FACULTY OF SCIENCES

IMAGINARY

26 OKTOBER 2022

EEUWENOUDE MYSTERIES ROND PRIEMGETALLEN

Frederik Broucke

GHENT UNIVERSITY

PRIEMGETALLEN

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Klassieke definitie: enkel deelbaar door 1 en zichzelf.

PRIEMGETALLEN

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Klassieke definitie: enkel deelbaar door 1 en zichzelf.

Intuïtiever: fundamentele bouwstenen.

PRIEMGETALLEN

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...$$

Klassieke definitie: enkel deelbaar door 1 en zichzelf.

Intuïtiever: fundamentele bouwstenen.

- Bouwstenen: elk getal is opgebouwd uit priemgetallen, vb.

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \quad 2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337.$$

PRIEMGETALLEN

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...$$

Klassieke definitie: enkel deelbaar door 1 en zichzelf.

Intuïtiever: fundamentele bouwstenen.

- Bouwstenen: elk getal is opgebouwd uit priemgetallen, vb.

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \quad 2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337.$$

- Fundamenteel: zelf niet opgebouwd uit kleinere bouwstenen.

$$7 = 7 \cdot 1 = 1 \cdot 7.$$

PRIEMGETALLEN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

PRIEMGETALLEN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

D. Zagier— *Ze groeien als onkruid tussen de natuurlijke getallen, schijnbaar willekeurig...*

PRIEMGETALLEN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

D. Zagier— *... maar ze vertonen een verbazende regelmaat, er zijn wetten die ze met bijna militaire discipline gehoorzamen.*

De stelling van Euclides

Euclides, 300 v. Chr.: er zijn oneindig veel priemgetallen

DE STELLING VAN EUCLIDES

Euclides, 300 v. Chr.: er zijn oneindig veel priemgetallen

Bewijs: we bewijzen dat er geen grootste priemgetal is. Zij $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (eindige) lijst priemgetallen.

DE STELLING VAN EUCLIDES

Euclides, 300 v. Chr.: er zijn oneindig veel priemgetallen

Bewijs: we bewijzen dat er geen grootste priemgetal is. Zij $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (eindige) lijst priemgetallen.
Stel

$$q = (p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n) + 1.$$

Twee mogelijkheden:

De stelling van Euclides

Euclides, 300 v. Chr.: er zijn oneindig veel priemgetallen

Bewijs: we bewijzen dat er geen grootste priemgetal is. Zij $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (eindige) lijst priemgetallen.
Stel

$$q = (p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n) + 1.$$

Twee mogelijkheden:

- q is priem.

De stelling van Euclides

Euclides, 300 v. Chr.: er zijn oneindig veel priemgetallen

Bewijs: we bewijzen dat er geen grootste priemgetal is. Zij $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (eindige) lijst priemgetallen.
Stel

$$q = (p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n) + 1.$$

Twee mogelijkheden:

- q is priem.
- q is samengesteld, dan bevat q en priemfactor p met $p \neq p_1, p \neq p_2, \ldots, p \neq p_n$.

DE STELLING VAN EUCLIDES

Euclides, 300 v. Chr.: er zijn oneindig veel priemgetallen

Bewijs: we bewijzen dat er geen grootste priemgetal is. Zij $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (eindige) lijst priemgetallen.
Stel

$$q = (p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n) + 1.$$

Twee mogelijkheden:

- q is priem.
- q is samengesteld, dan bevat q en priemfactor p met $p \neq p_1, p \neq p_2, \ldots, p \neq p_n$.

In beide gevallen: nieuw priemgetal groter dan alle priemgetallen uit de lijst.

PRIEMGETALLEN TELLEN

Priemtelfunctie:

$$\pi(n) = \text{ aantal priemgetallen} \leq n.$$

Bijvoorbeeld, $\pi(10) = 4$: telt de priemgetallen 2, 3, 5, 7.

