# Local Moufang sets

Erik Rijcken

Promotor: Prof. Dr. Tom De Medts

UNIVERSITEIT
GENT

Faculteit Wetenschappen
Universiteit Gent

14 juni 2017

# Overzicht

1. Groepsacties: symmetrie gebruiken

2. Moufang sets

3. Velden

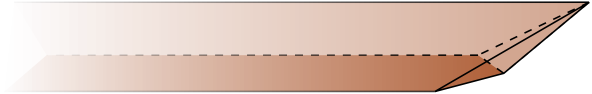
4. Het verband

5. De lokale aanpak

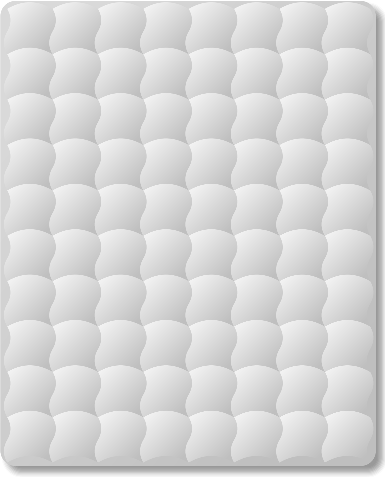
# 1 Groepsacties: symmetrie gebruiken

# 1 Groepsacties: symmetrie gebruiken

# 1 Groepsacties: symmetrie gebruiken

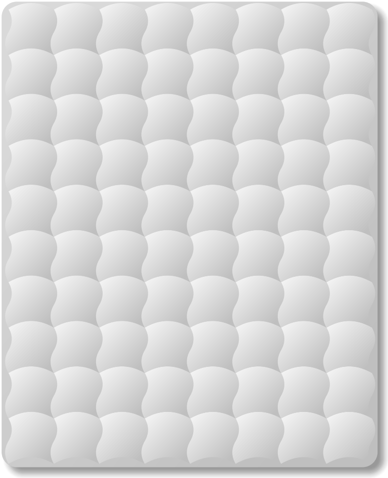


# Symmetrieën van een matras



Vier mogelijke symmetrieën voor een matras:

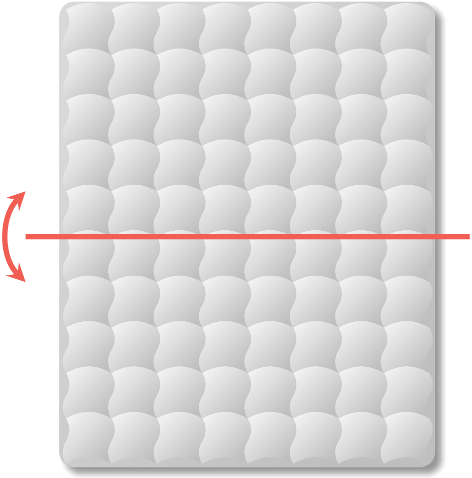
## Symmetrieën van een matras



Vier mogelijke symmetrieën voor een matras:

- id: niets doen

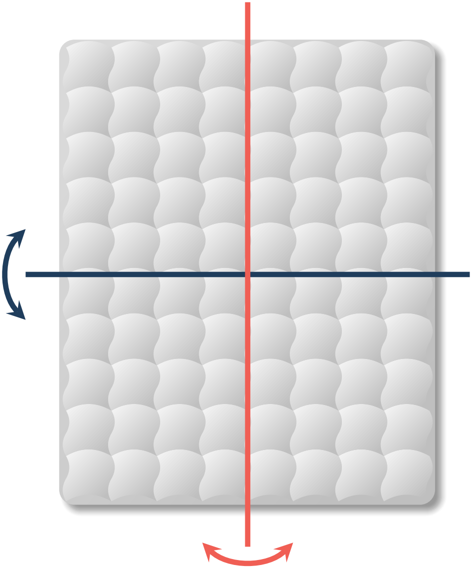
# Symmetrieën van een matras



Vier mogelijke symmetrieën voor een matras:

