

Benjamin De Leeuw

Departement Zuivere Wiskunde en Computer Algebra
Galglaan 2, B-9000 Gent
bdeleeuw@cage.ugent.be
Gent University, Belgium

November 30, 2004

1 Inleiding

1.1 Doelstelling

In deze praktische lessen voor het vak Herschrijfsystemen, zal een inleiding gegeven worden op de software-tool CoCoA. Deze tool berekent voor ons *reducties* en *grobnerbasisen* voor polynomen. We gebruiken de theorie uit hoofdstuk 8 van de cursus bij dit vak.

1.2 Opstarten en Afsluiten

Start CoCoA op onder Linux door op het icoontje te klikken. Er verschijnt een venster dat in twee delen is verdeeld. Bovenaan staat het outputvenster, onderaan het inputvenster. Geeft de commando's in, in het inputvenster, bekijk het resultaat in het outputvenster. De output kan bewaard worden als tekstbestand door *save output* te selecteren in de menu. Sluit CoCoA af door het venster te sluiten of exit te selecteren in de menu.

1.3 Commando's

Een commando wordt ingegeven in het inputvenster, en wordt gevolgd door een puntkomma. Om een commando of reeks van commando's, gescheiden door puntkomma's uit te voeren, drukt men op *control-enter*. We gebruiken slechts enkele commando's in deze lessen:

$$\begin{aligned} \textit{Use } R &::= Q[x, y, z]; \\ \textit{Use } R &::= Q[y[1..3], z[1..2]]; \\ \textit{Use } R &::= Q[x, y, z], \textit{Lex}; \\ \textit{Use } R &::= Q[x, y, z], \textit{Xel}; \\ \textit{Use } R &::= Q[x, y, z], \textit{DegLex}; \\ \textit{Use } R &::= Q[x, y, z], \textit{DegRevLex}; \end{aligned}$$

De eerste in te voeren regel bepaalt de *ring met eenheidselement*, de gebruikte *variabelen* en de *polynoomordening* waarover we willen werken. Het commando bestaat uit een *Use* gevolgd door $R ::= \dots$. Hiermee definiëren we R . We werken steeds over $\mathbb{Q}$, dus we zullen steeds R definiëren als $R ::= Q[\dots]$. Op de plaats van de $\dots$ vertellen we aan CoCoA welke variabelenamen we willen gebruiken. We doen dit op twee manieren naargelang het aantal benodigde variabelen: $[x, y, z]$ of $[y[1..3], z[1..2]]$, waarbij de variabelen in de te beschouwen polynomen genoteerd worden als x, y, z respectievelijk $y[1], y[2], y[3], y[4], z[1], z[2]$. Het laatste gedeelte van dit commando geeft de ordening aan. De betekenis van de huidige ordening kan in matrixvorm (zie theoriecursus) worden opgevraagd met het commando

$$Ord();$$

We definiëren een polynoom met het commando:

$$P1 := \dots;$$

Op de plaats van de $\dots$ schrijven we een polynoom in de gedeclareerde variabelen met de gewoonlijke notatie voor operatoren:

$$\begin{array}{ll} x + y & \Rightarrow x + y \\ x_1 - y_2 & \Rightarrow x[1] - y[2] \\ xy & \Rightarrow xy \\ x^2 & \Rightarrow x \wedge 2 \end{array}$$

Ook haakjes kunnen naar believen gebruikt worden. Een lijst of verzameling van polynomen definiëren we op volgende manier:

$$I := [x + y, x - y];$$

of

$$\begin{array}{l} P1 := x + y; \\ P2 := x - y; \\ I := [P1, P2]; \end{array}$$

Een polynoom toevoegen aan een lijst of verzameling gebeurt als volgt:

$$I := [x, y];$$

$$\begin{array}{l} P1 := x + y; \\ P2 := x - y; \\ Append(I, P1); \\ Append(I, P2); \end{array}$$

$$\text{resultaat : } I \equiv [x, y, x + y, x - y]$$

Een polynoom of lijst kan worden opgevraagd met het commando:

$$\begin{array}{l} P1; \\ I; \end{array}$$

De enige operationele commando's die we zullen gebruiken zijn:

$$\begin{aligned} &NR(P1, P2); \\ &NR(P1, I); \\ &NR(Spoly(P1, P2), I); \\ &GBasis(Ideal([P1, P2, P3])); \\ &ReducedGBasis(Ideal([P1, P2, P3])); \end{aligned}$$