PRIEMGETALLEN TELLEN

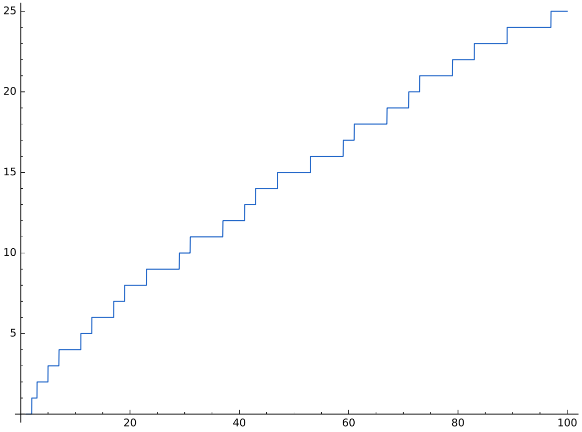
Priemtelfunctie:

$$\pi(n) = \text{ aantal priemgetallen} \leq n.$$

Bijvoorbeeld, $\pi(10) = 4$: telt de priemgetallen $2, 3, 5, 7$.
Wegens stelling van Euclides

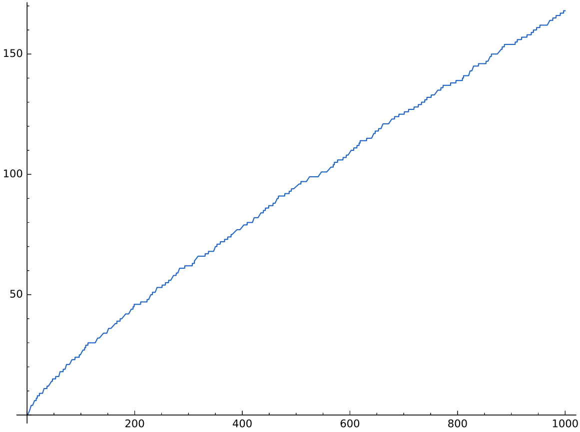
$$\pi(n) \to \infty \quad \text{als } n \to \infty.$$

Priemtelfunctie



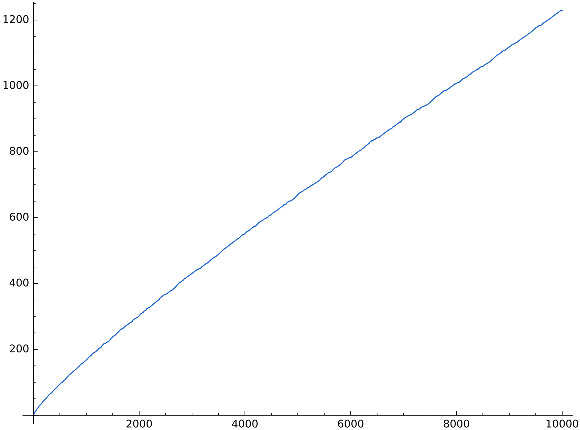
$\pi(n)$ voor n tussen 0 en 100.

PRIEMTELFUNCTIE



$\pi(n)$ voor n tussen 0 en 1000.

PRIEMTELFUNCTIE



$\pi(n)$ voor n tussen 0 en 10000.

De priemgetalstelling

Stelling (de la Vallée Poussin, Hadamard, 1896)

De priemtelfunctie is asymptotisch gelijk aan de functie $n/\ln n$:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

De priemgetalstelling

Stelling (de la Vallée Poussin, Hadamard, 1896)

De priemtelfunctie is asymptotisch gelijk aan de functie $n/\ln n$:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

$\ln n$ is de natuurlijke logaritme van n.

Ongeveer $2 \cdot$ aantal cijfers van n.

De priemgetalstelling

Stelling (de la Vallée Poussin, Hadamard, 1896)

De priemtelfunctie is asymptotisch gelijk aan de functie $n/\ln n$:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

n	$\pi(n)$	$n/\ln n$	rel. fout
100	25	21.71	13.14%
1000	168	144.9	13.83%
10000	1229	1086	11.66%
100000	9592	8685	9.45%

Relatieve fout $\to 0$ als $n \to \infty$.

De vraag van 1 miljoen

Hoe groot is de fout die we maken door $\pi(n)$ te benaderen?
Hoe snel gaat de relatieve fout naar 0?