- id: niets doen
- $\updownarrow$: omdraaien rond de korte kant

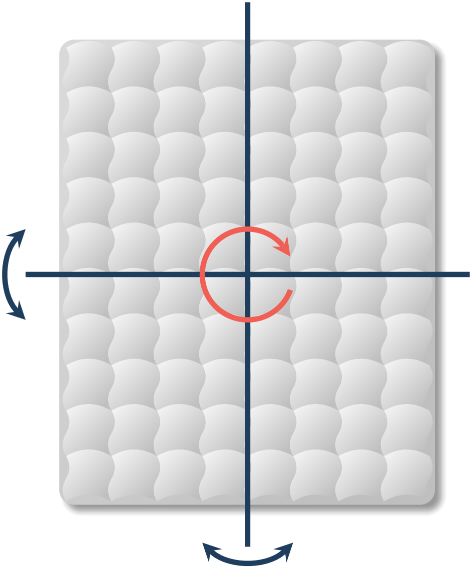
# Symmetrieën van een matras



Vier mogelijke symmetrieën voor een matras:

- id: niets doen
- $\updownarrow$: omdraaien rond de korte kant
- $\leftrightarrow$: omdraaien rond de lange kant

# Symmetrieën van een matras



Vier mogelijke symmetrieën voor een matras:

- id: niets doen
- $\updownarrow$: omdraaien rond de korte kant
- $\leftrightarrow$: omdraaien rond de lange kant
- ↻: 180° draaien

## Wat is een groepsactie?

Een groepsactie is een lijstje acties die je kan uitvoeren op een object, met de volgende eigenschappen:

$\{\mathrm{id}, \updownarrow, \leftrightarrow, \circlearrowright\}$
op een matras

1. Elke actie kan je ongedaan maken met één actie uit de lijst.

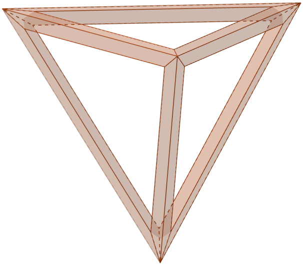
$\updownarrow\updownarrow = \mathrm{id}$, $\leftrightarrow\leftrightarrow = \mathrm{id}\ldots$

2. Als je twee acties uitvoert, doe je hetzelfde als één actie uit de lijst.

$\updownarrow\leftrightarrow = \circlearrowright$, $\circlearrowright\leftrightarrow = \updownarrow$,
$\leftrightarrow\mathrm{id} = \leftrightarrow$, $\circlearrowright\circlearrowright = \mathrm{id}\ldots$

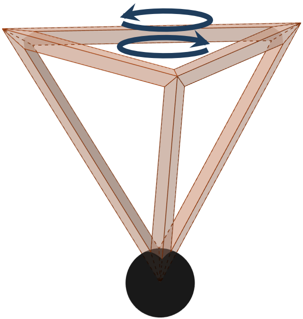
Het lijstje acties is een groep.

# Het draaien van een tetraëder



12 manieren om te draaien.

# Het draaien van een tetraëder

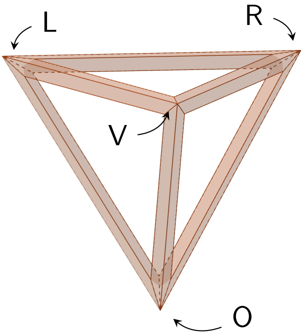


12 manieren om te draaien.

Interessante manieren?
Houd een top vast!

$$U_O = \{\mathrm{id},\ \circlearrowright,\ \circlearrowleft\}$$

# Het draaien van een tetraëder

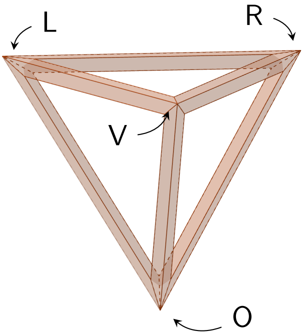



$\textcolor{red}{12}$ manieren om te draaien.

Interessante manieren?
Houd een top vast!

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{O}} &= \{\mathrm{id},\ \circlearrowright_{\mathrm{O}},\ \circlearrowleft_{\mathrm{O}}\}\\
U_{\mathrm{V}} &= \{\mathrm{id},\ \circlearrowright_{\mathrm{V}},\ \circlearrowleft_{\mathrm{V}}\}\\
U_{\mathrm{L}} &= \{\mathrm{id},\ \circlearrowright_{\mathrm{L}},\ \circlearrowleft_{\mathrm{L}}\}\\
U_{\mathrm{R}} &= \{\mathrm{id},\ \circlearrowright_{\mathrm{R}},\ \circlearrowleft_{\mathrm{R}}\}
\end{aligned}
$$

# Het draaien van een tetraëder




12 manieren om te draaien.

