

Les Formele Logica 23 - 04 - 2004

Benjamin De Leeuw

Departement Zuivere Wiskunde en Computer Algebra
Galglaan 2, B-9000 Gent
bdeleeuw@cage.ugent.be
Gent University, Belgium

April 23, 2004

1 Doelstelling

1. Tableaumethode voor een Predikaatlogica
2. Oefeningen op Semantische Tableau's
3. Oefeningen op Deductiecalculus **PRED**_C
4. FLIPO : Formele Logica in Prologomgeving voor **PRED**_C
5. Oefeningen op het Gebruik van FLIPO

2 Tableaumethode voor een Predikaatlogica

- We zoeken een tegenvoorbeeld voor een sequent $\alpha_1, \dots, \alpha_n \triangleright \beta_1, \dots, \beta_m$
- Een tegenvoorbeeld is een valuatie waarbij

$$\mathcal{V}_i(\alpha_1) = \dots = \mathcal{V}_i(\alpha_n) = 1 \text{ en } \mathcal{V}_i(\beta_1) = \dots = \mathcal{V}_i(\beta_m) = 0$$

- We construeren gaandeweg een domein en valuatie $\mathcal{V}_i$ voor het tegenvoorbeeld
- ... op basis van de nieuwe reductieregel $\forall_R$
- We voeren ook een reductieregel $\forall_L$ in.
- Verder blijft alles zoals bij de tableaumethode van de propositielogica
- Opgelet:
 - indien er geen keuze voor een eerste domeinelement, ga er dan van uit dat het domein minimum één element bevat, voeg nadien nieuwe elementen toe, maar let op voor

- ... nooit uitwerkende $\forall_L$ -regels (domein wordt steeds vergroot), geven aanleiding tot oneindige takken, deze leiden tot een *open* tableau
- denk aan het bereik van quantoren
- relaties of predikaten hebben een signatuur, vraag steeds na indien niet gespecificeerd, dit bepaalt de keuze van de domeinen (zie voorbeeld 5 en 6)
- De deductiecalculus wordt overeenkomstig uitgebreid met deductieregels voor de quantoren
- Opgelet:
 - sommige deductieregels hebben voorwaarden om consistent toegepast te worden, deze voorwaarden vormen deel van de redenering en worden in elke stap meegerekend
 - ga steeds eerst na of de voorwaarde(n) van een deductieregel vervuld zijn vooraleer deze toe te passen
 - dit is vooral belangrijk bij het afleiden van nieuwe deductieregels (waarbij er soms voorwaarden op L of R gelegd worden)
- Ook het programma FLIPO ondersteunt deze predikaat-deductiecalculus
- Sluit FLIPO steeds af met ‘halt.’

3 Oefeningen op Semantische Tableau's

4 Oefeningen op Deductiecalculus $\mathbf{PRED}_C$

Ga de betrouwbaarheid na van volgende uitspraken, geef een tegenvoorbeeld of bewijs in de deductiecalculus $\mathbf{PRED}_C$:

1. $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \exists x p(x) \vdash \exists x q(x)$
2. $\vdash \forall x(((p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \rightarrow r(x)))) \rightarrow (p(x) \rightarrow r(x))$
3. $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \neg \exists x q(x) \vdash \neg \exists x p(x)$
4. $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \neg \exists x p(x) \vdash \neg \exists x q(x)$
5. $\exists x \neg p(x) \vdash \forall x(\forall y(s(x, y) \rightarrow p(x)) \rightarrow \forall y s(x, y))$
6. $\forall x \forall y((p(x) \wedge q(y)) \rightarrow r(x, y)), \forall x \neg r(x, x), \forall x(p(x) \vee q(x)) \vdash \forall x \forall y(r(x, y) \rightarrow p(x))$

4.1 Voorbeeld 1

$$\begin{array}{c}
\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \exists x p(x) \triangleright \exists x q(x) \\
| \\
\forall x \neg(p(x) \wedge \neg q(x)), \neg \forall x \neg p(x) \triangleright \neg \forall x \neg q(x) \\
| \\
\forall x \neg(p(x) \wedge \neg q(x)), \forall x \neg q(x) \triangleright \forall x \neg p(x) \\
| \\
\forall x \neg(p(x) \wedge \neg q(x)), \forall x \neg q(x) \triangleright \neg p(d) \quad D_s = \{d\} \\
| \\
\neg(p(d) \wedge \neg q(d)), \neg q(d) \triangleright \neg p(d) \\
| \\
p(d) \triangleright (p(d) \wedge \neg q(d)), q(d) \\
\wedge \\
p(d) \triangleright p(d), q(d) \quad \perp \qquad p(d) \triangleright \neg q(d), q(d) \\
\qquad \qquad \qquad | \\
\qquad \qquad \qquad p(d), q(d) \triangleright q(d) \\
\qquad \qquad \qquad \perp
\end{array}$$