De vraag van 1 miljoen

Hoe groot is de fout die we maken door $\pi(n)$ te benaderen?
Hoe snel gaat de relatieve fout naar 0?

In 1859 formuleerde B. Riemann hierover een vermoeden, de zogenaamde Riemann-hypothese.
Clay Mathematics Institute: $ 1 000 000 voor oplossing.

De vraag van 1 miljoen

Hoe groot is de fout die we maken door $\pi(n)$ te benaderen?
Hoe snel gaat de relatieve fout naar 0?

In 1859 formuleerde B. Riemann hierover een vermoeden, de zogenaamde Riemann-hypothese.
Clay Mathematics Institute: \$ 1 000 000 voor oplossing.

D. Hilbert— *Als ik zou ontwaken na een slaap van duizend jaar, dan zou mijn eerste vraag zijn: "Is het vermoeden van Riemann al bewezen?".*

PRIEMTWEELINGEN

Een paar priemgetallen van de vorm $(p, p+2)$.
Bijvoorbeeld:

$$(3, 5), \quad (5, 7), \quad (11, 13), \quad (17, 19), \dots \, .$$

PRIEMTWEELINGEN

Een paar priemgetallen van de vorm $\big(p, p+2\big)$.
Bijvoorbeeld:

$$(3,5), \quad (5,7), \quad (11,13), \quad (17,19), \ldots\ .$$

Grootste gekende voorbeeld:

$$\Big(2\,996\,863\,034\,895 \cdot 2^{1\,290\,000} - 1, \quad 2\,996\,863\,034\,895 \cdot 2^{1\,290\,000} + 1\Big).$$

Bestaan uit 388 342 cijfers.

Priemtweelingen

Een paar priemgetallen van de vorm $(p, p+2)$.
Bijvoorbeeld:

$$(3,5), \quad (5,7), \quad (11,13), \quad (17,19), \ldots\ .$$

Grootste gekende voorbeeld:

$$\left(2\,996\,863\,034\,895 \cdot 2^{1\,290\,000} - 1, \quad 2\,996\,863\,034\,895 \cdot 2^{1\,290\,000} + 1\right).$$

Bestaan uit 388 342 cijfers.
Eeuwenoude vraag: zijn er oneindig veel priemtweelingen?

AFSTAND TUSSEN PRIEMGETALLEN

De afstand tussen opeenvolgende priemgetallen wordt genoteerd als $g_n = p_{n+1} - p_n$. Bijvoorbeeld

$$g_1 = p_2 - p_1 = 3 - 2 = 1,$$
$$g_9 = p_{10} - p_9 = 29 - 23 = 6.$$

AFSTAND TUSSEN PRIEMGETALLEN

De afstand tussen opeenvolgende priemgetallen wordt genoteerd als $g_n = p_{n+1} - p_n$. Bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} g_1 &= p_2 - p_1 = 3 - 2 = 1, \\ g_9 &= p_{10} - p_9 = 29 - 23 = 6. \end{aligned}$$

Tweelingpriemgetallen zijn opeenvolgende priemgetallen op afstand 2 van elkaar.

AFSTAND TUSSEN PRIEMGETALLEN

De afstand tussen opeenvolgende priemgetallen wordt genoteerd als $g_n = p_{n+1} - p_n$. Bijvoorbeeld

$$g_1 = p_2 - p_1 = 3 - 2 = 1,$$
$$g_9 = p_{10} - p_9 = 29 - 23 = 6.$$

Tweelingpriemgetallen zijn opeenvolgende priemgetallen op afstand 2 van elkaar.
De priemgetallen zijn hoe langer hoe meer “dunbezaaid”. De gemiddelde afstand wordt groter en groter, en tweelingpriemgetallen zijn minder en minder waarschijnlijk.

