Constructie van fundamentele distributies in de Clifford Analyse

De Clifford Analyse (CA) bestudeert functies, van $R^n \to Cl$, in de nulruimte (kern) van de Dirac operator ∂. In CA onderscheidt men:

(i) elliptische CA, waarin ∂ de Laplaciaan factoriseert als $\pm\Delta = \partial^2$, en

(ii) ultrahyperbolische CA, waarin ∂ de d'Alembertiaan $\Box_{p,q}$ factoriseert als $\Box_{p,q} = \partial^2$ met (p, q) de in-product signatuur van $R^{p,q}$, $p + q = n$.

De uit (i) resulterende functietheorie is wel bekend [1]. De algemenere functietheorie (ii) omvat (i) (voor $(p, q) = (0, n)$ en $(p, q) = (n, 0)$) en is nog in ontwikkeling. Functietheorie (ii), met $(p, q) = (1, 3)$, is belangrijk voor het oplossen van natuurkundige problemen m.b.v. de CA.

De eerste stap in de opbouw van CA over $R^{p,q}$ is de constructie van een fundamentele distributie f_{x_0} die voldoet aan $\Box_{p,q} f_{x_0} = \delta_{x_0}$, met δ_{x_0} de delta distributie met support $\{x_0 \in R^{p,q}\}$. De tweede stap is de berekening van een Cauchy distributie C_{x_0}, via $C_{x_0} = \partial f_{x_0}$. Een Cauchy distributie fungeert als reproducerende kern in de integraalrepresentaties die men kan afleiden binnen de CA voor de functies in de nulruimte van de Dirac operator. Ingeval $p > 0$ of $q > 0$ is f_{x_0} altijd een singuliere distributie, terwijl in functietheorie (i) f_{x_0} kan behandeld worden als een gewone functie (strict: een reguliere distributie). Dit is de reden waarom functietheorie (ii) van een grotere moeilijkheidsgraad is dan functietheorie (i).

In [2] wordt een interessante methode gegeven voor de berekening van f_{x_0}. Deze methode heeft als voordeel, in tegenstelling tot de klassieke aanpak in [3], [4] e.a., onmiddellijk te leiden tot een expliciete karakterisering van f_{x_0} in de vorm van een integraal voor de functionaalwaarde $\langle f_{x_0}, \varphi\rangle$, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(R^{p,q})$. De auteur claimt daarenboven dat met haar methode ook een fundamentele distributie kan worden gevonden voor tweede orde partiële differentiaalvergelijkingen met niet constante coefficiënten. De bedoeling van dit thesis voorstel is dat de student de methode in [2] evalueert, binnen het kader van functietheorie (ii), en dit op basis van de volgende concrete opdracht:

(i) zich vertrouwd maken met de methode in [2] door een grondige bestudering van dit artikel,

(ii) deze methode toepassen op de vergelijking $\Box_{p,q} f_{x_0} = \delta_{x_0}$, $\forall p, q \in \mathbb{N}$.

Optioneel: (iii) de expliciete integraal voor de functionaalwaarde $\langle C_{x_0}, \varphi\rangle$ afleiden, $\forall p, q \in \mathbb{N}$.

References

[1] F. Brackx, R. Delanghe and F. Sommen, *Clifford analysis*. Pitman, London, 1982.

[2] Y. Fourès-Bruhat, Solution élémentaire d'équations ultra-hyperboliques, J. Math. Pures Appli., 35, p. 277, 1956.

[3] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale Univ. Press, New Haven, 1923.

[4] F. G. Friedlander, *The Wave Equation on a Curved Space-Time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975.

2014-02-16
Ghislain Franssens

Dr. ir. Ghislain R. Franssens
Belgian Institute for Space Aeronomy
Ringlaan 3, B-1180 Brussels
Tel: +32 (0)2 373 0370
Fax: +32 (0)2 374 8423
E-mail: ghislain.franssens@aeronomy.be

Web: http://www.aeronomy.be/