$NR(-, -)$ staat in de cursus beschreven als **Reduce**(p, Q), waarbij het eerste argument een polynoom is, en het tweede argument een ander polynoom, of een lijst van polynomen. De rest van de commando's hebben dezelfde naamgeving en betekenis als in de cursus. Vergeet het te beschouwen ideaal niet tussen $Ideal()$ te plaatsen. We zullen nu met deze commando's enerzijds het Buchberger-algoritme manueel uitvoeren (gebruikmakend van $NR(-, -)$) en zullen het anderzijds controleren met de commando's $GBasis$ of $ReducedGBasis$.

2 Opgave 1

Beschouw $G \equiv \{P_1, P_2, P_3\} \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$ met

$$\begin{aligned} P_1 &:= y^2 + yz - 2z \\ P_2 &:= y^2 + 2xy + z \\ P_3 &:= xy + yz - z \end{aligned}$$

1. Zoek een Gröbnerbasis van G voor de termordening Lex met behulp van het vereenvoudigde *Buchberger algoritme*. Gebruik hiervoor CoCoA.
2. Vergelijk met **GBasis**(**Ideal**(P_1, P_2, P_3)) uit CoCoA en verklaar.

3 Opgave 2

Beschouw $H \equiv \{P_1, P_2, P_3\} \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$ met

$$\begin{aligned} P_1 &:= y^2 + yz - 2 \\ P_2 &:= y^2 + 2xy + 1 \\ P_3 &:= xy + yz - 1 \end{aligned}$$

1. Zoek een Gröbnerbasis van H voor de termordening $DegLex$ met behulp van het vereenvoudigde *Buchberger algoritme*. Gebruik hiervoor CoCoA.
2. Vergelijk met **ReducedGBasis**(**Ideal**(P_1, P_2, P_3)) uit CoCoA en verklaar.

4 Opgave 3

Beschouw $I \equiv \{P_1, P_2, P_3, P_4\} \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$ met

$$\begin{aligned} P_1 &:= x^2z + 2xz + z^2 \\ P_2 &:= xz + y^2 \\ P_3 &:= 2x^2z + 3xz - y^2 + 2z^2 \\ P_4 &:= -x^3z - 2x^2z - xz^2 + xz + y^2 \end{aligned}$$

1. Zoek een gereduceerde monische Gröbnerbasis van I voor de termordening *Deg-Lex* met behulp van het vereenvoudigde *Buchberger algoritme*. Gebruik hiervoor CoCoA.
2. Vergelijk met **ReducedGBasis(Ideal(P_1, P_2, P_3, P_4))** uit CoCoA en verklaar.

5 Opgave 4

Beschouw volgende stelling uit de euclidische meetkunde :

Gegeven 3 rechten A, B, C . Indien 2 van de rechten, A en B , de 3de rechte C snijden onder een loodrechte hoek, zijn de 2 rechten A en B evenwijdig.

1. Maak een meetkundige constructie en stel de benodigde polynoomuitdrukkingen op om de stelling te bewijzen met behulp van Gröbnerbasissen.
2. Gebruik CoCoA om de stelling te bewijzen.

6 Opgave 5

Beschouw volgende stelling uit de euclidische meetkunde :

Een driehoek waarbij de middelloodlijn door het overstaande hoekpunt gaat is een gelijkbenige driehoek.

1. Maak een meetkundige constructie en stel de benodigde polynoomuitdrukkingen op om de stelling te bewijzen met behulp van Gröbnerbasissen.
2. Gebruik CoCoA om de stelling te bewijzen.

7 Opgave 6

Beschouw volgende stelling uit de euclidische meetkunde :

Gegeven een cirkel C met middelpunt o en twee raaklijnen A en B door een punt p buiten de cirkel, aan de cirkel C , met snijpunten aan C , p_A en p_B respectievelijk. De rechten $\langle o, p_A \rangle$ en $\langle o, p_B \rangle$ staan loodrecht op respectievelijk A en B .

1. Maak een meetkundige constructie en stel de benodigde polynoomuitdrukkingen op om de stelling te bewijzen met behulp van Gröbnerbasissen.
2. Gebruik CoCoA om de stelling te bewijzen.