De gemiddelde afstand

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}(g_1 + g_2 + \cdots + g_n) &= \frac{1}{n}\big((p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \cdots + (p_{n+1} - p_n)\big)\\ &= \frac{p_{n+1} - p_1}{n} \sim \frac{p_{n+1}}{p_{n+1} / \ln p_{n+1}} = \ln p_{n+1}.\end{aligned}$$

De gemiddelde afstand

$$\frac{1}{n}(g_1 + g_2 + \cdots + g_n) = \frac{1}{n}\big((p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \cdots + (p_{n+1} - p_n)\big)$$
$$= \frac{p_{n+1} - p_1}{n} \sim \frac{p_{n+1}}{p_{n+1} \big/ \ln p_{n+1}} = \ln p_{n+1}.$$

n	$\pi(n)$	gem. afstand
100	25	4
1000	168	6
10000	1229	8
100000	9592	10

DE GEMIDDELDE AFSTAND

$$\frac{1}{n}(g_1 + g_2 + \cdots + g_n) = \frac{1}{n}\big((p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \cdots + (p_{n+1} - p_n)\big)$$
$$= \frac{p_{n+1} - p_1}{n} \sim \frac{p_{n+1}}{p_{n+1} / \ln p_{n+1}} = \ln p_{n+1}.$$

n	$\pi(n)$	gem. afstand
100	25	4
1000	168	6
10000	1229	8
100000	9592	10

Voor elke M, hoe groot ook, bestaan er opeenvolgende priemgetallen p_n en p_{n+1} met

$$p_{n+1} - p_n > M.$$

Bruns resultaat

Men kan bewijzen dat

$$\sum_{p \text{ priem}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \infty.$$

Bruns resultaat

Men kan bewijzen dat

$$\sum_{p \text{ priem}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \infty.$$

Dit betekent dat voor elk getal M, hoe groot ook, de (eindige) som uiteindelijk groter dan M door genoeg priemgetallen te beschouwen.

Bruns resultaat

Men kan bewijzen dat

$$\sum_{p \text{ priem}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \infty.$$

Dit betekent dat voor elk getal M, hoe groot ook, de (eindige) som uiteindelijk groter dan M door genoeg priemgetallen te beschouwen.

Een oneindige som kan echter ook een eindige waarde hebben, vb.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2.$$

Bruns resultaat

Men kan bewijzen dat

$$\sum_{p \text{ priem}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \infty.$$

Dit betekent dat voor elk getal M, hoe groot ook, de (eindige) som uiteindelijk groter dan M door genoeg priemgetallen te beschouwen.

Een oneindige som kan echter ook een eindige waarde hebben, vb.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2.$$

1919, Brun:

$$\sum_{\text{tweelingpriemen}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \cdots < \infty.$$

De waarde van de som wordt geschat op ≈ 1.90.

Heuristiek

Priemgetalstelling: $\pi(n) \sim n/\ln n$ interpreteren als:

De kans dat een (willekeurig gekozen) getal n priem is, is ongeveer $1/\ln n$.

HEURISTIEK

Priemgetalstelling: $\pi(n) \sim n / \ln n$ interpreteren als:

De kans dat een (willekeurig gekozen) getal n priem is, is ongeveer $1/\ln n$.
Kans dat $(n, n+2)$ tweelingpriempaar is:

$$\approx \frac{1}{\ln(n)} \cdot \frac{1}{\ln(n+2)}.$$

HEURISTIEK

Priemgetalstelling: $\pi(n) \sim n/\ln n$ interpreteren als:

De kans dat een (willekeurig gekozen) getal n priem is, is ongeveer $1/\ln n$.
Kans dat $(n, n+2)$ tweelingpriempaar is:

$$\approx \frac{1}{\ln(n)} \cdot \frac{1}{\ln(n+2)}.$$

verwachte aantal tweelingpriemparen $\leq n$:

$$\frac{1}{\ln(2)\ln(4)} + \frac{1}{\ln(3)\ln(5)} + \cdots + \frac{1}{\ln(n-2)\ln(n)} \sim \frac{n}{(\ln n)^2}.$$

Heuristiek

Problemen:

- Even getallen (behalve 2) zijn nooit priem.
- Oneven getallen hebben meer kans om priem te zijn.
- De kansen dat n en $n+2$ priem zijn, zijn niet onafhankelijk: als vb. $n = 3m+1$, dan $n+2$ deelbaar door 3.