Voorbeeld 4.1 geeft ons een gesloten tableau. Bijgevolg is uitdrukking 4.1 geldig. Met de adequaatheid van de tableaumethode ($L \models \alpha$ asa er bestaat een gesloten semantisch tableau voor $L \triangleright \alpha$) is voorbeeld 4.1 een betrouwbare uitspraak. We bewijzen in **PRED_C**:

- | | | |
|-----|--|-----------------------|
| (1) | $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \vdash \forall(p(x) \rightarrow q(x))$ | (A) |
| (2) | $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \vdash p(x) \rightarrow q(x)$ | (G(1)) |
| (3) | $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), p(x) \vdash q(x)$ | (IEl(2)) |
| (4) | $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \exists p(x) \vdash \exists q(x)$ | (GP _x (3)) |

4.2 Voorbeeld 2

$$\begin{array}{c}
\triangleright \forall x(((p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \rightarrow r(x))) \rightarrow (p(x) \rightarrow r(x))) \\
| \\
\triangleright ((p(d) \rightarrow q(d)) \wedge (q(d) \rightarrow r(d))) \rightarrow (p(d) \rightarrow r(d)) \\
| \\
(p(d) \rightarrow q(d)) \wedge (q(d) \rightarrow r(d)) \triangleright (p(d) \rightarrow r(d)) \\
| \\
(p(d) \rightarrow q(d)), (q(d) \rightarrow r(d)) \triangleright (p(d) \rightarrow r(d)) \\
| \\
(p(d) \rightarrow q(d)), (q(d) \rightarrow r(d)), p(d) \triangleright r(d) \\
\wedge \\
(q(d) \rightarrow r(d)), p(d) \triangleright r(d), p(d) \quad q(d), (q(d) \rightarrow r(d)), p(d) \triangleright r(d) \\
\wedge \qquad \qquad \qquad \wedge \\
p(d) \triangleright r(d), p(d), q(d) \quad \perp \qquad r(d), p(d) \triangleright r(d), p(d) \quad \perp \qquad q(d), p(d) \triangleright r(d), q(d) \quad \perp \qquad q(d), r(d), p(d) \triangleright r(d) \quad \perp \\
\qquad \qquad \qquad D_s = \{d\}
\end{array}$$

Deductiebewijs:

- | | | |
|------|--|-------------|
| (1) | $r(x), \neg p(x) \vdash r(x)$ | (Aex) |
| (2) | $r(x), q(x) \vdash r(x)$ | (Aex) |
| (3) | $p(x), \neg p(x) \vdash \neg q(x) \rightarrow r(x)$ | (XQ_1) |
| (4) | $q(x), \neg q(x) \vdash p(x) \rightarrow r(x)$ | (XQ_1) |
| (5) | $p(x), \neg p(x), \neg q(x) \vdash r(x)$ | $(IEl(3))$ |
| (6) | $q(x), \neg q(x), p(x) \vdash r(x)$ | $(IEl(4))$ |
| (7) | $\neg q(x), p(x), (p(x) \rightarrow q(x)) \vdash r(x)$ | $(I(5, 6))$ |
| (8) | $r(x), (p(x) \rightarrow q(x)) \vdash r(x)$ | $(I(1, 2))$ |
| (9) | $(p(x) \rightarrow q(x)), (q(x) \rightarrow r(x)), p(x) \vdash r(x)$ | $(I(7, 8))$ |
| (10) | $(p(x) \rightarrow q(x)), (q(x) \rightarrow r(x)) \vdash (p(x) \rightarrow r(x))$ | $(I_1(9))$ |
| (11) | $(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \rightarrow r(x)) \vdash (p(x) \rightarrow r(x))$ | $(AnU(10))$ |
| (12) | $\vdash ((p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \rightarrow r(x))) \rightarrow (p(x) \rightarrow r(x))$ | $(I_1(11))$ |
| (13) | $\vdash \forall x((p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \rightarrow r(x))) \rightarrow (p(x) \rightarrow r(x))$ | $(G_x(12))$ |