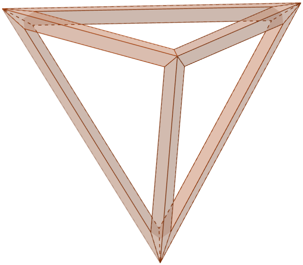
Interessante manieren?
Houd een top vast!

$$U_{\mathrm{O}} = \{\mathrm{id}, \circlearrowright_{\mathrm{O}}, \circlearrowleft_{\mathrm{O}}\}$$
$$U_{\mathrm{V}} = \{\mathrm{id}, \circlearrowright_{\mathrm{V}}, \circlearrowleft_{\mathrm{V}}\}$$
$$U_{\mathrm{L}} = \{\mathrm{id}, \circlearrowright_{\mathrm{L}}, \circlearrowleft_{\mathrm{L}}\}$$
$$U_{\mathrm{R}} = \{\mathrm{id}, \circlearrowright_{\mathrm{R}}, \circlearrowleft_{\mathrm{R}}\}$$

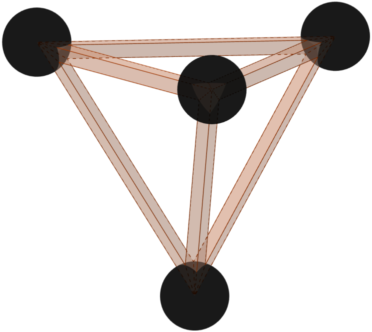
Door deze acties na elkaar uit te voeren kan je de andere draaiingen bekomen.

Voorbeeld:
O en L wisselen kan via $\circlearrowright_{\mathrm{O}}\circlearrowleft_{\mathrm{V}}$.

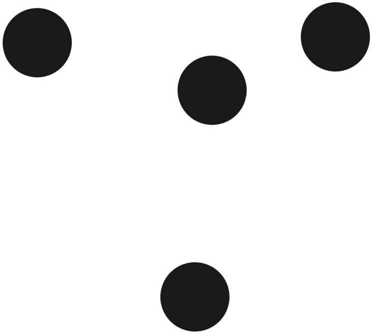
# Wat als je de tetraëder niet kan zien?



# Wat als je de tetraëder niet kan zien?



# Wat als je de tetraëder niet kan zien?

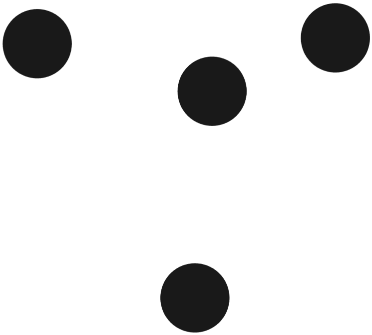


De tetraëder is niet te zien, maar de mogelijke acties blijven dezelfde!

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{O}} &= \{\mathrm{id}, \circlearrowright_{\mathrm{O}}, \circlearrowleft_{\mathrm{O}}\} \\ U_{\mathrm{V}} &= \{\mathrm{id}, \circlearrowright_{\mathrm{V}}, \circlearrowleft_{\mathrm{V}}\} \\ U_{\mathrm{L}} &= \{\mathrm{id}, \circlearrowright_{\mathrm{L}}, \circlearrowleft_{\mathrm{L}}\} \\ U_{\mathrm{R}} &= \{\mathrm{id}, \circlearrowright_{\mathrm{R}}, \circlearrowleft_{\mathrm{R}}\} \end{aligned}$$

(en 3 andere)

# Wat als je de tetraëder niet kan zien?



De tetraëder is niet te zien, maar de mogelijke acties blijven dezelfde!