Heuristiek

Problemen:

- Even getallen (behalve 2) zijn nooit priem.
- Oneven getallen hebben meer kans om priem te zijn.
- De kansen dat n en $n+2$ priem zijn, zijn niet onafhankelijk: als vb. $n = 3m+1$, dan $n+2$ deelbaar door 3.

Men kan hiervoor corrigeren: men verwacht

$$\text{aantal tweelingpriemparen } \leq n = \pi_2(n) \sim 2C_2 \frac{n}{(\ln n)^2},$$

met $C_2 \approx 0.66$ de tweelingpriem-constante van Hardy en Littlewood.

HEURISTIEK

Problemen:

- Even getallen (behalve 2) zijn nooit priem.
- Oneven getallen hebben meer kans om priem te zijn.
- De kansen dat n en $n+2$ priem zijn, zijn niet onafhankelijk: als vb. $n = 3m+1$, dan $n+2$ deelbaar door 3.

Men kan hiervoor corrigeren: men verwacht

$$\text{aantal tweelingpriemparen } \leq n = \pi_2(n) \sim 2C_2 \frac{n}{(\ln n)^2},$$

met $C_2 \approx 0.66$ de tweelingpriem-constante van Hardy en Littlewood.
We hebben

$$2C_2 \frac{n}{(\ln n)^2} \to \infty \quad \text{als } n \to \infty,$$

dus we verwachten ∞ veel tweelingpriemen.

DOORBRAKEN

2005, Goldston, Pintz, Yıldırım: Het komt oneindig vaak voor dat de afstand tussen opeenvolgende priemgetallen kleiner is dan een willekeurig kleine fractie van de gemiddelde afstand.

DOORBRAKEN

2005, Goldston, Pintz, Yıldırım: Het komt oneindig vaak voor dat de afstand tussen opeenvolgende priemgetallen kleiner is dan een willekeurig kleine fractie van de gemiddelde afstand.

- $g_n < (0.1) \cdot \ln p_n$ oneindig vaak,

Doorbraken

2005, Goldston, Pintz, Yıldırım: Het komt oneindig vaak voor dat de afstand tussen opeenvolgende priemgetallen kleiner is dan een willekeurig kleine fractie van de gemiddelde afstand.

- $g_n < (0.1) \cdot \ln p_n$ oneindig vaak,
- $g_n < (0.01) \cdot \ln p_n$ oneindig vaak,

DOORBRAKEN

2005, Goldston, Pintz, Yıldırım: Het komt oneindig vaak voor dat de afstand tussen opeenvolgende priemgetallen kleiner is dan een willekeurig kleine fractie van de gemiddelde afstand.

- $g_n < (0.1) \cdot \ln p_n$ oneindig vaak,
- $g_n < (0.01) \cdot \ln p_n$ oneindig vaak,
- $g_n < (0.001) \cdot \ln p_n$ oneindig vaak,

DOORBRAKEN

2005, Goldston, Pintz, Yıldırım: Het komt oneindig vaak voor dat de afstand tussen opeenvolgende priemgetallen kleiner is dan een willekeurig kleine fractie van de gemiddelde afstand.

- $g_n < (0.1) \cdot \ln p_n$ oneindig vaak,
- $g_n < (0.01) \cdot \ln p_n$ oneindig vaak,
- $g_n < (0.001) \cdot \ln p_n$ oneindig vaak,
- ...

Doorbraken

2005, Goldston, Pintz, Yıldırım: Het komt oneindig vaak voor dat de afstand tussen opeenvolgende priemgetallen kleiner is dan een willekeurig kleine fractie van de gemiddelde afstand.

- $g_n < (0.1) \cdot \ln p_n$ oneindig vaak,
- $g_n < (0.01) \cdot \ln p_n$ oneindig vaak,
- $g_n < (0.001) \cdot \ln p_n$ oneindig vaak,
- ...

Later bewezen ze ook dat

$$g_n < f(p_n) \text{ oneindig vaak,}$$

waarbij f een functie is die nog trager groeit dan $\ln$.