4.3 Voorbeeld 3

$$\begin{array}{c}
\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \neg \exists x q(x) \triangleright \neg \exists x p(x) \\
| \\
\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \forall x \neg q(x) \triangleright \forall x \neg p(x) \\
| \\
\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \forall x \neg q(x) \triangleright \neg p(d) \quad D_s = \{d\} \\
| \\
\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \forall x \neg q(x), p(d) \triangleright \\
| \\
(p(d) \rightarrow q(d)), \neg q(d), p(d) \triangleright \\
| \\
(p(d) \rightarrow q(d)), p(d) \triangleright q(d) \\
/\backslash \\
p(d) \triangleright q(d), p(d) \quad q(d), p(d) \triangleright q(d) \\
\perp \qquad \qquad \qquad \perp
\end{array}$$

Deductiebewijs:

- | | | |
|-----|--|----------------|
| (1) | $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \exists p(x) \vdash \exists q(x)$ | $(Voorbeeld1)$ |
| (2) | $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \neg \exists q(x) \vdash \neg \exists p(x)$ | $(CoPo_1(1))$ |

4.4 Voorbeeld 4

$$\begin{array}{c}
\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \neg \exists x p(x) \triangleright \neg \exists x q(x) \\
| \\
\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \forall x \neg p(x) \triangleright \forall x \neg q(x) \\
| \\
\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \forall x \neg p(x) \triangleright \neg q(d) \quad D_s = \{d\} \\
| \\
\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \forall x \neg p(x), q(d) \triangleright \\
| \\
(p(d) \rightarrow q(d)), \neg p(d), q(d) \triangleright \\
| \\
(p(d) \rightarrow q(d)), q(d) \triangleright p(d) \\
/\backslash \\
q(d) \triangleright p(d), p(d) \quad q(d), q(d) \triangleright p(d) \\
\times \quad \times
\end{array}$$

Voorbeeld 4.4 geeft ons een eindig open tableau. Bijgevolg is uitdrukking 4.4 niet geldig. Het is geen betrouwbare uitspraak. We kunnen bijgevolg geen bewijs leveren in **PRED_C**.
Tegenvoorbeeld : $D_s = \{d\}$, $p(d) = \perp$, $q(d) = \top$

4.5 Voorbeeld 5

$$\begin{array}{c}
\exists x \neg p(x) \triangleright \forall x (\forall y (s(x, y) \rightarrow p(x)) \rightarrow \forall y s(x, y)) \\
| \\
\neg \forall x p(x) \triangleright \forall x (\forall y (s(x, y) \rightarrow p(x)) \rightarrow \forall y s(x, y)) \\
| \\
\triangleright \forall x p(x), \forall x (\forall y (s(x, y) \rightarrow p(x)) \rightarrow \forall y s(x, y)) \\
| \\
\triangleright p(d_1), \forall x (\forall y (s(x, y) \rightarrow p(x)) \rightarrow \forall y s(x, y)) \quad D_{s_1} = \{d_1\} \\
| \\
\triangleright p(d_1), (\forall y (s(d_2, y) \rightarrow p(d_2)) \rightarrow \forall y s(d_2, y)) \quad D_{s_1} = \{d_1, d_2\} \\
| \\
\forall y (s(d_2, y) \rightarrow p(d_2)) \triangleright p(d_1), \forall y s(d_2, y) \\
| \\
\forall y (s(d_2, y) \rightarrow p(d_2)) \triangleright p(d_1), s(d_2, e_1) \quad D_{s_1} = \{d_1, d_2\} \quad D_{s_2} = \{e_1\} \\
| \\
s(d_2, e_1) \rightarrow p(d_2) \triangleright p(d_1), s(d_2, e_1) \\
/\backslash \\
\triangleright s(d_2, e_1), p(d_1), s(d_2, e_1) \quad p(d_2) \triangleright p(d_1), s(d_2, e_1) \\
\times \quad \times
\end{array}$$

Tegenvoorbeeld : $D_{s_1} = \{d_1, d_2\}$, $D_{s_2} = \{e_1\}$, $(d_2, e_1) \notin s$, $p(d_1) = \perp$, $p(d_2) = \top$