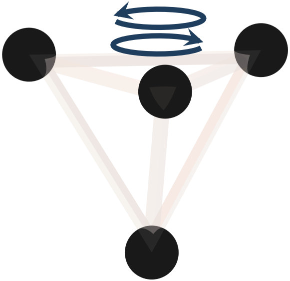
$$U_{\mathrm{O}} = \{\mathrm{id}, \circlearrowright_{\mathrm{O}}, \circlearrowleft_{\mathrm{O}}\}$$
$$U_{\mathrm{V}} = \{\mathrm{id}, \circlearrowright_{\mathrm{V}}, \circlearrowleft_{\mathrm{V}}\}$$
$$U_{\mathrm{L}} = \{\mathrm{id}, \circlearrowright_{\mathrm{L}}, \circlearrowleft_{\mathrm{L}}\}$$
$$U_{\mathrm{R}} = \{\mathrm{id}, \circlearrowright_{\mathrm{R}}, \circlearrowleft_{\mathrm{R}}\}$$

(en 3 andere)

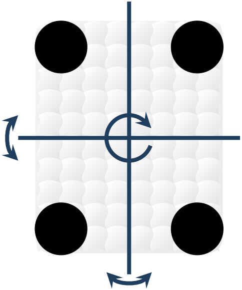
**Vraag**

Hoe herkennen we de tetraëder aan de mogelijke acties?

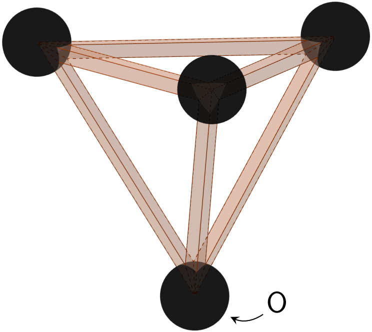
# Moufang sets: een specifiek soort groepsacties



of



# Eigenschappen van de actie op een tetraëder

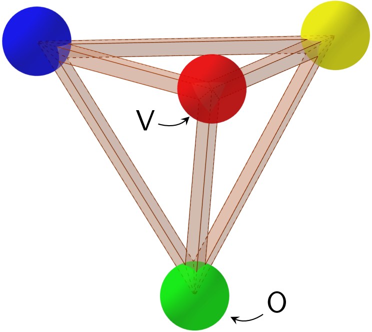



Hou top O vast.

Er is een unieke manier uit
$U_{\mathsf{O}} = \{\mathrm{id}, \circlearrowright_{\mathsf{O}}, \circlearrowleft_{\mathsf{O}}\}$
om V te verplaatsen naar V, L en R.

We noemen de actie van $U_{\mathsf{O}}$ regulier.

# Eigenschappen van de actie op een tetraëder




Hou top O vast.

Er is een unieke manier uit
$U_{\mathrm{O}} = \{\mathrm{id}, \circlearrowright_{\mathrm{O}}, \circlearrowleft_{\mathrm{O}}\}$
om V te verplaatsen naar V, L en R.

We noemen de actie van $U_{\mathrm{O}}$ regulier.

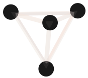
$\circlearrowright_{\mathrm{L}}$ verplaatst O naar V,
$\circlearrowleft_{\mathrm{L}}$ maakt die actie ongedaan

We vinden $\circlearrowleft_{\mathrm{L}} \circlearrowright_{\mathrm{O}} \circlearrowright_{\mathrm{L}} = \circlearrowright_{\mathrm{V}}$
Algemeen is $\circlearrowleft_{\mathrm{L}} U_{\mathrm{O}} \circlearrowright_{\mathrm{L}} = U_{\mathrm{V}}$

We noemen $U_{\mathrm{O}}$ en $U_{\mathrm{V}}$ toegevoegd.

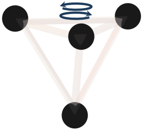
# Wat is een Moufang set?

Een Moufang set is een verzameling punten met voor elk punt $x$ een actie van een wortelgroep $U_x$ op de punten, zodat



$U_{\mathrm{O}} = \{\mathrm{id}, \circlearrowright_{\mathrm{O}}, \circlearrowleft_{\mathrm{O}}\}$

1. elke $U_x$ het punt $x$ vasthoudt;
2. elke $U_x$ regulier werkt op de andere punten;
3. de wortelgroepen allemaal toegevoegd zijn.