DOORBRAKEN

2013, Yitang Zhang:

$$g_n < 70\,000\,000 \quad \text{oneindig vaak.}$$

DOORBRAKEN

2013, Yitang Zhang:

$$g_n < 70\,000\,000 \quad \text{oneindig vaak.}$$

I.h.b. komt minstens één van de afstanden 2, 4, 6, ... , 70 000 000 oneindig vaak voor.

DOORBRAKEN

2013, Yitang Zhang:

$$g_n < 70\,000\,000 \quad \text{oneindig vaak.}$$

I.h.b. komt minstens één van de afstanden 2, 4, 6, ... , 70 000 000 oneindig vaak voor.
De waarde 70 000 000 werd verkleind tot 246 door een Polymath Project.

Doorbraken

2013, Yitang Zhang:

$$g_n < 70\,000\,000 \quad \text{oneindig vaak.}$$

I.h.b. komt minstens één van de afstanden 2, 4, 6, ... , 70 000 000 oneindig vaak voor.
De waarde 70 000 000 werd verkleind tot 246 door een Polymath Project.
Met huidige wiskundige technieken is 6 het beste wat we eventueel kunnen bereiken.

DOORBRAKEN

2013, Yitang Zhang:

$$g_n < 70\,000\,000 \quad \text{oneindig vaak.}$$

I.h.b. komt minstens één van de afstanden 2, 4, 6, ... , 70 000 000 oneindig vaak voor.
De waarde 70 000 000 werd verkleind tot 246 door een Polymath Project.
Met huidige wiskundige technieken is 6 het beste wat we eventueel kunnen bereiken.
Nieuwe doorbraak nodig om het tweelingpriemvermoeden te bewijzen!

Yitang Zhang

(VOA - http://www.voachinese.com/media/video/i-america-math-zhang-yitang-20131204/1803128.html, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=33336006)

VARIANTEN

Er zijn ook varianten van tweelingpriemgetallen.

VARIANTEN

Er zijn ook varianten van tweelingpriemgetallen.

- Cousin primes of “neefpriemgetallen”: paren priemgetallen die 4 verschillen, vb. $(13, 17)$.

VARIANTEN

Er zijn ook varianten van tweelingpriemgetallen.

- Cousin primes of “neefpriemgetallen”: paren priemgetallen die 4 verschillen, vb. $(13, 17)$.
- Sexy primes of “sexy priemgetallen”: paren priemgetallen die 6 verschillen, vb. $(23, 29)$.

Varianten

Er zijn ook varianten van tweelingpriemgetallen.

- Cousin primes of “neefpriemgetallen”: paren priemgetallen die 4 verschillen, vb. $(13, 17)$.
- Sexy primes of “sexy priemgetallen”: paren priemgetallen die 6 verschillen, vb. $(23, 29)$.
- ...

VARIANTEN

Er zijn ook varianten van tweelingpriemgetallen.

- Cousin primes of “neefpriemgetallen”: paren priemgetallen die 4 verschillen, vb. $(13, 17)$.
- Sexy primes of “sexy priemgetallen”: paren priemgetallen die 6 verschillen, vb. $(23, 29)$.
- ...

Vermoeden van Polignac (1849): elk even getal komt oneindig vaak voor als afstand tussen opeenvolgende priemgetallen.

Varianten

Er zijn ook varianten van tweelingpriemgetallen.

- Cousin primes of “neefpriemgetallen”: paren priemgetallen die 4 verschillen, vb. $(13, 17)$.
- Sexy primes of “sexy priemgetallen”: paren priemgetallen die 6 verschillen, vb. $(23, 29)$.
- ...

Vermoeden van Polignac (1849): elk even getal komt oneindig vaak voor als afstand tussen opeenvolgende priemgetallen.

Nog algemener vermoeden van Hardy en Littlewood over k-tupels van priemgetallen: $(p, p + a_1, p + a_2, \ldots, p + a_{k-1})$.

Het vermoeden van Goldbach

1742: Goldbach in een brief aan Euler

Elk getal groter dan 2 is de som van drie priemgetallen.

