ToFoLo2 Les 07-12-2005

Benjamin De Leeuw

Departement Zuivere Wiskunde en Computer Algebra
Galglaan 2, B-9000 Gent
Benjamin.DeLeeuw@UGent.be
Gent University, Belgium

December 14, 2005

1 Lesmateriaal

- Theorie : Logica voor Informatica - 3de editie, J.F.A.K. van Benthem. (LVI)
- Oefeningen : Language Proof and Logic, J. Barwise, J. Etchemendy. (LPL)

2 Deze Week

- LPL p. 458 - 464
  - Functionele gelijkheid en programmacorrectheid
  - Terminatie van programma's
  - Inductief bewijzen van programmacorrectheid
  - Einde LPL
- Intermezzo : Hoare Calculus

3 Hoare Calculus

1. Bewijs in Hoare Calculus:
   $\{x > 0\}$
   $[z := x; y := 2z]$
   $\{x < y\}$

2. Bewijs in Hoare Calculus:
   $\{x = 3 \wedge y = 5\}$
   $[if(x < y, [z := y - x], [z := x - y])]$
   $\{z = 2\}$

3. Bewijs in Hoare Calculus:
   $\{x = 13 \wedge y = 11\}$
   $[if(x = y, [z := y], [z := (x - y)/2])]$
   $\{z = 1\}$

4. Bewijs in Hoare Calculus:
   $\{x > 0\}$
   $[y := 0; z := x; while(y + z(z+1)/2 = x(x+1)/2, \neg(z = 0), [y := y + z; z := z - 1])]$
   $\{y = x(x + 1)/2\}$

5. Bewijs in Hoare Calculus:
   $\{x \geq 0\}$
   $[y := 0; z := x; while(y + (z+1)^2 = (x+1)^2, \neg(z = 0), [y := y + (2z+1); z := z - 1])]$
   $\{y = (x + 1)^2\}$

6. Bewijs in Hoare Calculus:
   $\{x > 0\}$
   $[y := 0; z := x; while(y + z(z + 1)/2 \leq x^2, \neg(z = 0), [y := y + z; z := z - 1])]$
   $\{y \leq x^2\}$
   Opmerking : de variabele y kan later in het programma gebruikt worden om een array datastructuur van grootte x^2 aan te spreken. We bewijzen dan met deze oefening dat er geen overflow optreedt.

7. Bewijs in Hoare Calculus:
   $\{x > 0\}$
   $[while(y/z = 1/x, z > 1, [y := y(1 - 1/z); z := z - 1])]$
   $\{y = 1/x\}$

8. Een specificatie van een functie $Sommer(n)$:

   $Sommer(0) = 0$
   $Sommer(k + 1) = Sommer(k) + (k + 1)$

   Volgende programma implementeert deze functie, bewijs deze claim in Hoare Calculus:

```
natural sommer(natural n)
{
    natural sum := 0;
    natural count := 0;
    while(count < n)
    {
        count := count + 1;
        sum := sum + count;
    }
    return sum;
}
```

9. Een specificatie van een functie $n!$:

   $1! = 1$
   $k! = (k-1)!.k$

   Volgende programma implementeert deze functie, bewijs deze claim in Hoare Calculus:

   $natural\ faculteit(natural\ n)$
   $\{$
   $\quad natural\ fac := 1;$
   $\quad natural\ count := n;$
   $\quad while(count > 0)$
   $\quad \{$
   $\qquad fac := fac * count;$
   $\qquad count := count - 1;$
   $\quad \}$
   $\quad return\ fac;$
   $\}$

10. $*$ Bewijs in Hoare Calculus:
    $\{x > 0\}$
    $[y := 0; z := x; while(\exists u \exists v(y + z^3 + u^2 = v^2), \neg(z = 0), [y := y + z * z * z; z := z - 1])]$
    $\{\exists u(y = u^2)\}$