4.6 Voorbeeld 6

$$\begin{array}{c} \forall x \forall y ((p(x) \wedge q(y)) \rightarrow r(x, y)), \forall x \neg r(x, x), \forall x (p(x) \vee q(x)) \triangleright \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow p(x)) \\ F := \forall x \forall y ((p(x) \wedge q(y)) \rightarrow r(x, y)) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ F, \forall x \neg r(x, x), \forall x (p(x) \vee q(x)) \triangleright \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow p(x)) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ F, \forall x \neg r(x, x), \forall x (p(x) \vee q(x)) \triangleright \forall y (r(d_1, y) \rightarrow p(d_1)) \\ D_s = \{d_1\} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ F, \forall x \neg r(x, x), \forall x (p(x) \vee q(x)) \triangleright r(d_1, d_2) \rightarrow p(d_1) \\ D_s = \{d_1, d_2\} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ F, \forall x \neg r(x, x), \forall x (p(x) \vee q(x)), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ F, \neg r(d_1, d_1), \neg r(d_2, d_2), (p(d_1) \vee q(d_1)), (p(d_2) \vee q(d_2)), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ F, (p(d_1) \vee q(d_1)), (p(d_2) \vee q(d_2)), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \end{array}$$

...

$$1. F, p(d_1), (p(d_2) \vee q(d_2)), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2)$$

$$(a) F, p(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dashv$$

$$(b) F, p(d_1), q(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dashv$$

$$2. F, q(d_1), (p(d_2) \vee q(d_2)), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2)$$

$$(a) F, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$$

$$(b) F, q(d_1), q(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$$

$$\begin{array}{c} F, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \\ F := \forall x \forall y ((p(x) \wedge q(y)) \rightarrow r(x, y)) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ \forall x \forall y ((p(x) \wedge q(y)) \rightarrow r(x, y)), q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \\ D_s = \{d_1, d_2\} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ (p(d_1) \wedge q(d_1)) \rightarrow r(d_1, d_1), (p(d_1) \wedge q(d_2)) \rightarrow r(d_1, d_2), \\ (p(d_2) \wedge q(d_1)) \rightarrow r(d_2, d_1), (p(d_2) \wedge q(d_2)) \rightarrow r(d_2, d_2), \\ q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \end{array}$$

$$F_{11} := (p(d_1) \wedge q(d_1)) \rightarrow r(d_1, d_1)$$

$$F_{12} := (p(d_1) \wedge q(d_2)) \rightarrow r(d_1, d_2)$$

$$F_{21} := (p(d_2) \wedge q(d_1)) \rightarrow r(d_2, d_1)$$

$$F_{22} := (p(d_2) \wedge q(d_2)) \rightarrow r(d_2, d_2)$$

$$\begin{array}{c} | \\ F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \end{array}$$

...

1. $r(d_1, d_1), F_{12}, F_{21}, F_{22}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \neg$
2. $F_{12}, F_{21}, F_{22}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_1) \wedge q(d_1)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$
3. $F_{11}, r(d_1, d_2), F_{21}, F_{22}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$
4. $F_{11}, F_{21}, F_{22}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_1) \wedge q(d_2)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$
5. $F_{11}, F_{12}, r(d_2, d_1), F_{22}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$
6. $F_{11}, F_{12}, F_{22}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_2) \wedge q(d_1)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$
7. $F_{11}, F_{12}, F_{21}, r(d_2, d_2), q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \neg$
8. $F_{11}, F_{12}, F_{21}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_2) \wedge q(d_2)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$

We gaan verder met het uitwerken per tak:

1. $F_{12}, F_{21}, r(d_2, d_2), q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_1) \wedge q(d_1)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \neg$
2. $F_{12}, F_{21}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_2) \wedge q(d_2)), (p(d_1) \wedge q(d_1)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$
3. $F_{11}, r(d_1, d_2), F_{21}, r(d_2, d_2), q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \neg$
4. $F_{11}, r(d_1, d_2), F_{21}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_2) \wedge q(d_2)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$
5. $F_{11}, F_{21}, r(d_2, d_2), q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_1) \wedge q(d_2)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \neg$
6. $F_{11}, F_{21}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_2) \wedge q(d_2)), (p(d_1) \wedge q(d_2)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$
7. $F_{11}, F_{12}, r(d_2, d_1), r(d_2, d_2), q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \neg$
8. $F_{11}, F_{12}, r(d_2, d_1), q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_2) \wedge q(d_2)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$
9. $F_{11}, F_{12}, r(d_2, d_2), q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_2) \wedge q(d_1)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \neg$
10. $F_{11}, F_{12}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_2) \wedge q(d_2)), (p(d_2) \wedge q(d_1)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$
11. $r(d_1, d_1), F_{12}, F_{21}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_2) \wedge q(d_2)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \neg$
12. $F_{12}, F_{21}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_1) \wedge q(d_1)), (p(d_2) \wedge q(d_2)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$

