Combinatoriek – kansrekening – statistiek

En in enkele kleinere “hulpgebieden”

- * Goniometrie
- * Logica

Structureeren

Algebra: vakgebied bij uitstek voor abstracte structuren:

groepen, ringen, velden, vectorruimten

Groepen:

- * Abstrahering van permutatiegroepen
- * Inwendige, associatieve bewerking met neutraal element en voor elk element een inverse
- * Cayleytabel: inwendige, neutraal element, inversen; associativiteit is probleem
- * Let op volgorde van theorie en voorbeelden

Structureeren

Algebra: vakgebied bij uitstek voor abstracte structuren:

groepen, ringen, velden, vectorruimten

Ringen, velden

- * Twee bewerkingen

- * Neutraal element voor optelling (nul) speciale rol, noteer goed!

Structureeren

Algebra: vakgebied bij uitstek voor abstracte structuren:

groepen, ringen, velden, vectorruimten

Vectorruimten

- * Drie bewerkingen waarvan twee additieve
- * Hoge abstractie: vroegere ringen worden nu vectorruimten

Dit uitbuiten: dimensie gebruiken als vectorruimte
bewerking gebruiken als ring

Structureeren

Meetkunde: affiene en euclidische meetkunde

Voorbeeld van nut van deze structuren:

* Zwaartelijnen in willekeurige driehoek

Redeneren vs memoriseren

- * Mnemotechnische middeltjes (ezelsbrugjes)
- * Inzichtelijk van buiten leren: ezelsbrugjes uitleggen
- * Oefening baart kunst

Gebruik technische middelen

- * Rekenvaardigheid verhoogt het goed gebruik van een (grafisch) rekentoestel of softwarepakket
- * Kleine berekeningen uit het hoofd
- * Rekenvaardigheden zijn nuttig

Losse flodders

* Verhalen

- historische
- legendes
- sprookjes

Voorbeelden

- Gauss
- schaakspel
- Zeemeerminnen

* Humor

(helpt soms om het abstracte te relativeren)