Het vermoeden van Goldbach

1742: Goldbach in een brief aan Euler

Elk getal groter dan 2 is de som van drie priemgetallen.

- Zwakke vermoeden: elk oneven getal groter dan 5 is de som van drie priemgetallen.
- Sterke vermoeden: elk even getal groter dan 2 is de som van twee priemgetallen.

Het vermoeden van Goldbach

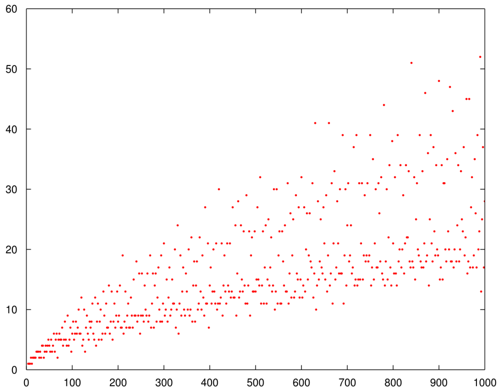
1742: Goldbach in een brief aan Euler

Elk getal groter dan 2 is de som van drie priemgetallen.

- Zwakke vermoeden: elk oneven getal groter dan 5 is de som van drie priemgetallen.
- Sterke vermoeden: elk even getal groter dan 2 is de som van twee priemgetallen.

$$
\begin{aligned}
7 &= 2 + 2 + 3 \\
21 &= 3 + 5 + 13 = 3 + 7 + 11 = 5 + 5 + 11 = 7 + 7 + 7; \\
4 &= 2 + 2, \\
24 &= 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13.
\end{aligned}
$$

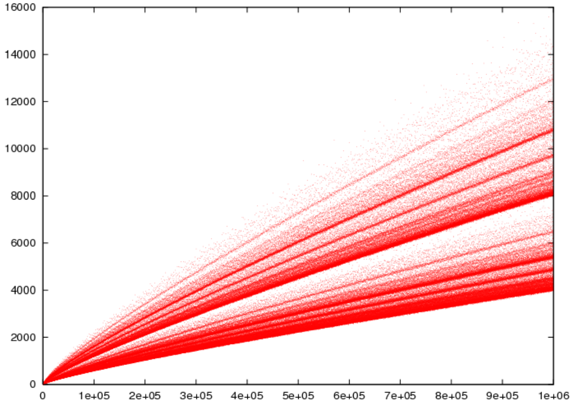
De Goldbach-komeet



Aantal Goldbach-representaties tot 1000

(Mucfish - Own work, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8556034)

De Goldbach-komeet



Aantal Goldbach-representaties tot 1 000 000

Heuristiek

Sterke vermoeden is geverifieerd met computers voor even getallen $< 4 \cdot 10^{18}$.

Heuristiek

Sterke vermoeden is geverifieerd met computers voor even getallen $< 4 \cdot 10^{18}$.

Kans dat n priem is, is $\approx 1/\ln(n)$, dus kans dat beide termen in $n = m + (n - m)$ priem zijn is

$$\approx \frac{1}{(\ln m)(\ln(n-m))}.$$

Heuristiek

Sterke vermoeden is geverifieerd met computers voor even getallen $< 4 \cdot 10^{18}$.

Kans dat n priem is, is $\approx 1/\ln(n)$, dus kans dat beide termen in $n = m + (n - m)$ priem zijn is

$$\approx \frac{1}{(\ln m)(\ln(n - m))}.$$

Op basis hiervan verwacht men ongeveer $n/(\ln n)^2$ Goldbach representaties van even getal n.

Het sterke vermoeden

Nog niet bewezen, maar enkele “deelresultaten”.

HET STERKE VERMOEDEN

Nog niet bewezen, maar enkele “deelresultaten”.

Eind jaren 30, Chudakov, Van der Corput, Esterman: *bijna* elk even getal is de som van twee priemgetallen:

Het sterke vermoeden

Nog niet bewezen, maar enkele “deelresultaten”.