Uit 4,6,8 en 10 en nog open takken 2 en 12 :

1. $r(d_1, d_1), r(d_1, d_2), F_{21}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_2) \wedge q(d_2)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \neg$
2. $r(d_1, d_2), F_{21}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_1) \wedge q(d_1)), (p(d_2) \wedge q(d_2)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$
3. $r(d_1, d_1), F_{21}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_2) \wedge q(d_2)), (p(d_1) \wedge q(d_2)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \neg$
4. $F_{21}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_1) \wedge q(d_1)), (p(d_2) \wedge q(d_2)), (p(d_1) \wedge q(d_2)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \dots$
5. $r(d_1, d_1), F_{12}, r(d_2, d_1), q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_2) \wedge q(d_2)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \quad \neg$

6. $F_{12}, r(d_2, d_1), q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_1) \wedge q(d_1)), (p(d_2) \wedge q(d_2)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \dots$
7. $r(d_1, d_1), F_{12}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_2) \wedge q(d_2)), (p(d_2) \wedge q(d_1)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \neg$
8. $F_{12}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_1) \wedge q(d_1)), (p(d_2) \wedge q(d_2)), (p(d_2) \wedge q(d_1)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \dots$
9. $F_{12}, F_{21}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_2) \wedge q(d_2)), (p(d_1) \wedge q(d_1)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \dots$
10. $F_{12}, F_{21}, q(d_1), p(d_2), r(d_1, d_2) \triangleright (p(d_1) \wedge q(d_1)), (p(d_2) \wedge q(d_2)), p(d_1), r(d_1, d_1), r(d_2, d_2) \dots$

Ga uit deze reeks de nog open takken (aangegeven met ...) na op sluiting. Probeer op het zicht te zien of er takken zullen zijn die niet sluiten. Indien alle takken sluiten is het tableau gesloten en kan een deductiebewijs worden opgesteld voor de uitdrukking.

We zien in deze oefening duidelijk het nut van een computerprogramma dat ons bijstaat in het redeneren en bij het rekenen. Extra Opgave: schrijf een javaprogramma dat de tableaumethode voor **PRED_C** implementeert. Kan je vanuit een opgesteld tableau nog steeds een deductiebewijs construeren? Ga na welke deductieregels je hierbij zou hanteren overeenkomstig de $\forall_L$ $\forall_R$ tableauregels.

4.7 Tarski's World

Ga volgende formules na op vervulbaarheid in Tarski's World, stel een wereld op waarin volgende uitspraken apart waar zijn:

1. $\forall x(Tet(x) \rightarrow Large(x)), \exists x Tet(x) \vdash \exists x Large(x)$
2. $\forall x(Cube(x) \rightarrow Small(x)), \neg \exists x Small(x) \vdash \neg \exists x Cube(x)$
3. $\forall x(Dodec(x) \rightarrow Large(x)), \neg \exists x Dodec(x) \vdash \neg \exists x Large(x)$
4. $\exists x \neg Cube(x) \vdash \forall x(\forall y(FrontOf(x, y) \rightarrow Cube(x)) \rightarrow \forall y FrontOf(x, y))$
5. $\forall x \forall y((Cube(x) \wedge Small(y)) \rightarrow LeftOf(x, y)), \forall x \neg LeftOf(x, x), \forall x(Cube(x) \vee Small(x)) \vdash \forall x \forall y(LeftOf(x, y) \rightarrow Cube(x))$

Vragen:

1. Kan je voor elke van deze formules een wereld construeren waarin de formule bewijsbaar is? Voor welke wel/niet?
2. Wat is het verband met voorbeelden 1-6?
3. Stel een Tarski's World formule op voor

$$\vdash \forall x(((p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \rightarrow r(x))) \rightarrow (p(x) \rightarrow r(x)))$$

wat stel je vast?