$\circlearrowleft_{\mathrm{L}} U_{\mathrm{O}} \circlearrowright_{\mathrm{L}} = U_{\mathrm{V}}$,
$\circlearrowright_{\mathrm{O}} U_{\mathrm{R}} \circlearrowleft_{\mathrm{O}} = U_{\mathrm{L}} \ldots$

# 3 Velden: 0, 1, $+$, $-$, $\times$ en $\div$

Een veld is een structuur met zeker

- 0
- 1

waarin je kan

- optellen
- aftrekken
- vermenigvuldigen
- delen

zoals je gewoon bent.

Rationale getallen (breuken)

$$0 + 5 = 5 \qquad 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

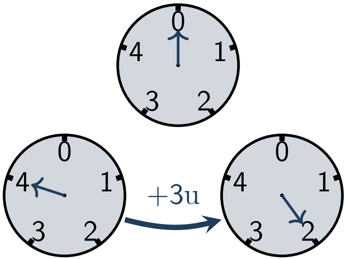
$$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad 5 \div 7 = \frac{5}{7}$$

$$2 - 2 = 0 \qquad 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{3}{2} + (5 - 2) \times \frac{4}{3} \div 8 = 2$$

# Modulorekenen: een klok met 5 uur

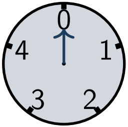
Getallen: 0, 1, 2, 3 en 4



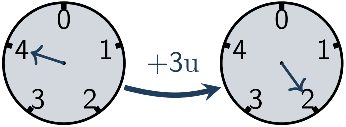

Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen:
trek 5 af of tel 5 op, tot je 0,...,4 hebt
$4 + 3 \equiv 7 \equiv 2 \qquad 2 - 4 \equiv -2 \equiv 3$

# Modulorekenen: een klok met 5 uur

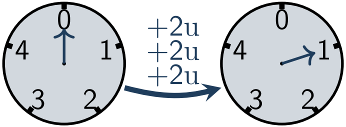
Getallen: 0, 1, 2, 3 en 4




Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen:
trek 5 af of tel 5 op, tot je 0,...,4 hebt
$4 + 3 \equiv 7 \equiv 2 \qquad 2 - 4 \equiv -2 \equiv 3$




Delen: zoek naar getallen
die tot 1 vermenigvuldigen:
$2 \times 3 \equiv 6 \equiv 1$, dus $2 \equiv \dfrac{1}{3}$
$\Longrightarrow 4 \div 3 \equiv 4 \times \dfrac{1}{3} \equiv 4 \times 2 \equiv 8 \equiv 3$

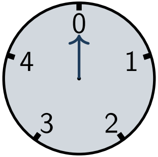


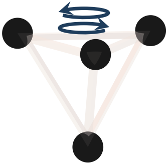

Dit is rekenen modulo 5 en is een veld.

# 4 Het verband tussen Moufang sets en velden

constructie
voor elk veld

velden → Moufang sets



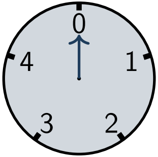
# 4 Het verband tussen Moufang sets en velden

