

ToFoLo2 Les 06-12-2006

Benjamin De Leeuw

Departement Zuivere Wiskunde en Computer Algebra
Galglaan 2, B-9000 Gent
Benjamin.DeLeeuw@UGent.be
Gent University, Belgium

December 7, 2006

1 Lesmateriaal

- Theorie : Logica voor Informatica - 3de editie, J.F.A.K. van Benthem. (LVI)
- Oefeningen : Language Proof and Logic, J. Barwise, J. Etchemendy. (LPL)

2 Deze Week

- *Intermezzo* LVI p. 230 - 232 : Hoare Calculus (Herhaling)
- *Intermezzo* LVI p. 197 - 213 : Modale Logica

3 Hoare Calculus

1. Bewijs in Hoare Calculus:
 $\{x > 0\}$
 $[z := x; y := 2z]$
 $\{x < y\}$
2. Bewijs in Hoare Calculus:
 $\{x = 3 \wedge y = 5\}$
 $[if(x < y, [z := y - x], [z := x - y])]$
 $\{z = 2\}$
3. Bewijs in Hoare Calculus:
 $\{x = 13 \wedge y = 11\}$
 $[if(x = y, [z := y], [z := (x - y)/2])]$
 $\{z = 1\}$

4. Bewijs in Hoare Calculus:

$$\{x > 0\}$$

$$[y := 0; z := x; \text{while}(y + z(z+1)/2 = x(x+1)/2, \neg(z = 0), [y := y + z; z := z - 1])]$$

$$\{y = x(x+1)/2\}$$

5. Bewijs in Hoare Calculus:

$$\{x \geq 0\}$$

$$[y := 0; z := x; \text{while}(y + (z+1)^2 = (x+1)^2, \neg(z = 0), [y := y + (2z+1); z := z - 1]); y := y + 1]$$

$$\{y = (x+1)^2\}$$

6. Bewijs in Hoare Calculus:

$$\{x > 0\}$$

$$[y := 0; z := x; \text{while}(y + z(z+1)/2 \leq x^2, \neg(z = 0), [y := y + z; z := z - 1])]$$

$$\{y \leq x^2\}$$

Opmerking : de variabele y kan later in het programma gebruikt worden om een array datastructuur van grootte x^2 aan te spreken. We bewijzen dan met deze oefening dat er geen overflow optreedt.

7. Bewijs in Hoare Calculus:

$$\{x > 0\}$$

$$[\text{while}(y/z = 1/x, z > 1, [y := y(1 - 1/z); z := z - 1])]$$

$$\{y = 1/x\}$$

8. Een specificatie van een functie $Sommer(n)$:

$$Sommer(0) = 0$$

$$Sommer(k+1) = Sommer(k) + (k+1)$$

Volgende programma implementeert deze functie, bewijs deze claim in Hoare Calculus:

```
natural sommer(natural n)
{
  natural sum := 0;
  natural count := 0;
  while(count < n)
  {
    count := count + 1;
    sum := sum + count;
  }
  return sum;
}
```

9. Een specificatie van een functie $n!$:

$$1! = 1$$

$$k! = (k-1)! \cdot k$$

Volgende programma implementeert deze functie, bewijs deze claim in Hoare Calculus:

```

natural faculteit(natural n)
{
  natural fac := 1;
  natural count := n;
  while(count > 0)
  {
    fac := fac * count;
    count := count - 1;
  }
  return fac;
}

```

10. * Bewijs in Hoare Calculus:

```

{x > 0}
[y := 0; z := x; while( $\exists u \exists v (y + z^3 + u^2 = v^2), \neg(z = 0), [y := y + z * z * z; z := z - 1])$ ]
{ $\exists u (y = u^2)$ }

```

4 Modale Logica

1. Beschouw volgend Mogelijke-werelden model:

$$\begin{aligned}
 M &= \langle \{1, 2, 3, 4\}, R, \{V_1, V_2, V_3, V_4\} \rangle \\
 R &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 4)\} \\
 V_1 &= p, q \\
 V_2 &= p \\
 V_3 &= p \\
 V_4 &= q
 \end{aligned}$$

Leid de waarheidswaarden van volgende modale formules af voor elke mogelijke wereld $w = 1, 2, 3, 4$:

- (a) $\Diamond(p \wedge q)$
- (b) $\Box(p \wedge q)$
- (c) $\Box\Diamond(p \wedge q)$
- (d) $\Diamond\Box(p \vee q)$
- (e) $\Box(p \rightarrow \Box p)$
- (f) $\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$
- (g) $\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$

2. Geef een Mogelijke-werelden tegenvoorbeeld voor volgende modale sequenten:

- (a) $p, p \rightarrow q, \Box(q \rightarrow p) \circ \Box p$

$$(b) \ p \vee \neg p \circ \Box p \vee \Box \neg p$$

3. Bewijs volgende uitspraken:

$$(a) \ \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$$

$$(b) \ (\Diamond p \wedge \Box q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$$

4. Beschouw volgende Mogelijke-werelden model:

$$M = \langle W, R, \{V_w\} \rangle$$

De mogelijke werelden in W zijn Tarski's World werelden, en dezelfde beperkingen gelden voor alle mogelijke werelden in W . Een Tarski's World wereld behoort tot W indien er acht tetrahedrons aanwezig zijn en twee dodecahedrons. De initiële wereld w_0 bestaat uit een bovenste rij van twee dodecs, geplaatst zoals de twee paarden op een schaakbord. De acht tets staan op de tweede rij naast elkaar, zoals de acht pionnen op een schaakbord. Twee werelden w_i en w_j zijn verbonden door R indien alle stukken van bord w_i voorwaarts verplaatst werden naar de configuratie op bord w_j , met volgende beperkingen:

- tetrahedrons bewegen zoals schaakpionnen: 1 of 2 vakjes naar onder op dezelfde kolom vanuit w_0 , nadien steeds 1 vakje naar onder op dezelfde kolom.
- dodecahedrons bewegen zoals schaakpaarden, maar zonder terug te stappen (steeds een neerwaartse beweging).
- pionnen (tets) worden eerst verzet, dan paarden (dodecs).
- pionnen kunnen doorheen paarden bewegen, maar paarden niet door pionnen.
- alle 10 stukken worden verplaatst bij overgang naar een nieuwe wereld.

Twee vormen kunnen in geen enkele wereld dezelfde plaats innemen. Wanneer minstens 1 stuk geen beweging meer kan maken, is de laatste wereld bereikt (w_n). Construeer een aantal van de mogelijke werelden in Tarski's World en evalueer de relatie R over deze werelden. Ga volgende zinnen na in dit model, en geef hun waarheidswaarde voor wereld w_0 :

$$(a) \ \forall x(Dodec(x) \rightarrow \exists y(Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$$

$$(b) \ \Box \Diamond \forall x(Dodec(x) \rightarrow \exists y(Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$$

$$(c) \ \Diamond \Box \forall x(Dodec(x) \rightarrow \exists y(Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$$

$$(d) \ \Box \forall x(Dodec(x) \rightarrow \Diamond \exists y(Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$$

$$(e) \ \forall x(\Box Dodec(x) \rightarrow \exists y \Diamond (Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$$

$$(f) \ \Diamond \forall x(Dodec(x) \rightarrow \Box \exists y(Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$$

$$(g) \ \forall x(\Diamond Dodec(x) \rightarrow \exists y \Box (Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$$

$$(h) \ \forall x \exists y \Diamond \Box (Dodec(x) \rightarrow (Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$$

$$(i) \ \forall x \exists y \Box \Diamond (Dodec(x) \rightarrow (Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$$

$$(j) \ \exists x(Dodec(x) \wedge \exists y(Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$$

- (k) $\Box \Diamond \exists x (Dodec(x) \wedge \exists y (Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$
- (l) $\Diamond \Box \exists x (Dodec(x) \wedge \exists y (Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$
- (m) $\Box \exists x (Dodec(x) \wedge \Diamond \exists y (Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$
- (n) $\exists x (\Box Dodec(x) \wedge \exists y \Diamond (Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$
- (o) $\Diamond \exists x (Dodec(x) \wedge \Box \exists y (Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$
- (p) $\exists x (\Diamond Dodec(x) \wedge \exists y \Box (Tet(y) \wedge adjoins(x, y)))$
- (q) $\exists x \exists y \Diamond \Box (Dodec(x) \wedge Tet(y) \wedge adjoins(x, y))$
- (r) $\exists x \exists y \Box \Diamond (Dodec(x) \wedge Tet(y) \wedge adjoins(x, y))$