4. Bewijs opgave 1 met tableau en deductie.

5 FLIPO : Formele Logica in Prologomgeving

FLIPO werd reeds besproken in de les van 05-03. Overeenkomstig de predikaatlogica werden nieuwe symbolen ingevoerd:

$p \in \Pi_\phi$	$f(p)$
$\alpha \in \Pi_\phi$	$f(alfa)$
L	$l(lijst)$
L_1	$l(lijst1)$
x	$v(x)$
$a \in \Omega_{\phi,s}$	$c(a)$
$t \in < term >$	$t(t)$
$t_1 \in < term >$	$t(t1)$
$f(t_1, t_2, t_3) \in \Omega_{s_1 s_2 s_3, s}$	$fun(f, [t(t1), t(t2), t(t3)])$
$p(t_2, t_4) \in \Pi_{s_1, s_2}$	$pred(p, [t(t2), t(t4)])$

$p \wedge q$	$a(f(p), f(q))$	$f(p) \& f(q)$
$p \vee q$	$o(f(p), f(q))$	$f(p) v f(q)$
$p \rightarrow q$	$i(f(p), f(q))$	$f(p) - - - > f(q)$
$p \leftrightarrow q$	$e(f(p), f(q))$	$f(p) < - - - > f(q)$
$\neg p$	$n(f(p))$	$\sim f(p)$
p, q	$[f(p), f(q)]$	
L, p	$[l(lijst), f(p)]$	
$\forall xp(x)$	$alle(v(x), pred(p, [v(x)]))$	
$\exists xp(x)$	$er_is(v(x), pred(p, [v(x)]))$	
$t_1 = t_2$	$e(t(t1), t(t2))$	$t(t1) := t(t2)$
$f(t_1, t_2) = g(t_3)$		$fun(f, [t(t1), t(t2)]) := fun(g, [t(t3)])$

$\alpha \wedge \beta$	$a(f(alfa), f(beta))$	$f(alfa) \& f(beta)$
$\alpha \vee \beta$	$o(f(alfa), f(beta))$	$f(alfa) v f(beta)$
$\alpha \rightarrow \beta$	$i(f(alfa), f(beta))$	$f(alfa) - - - > f(beta)$
$\alpha \leftrightarrow \beta$	$e(f(alfa), f(beta))$	$f(alfa) < - - - > f(beta)$
$\neg \alpha$	$n(f(alfa))$	$\sim f(alfa)$
α, β	$[f(alfa), f(beta)]$	
L, α	$[l(lijst), f(alfa)]$	
$\forall x \alpha$	$alle(v(x), f(alfa))$	
$\exists x \alpha$	$er_is(v(x), f(alfa))$	

En met P, Q formules uit de bovenstaande lijst of onderstaande lijst

$P \wedge Q$	$a(P, Q)$	$P \& Q$
$P \vee Q$	$o(P, Q)$	$P v Q$
$P \rightarrow Q$	$i(P, Q)$	$P - - - > Q$
$P \leftrightarrow Q$	$e(P, Q)$	$P < - - - > Q$
$\neg P$	$n(P)$	$\sim P$
$\forall x P$	$alle(v(x), P)$	
$\exists x P$	$er_is(v(x), P)$	

De syntaxis van een deductieregel blijft dezelfde als voorheen. Wel zijn er enkele nieuwe deductieregels toegevoegd aan de file **d_regels.pl** voor de quantoren en de gelijkheid. De naamgeving is consistent met deze in de cursus. Sommige bewijzen kunnen enkel onder bepaalde voorwaarden geschieden. Bovenaan, boven het deductiebewijs zoals in de propositielogica, kan men één of meerdere regels van de vorm:

$$voorwaarde(niet_vrij(v(x), l(lijst))).$$

plaatsen om dit aan te geven. De syntaxis van deze voorwaarden-regels is:

$$\begin{array}{ll} [t/x]t_1 = t_2 & voorwaarde(vervang(v(x), t(t), t(t1), t(t2))). \\ [t/x]a = b & voorwaarde(sub_f(v(x), t(t), f(a), f(b))). \\ [t/x]L_1 = L_2 & voorwaarde(sub_f(v(x), t(t), l(lijst1), l(lijst2))). \\ x \notin VV(\alpha) & voorwaarde(niet_vrij(v(x), f(alpha))). \\ x \notin VV(L_1) & voorwaarde(niet_vrij(v(x), l(lijst1))). \\ x \notin t & voorwaarde(niet_in(v(x), t(t))). \end{array}$$

6 Oefeningen op het Gebruik van FLIPO

1. Open de file **ggx.pl** en bestudeer de syntaxis van FLIPO voor de predikaatlogica
2. Ga na mbv FLIPO of de bewijzen voor voorbeelden 1,2,3 en 6 correct zijn