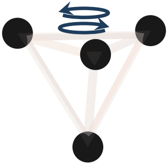
constructie
voor elk veld

velden → Moufang sets

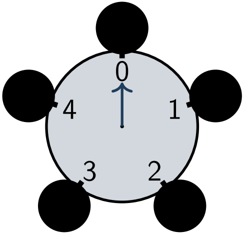
Moufang sets → velden

constructie met
voorwaarden

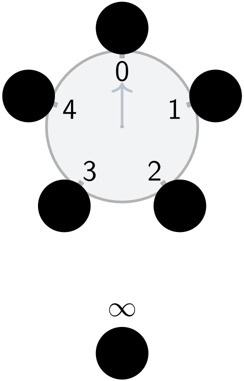


# Van veld naar Moufang set



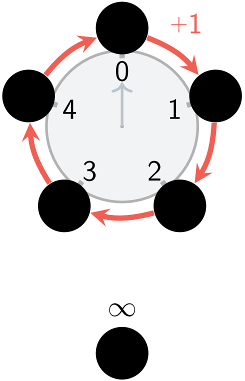
# Van veld naar Moufang set




Punten:
het veld en een extra punt $\infty$

Wortelgroep:
$U_\infty = \{+0, +1, +2, +3, +4\}$

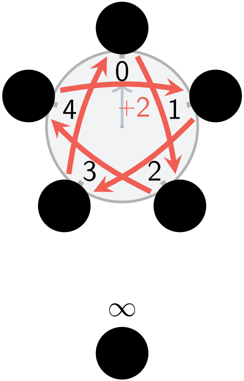
# Van veld naar Moufang set




Punten:
het veld en een extra punt $\infty$

Wortelgroep:
$U_\infty = \{+0, +1, +2, +3, +4\}$

# Van veld naar Moufang set



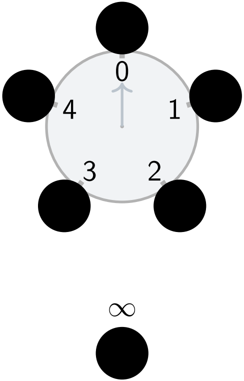

Punten:

het veld en een extra punt $\infty$

Wortelgroep:

$U_\infty = \{+0, +1, +2, +3, +4\}$

# Van veld naar Moufang set

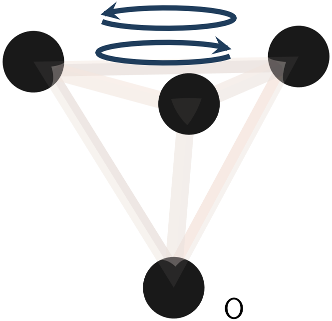



Punten:
het veld en een extra punt $\infty$

Wortelgroep:
$U_\infty = \{+0, +1, +2, +3, +4\}$

Andere wortelgroepen:
vinden we door toevoeging

# Van Moufang set naar veld

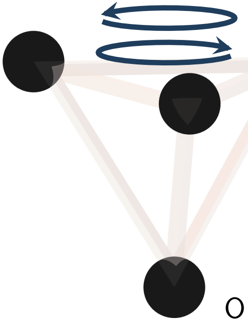



Neem een wortelgroep:

$$U_O = \{\mathrm{id}, \circlearrowright_O, \circlearrowleft_O\}$$

De elementen worden de getallen:

$$\mathrm{id} \rightsquigarrow 0 \qquad \circlearrowright_O \rightsquigarrow 1 \qquad \circlearrowleft_O \rightsquigarrow 2$$




Neem een wortelgroep:

$$U_O = \{\mathrm{id}, \circlearrowright_O, \circlearrowleft_O\}$$

De elementen worden de getallen:

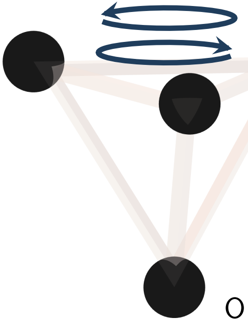
$$\mathrm{id} \rightsquigarrow 0 \qquad \circlearrowright_O \rightsquigarrow 1 \qquad \circlearrowleft_O \rightsquigarrow 2$$

De optelling vinden we door de acties na elkaar uit te voeren:

$$2 + 0 = ? \rightsquigarrow \circlearrowleft_O \mathrm{id} = \circlearrowleft_O \rightsquigarrow 2 + 0 = 2$$

$$1 + 1 = ? \rightsquigarrow \circlearrowright_O \circlearrowright_O = \circlearrowleft_O \rightsquigarrow 1 + 1 = 2$$

$$2 + 2 = ? \rightsquigarrow \circlearrowleft_O \circlearrowleft_O = \circlearrowright_O \rightsquigarrow 2 + 2 = 1$$




Neem een wortelgroep:

$$U_O = \{\mathrm{id}, \circlearrowright_O, \circlearrowleft_O\}$$

De elementen worden de getallen:

$$\mathrm{id} \rightsquigarrow 0 \qquad \circlearrowright_O \rightsquigarrow 1 \qquad \circlearrowleft_O \rightsquigarrow 2$$

De optelling vinden we door de acties na elkaar uit te voeren:

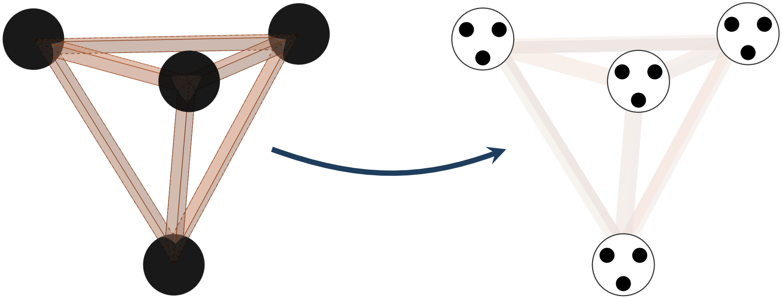
$$2+0=? \rightsquigarrow \circlearrowleft_O \mathrm{id} = \circlearrowleft_O \rightsquigarrow 2+0=2$$

$$1+1=? \rightsquigarrow \circlearrowright_O \circlearrowright_O = \circlearrowleft_O \rightsquigarrow 1+1=2$$

$$2+2=? \rightsquigarrow \circlearrowleft_O \circlearrowleft_O = \circlearrowright_O \rightsquigarrow 2+2=1$$

We vinden rekenen modulo 3 terug.

# 5 De lokale aanpak: dichtbij en ver weg



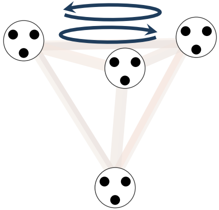
Punten liggen dicht bij elkaar of ver van elkaar.

Er is een lokale structuur.

# Groepsacties die 'dichtbij en ver weg' bewaren

Een groepsactie op een object met een lokale structuur bewaart die lokale structuur als

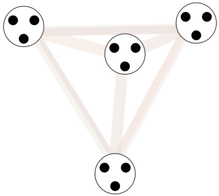
1. Punten die dicht bij elkaar liggen, blijven dicht bij elkaar na alle acties.
2. Punten die ver van elkaar liggen, blijven ver van elkaar na alle acties.



# Wat is een local Moufang set?

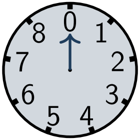
Een lokale Moufang set is een verzameling punten met lokale structuur, met voor elk punt $x$ een actie van een wortelgroep $U_x$ die de lokale structuur bewaart, zodat

1. elke $U_x$ het punt $x$ vasthoudt;
2. elke $U_x$ regulier werkt op de punten die ver van $x$ liggen;
3. elke $U_x$ regulier werkt op de groepjes punten behalve dat van $x$;
4. de wortelgroepen allemaal toegevoegd zijn.



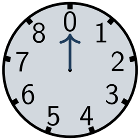
# Rekenen modulo 9: geen veld, maar een lokale ring

Getallen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8
Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen:
zoals vorige keer (9 bijtellen of aftrekken)



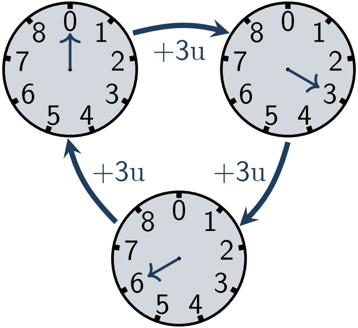
# Rekenen modulo 9: geen veld, maar een lokale ring

Getallen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8
Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen:
zoals vorige keer (9 bijtellen of aftrekken)



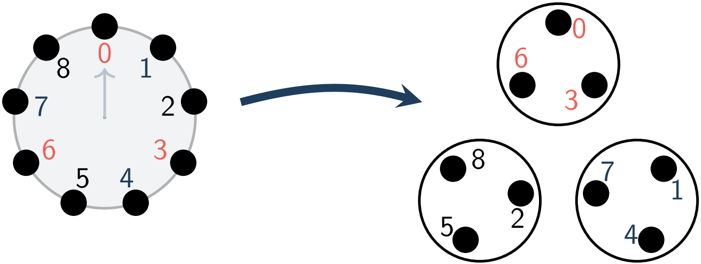

Om te delen door 3:
zoek een getal zodat $3 \times ? \equiv 1$,
maar $3 \times ?$ is altijd een drievoud!

Delen door 3, 6 en 0 kan niet.



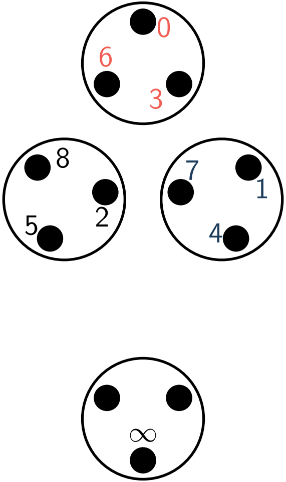

Rekenen modulo 9 geeft geen veld,
maar een lokale ring.

# Lokale structuur van modulo 9




Getallen liggen dicht bij elkaar als het verschil 0, 3 of 6 is.

# Van lokale ring naar local Moufang set

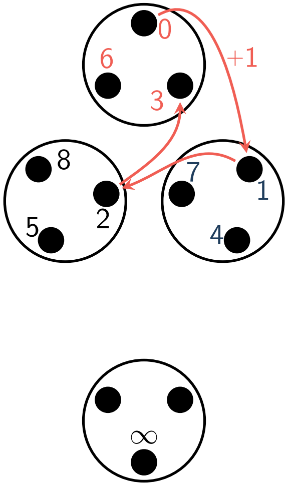



Punten:
de lokale ring en drie extra punten

Wortelgroep:

$$U_\infty = \{+0, +1, +2, +3, \\ +4, +5, +6, +7, +8\}$$

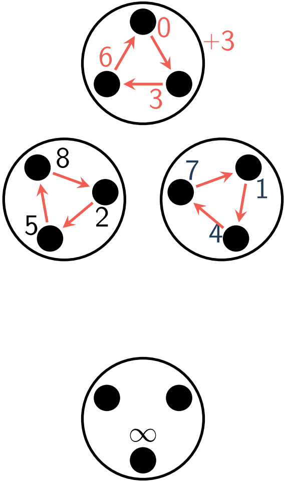
# Van lokale ring naar local Moufang set




Punten:
de lokale ring en drie extra punten

Wortelgroep:
$U_\infty = \{+0, +1, +2, +3,$
$+4, +5, +6, +7, +8\}$

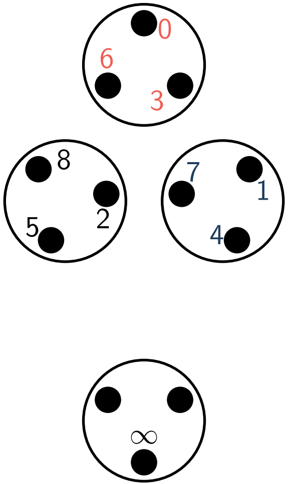
# Van lokale ring naar local Moufang set




Punten:
de lokale ring en drie extra punten

Wortelgroep:
$U_\infty = \{+0, +1, +2, +3,$
$+4, +5, +6, +7, +8\}$

# Van lokale ring naar local Moufang set




Punten:
de lokale ring en drie extra punten

Wortelgroep:

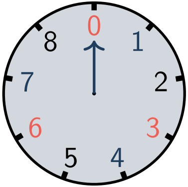
$$U_\infty = \{+0, +1, +2, +3, \\ +4, +5, +6, +7, +8\}$$

Andere wortelgroepen:
vinden we door toevoeging

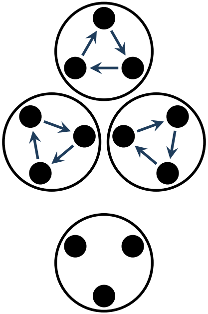
# Lokale ringen en local Moufang sets: het verband

constructie voor
elke lokale ring

lokale ringen




local Moufang sets



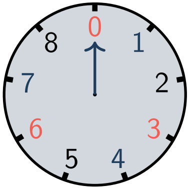
# Lokale ringen en local Moufang sets: het verband

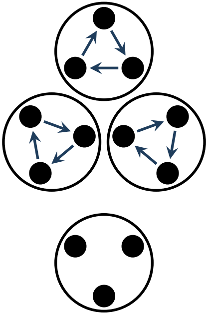
constructie voor
elke lokale ring

lokale ringen

local Moufang sets

constructie met
voorwaarden



# Tijd voor de receptie

Bedankt om te komen!
Jullie zijn uitgenodigd voor de receptie

in
**Auditorium A3**
3e verdieping
einde van de gang.