Eind jaren 30, Chudakov, Van der Corput, Esterman: *bijna* elk even getal is de som van twee priemgetallen:

$$\frac{\#\{\text{ uitzonderingen } \leq n\}}{\#\{\text{ even getallen } \leq n\}} \to 0.$$

Het sterke vermoeden

Nog niet bewezen, maar enkele “deelresultaten”.

Eind jaren 30, Chudakov, Van der Corput, Esterman: *bijna* elk even getal is de som van twee priemgetallen:

$$\frac{\#\{\text{ uitzonderingen } \leq n\}}{\#\{\text{ even getallen } \leq n\}} \to 0.$$

1973, Chen: elk voldoende groot even getal is de som van twee priemgetallen of van een priemgetal en een *semipriem*.
Een semipriem is het product van twee priemgetallen, vb. $10 = 2 \cdot 5$.

Het zwakke vermoeden

1937, Vinogradov: Elk *voldoende groot* oneven getal is de som van drie priemgetallen: er bestaat N zo dat n oneven en $n > N$: $n = p_1 + p_2 + p_3$.

Het zwakke vermoeden

1937, Vinogradov: Elk *voldoende groot* oneven getal is de som van drie priemgetallen: er bestaat N zo dat n oneven en $n > N$: $n = p_1 + p_2 + p_3$.

Vinogradov's bewijs geeft geen expliciete waarde voor N.

HET ZWAKKE VERMOEDEN

1937, Vinogradov: Elk *voldoende groot* oneven getal is de som van drie priemgetallen: er bestaat N zo dat n oneven en $n > N$: $n = p_1 + p_2 + p_3$.

Vinogradov's bewijs geeft geen expliciete waarde voor N.

Pas later werden er expliciete waarden voor N gevonden, maar ze waren ontzettend groot.

Het zwakke vermoeden

1937, Vinogradov: Elk *voldoende groot* oneven getal is de som van drie priemgetallen: er bestaat N zo dat n oneven en $n > N$: $n = p_1 + p_2 + p_3$.

Vinogradov's bewijs geeft geen expliciete waarde voor N.

Pas later werden er expliciete waarden voor N gevonden, maar ze waren ontzettend groot.

Rond de eeuwwisseling was de beste waarde voor N: $N = 2 \cdot 10^{1346}$.

DOORBRAAK

2013, Helfgott: men kan $N = 10^{27}$ nemen.

DOORBRAAK

2013, Helfgott: men kan $N = 10^{27}$ nemen.

Alle oneven getallen $< 10^{27}$ kunnen met computer geverifieerd worden, dus Helfgott heeft het zwakke vermoeden van Goldbach bewezen!

Doorbraak

2013, Helfgott: men kan $N = 10^{27}$ nemen.

Alle oneven getallen $< 10^{27}$ kunnen met computer geverifieerd worden, dus Helfgott heeft het zwakke vermoeden van Goldbach bewezen!

Het bewijs beslaat meer dan 300 bladzijden. Nog niet verschenen in peer-reviewed tijdschrift, maar wordt door de wiskundegemeenschap wel als correct beschouwd.

Doorbraak

2013, Helfgott: men kan $N = 10^{27}$ nemen.

Alle oneven getallen $< 10^{27}$ kunnen met computer geverifieerd worden, dus Helfgott heeft het zwakke vermoeden van Goldbach bewezen!

Het bewijs beslaat meer dan 300 bladzijden. Nog niet verschenen in peer-reviewed tijdschrift, maar wordt door de wiskundegemeenschap wel als correct beschouwd.

Als gevolg weten we ook dat *elk* getal groter dan 2 de som is van hoogstens vier priemgetallen.

Harald Andrés Helfgott

(Foto van https://webusers.imj-prg.fr/ harald.helfgott/anglais/)

VERBANDEN

Tweelingpriemvermoeden en vermoeden van Goldbach zijn gerelateerd: additieve structuur van priemgetallen.

VERBANDEN

Tweelingpriemvermoeden en vermoeden van Goldbach zijn gerelateerd: additieve structuur van priemgetallen.

Wiskundigen schatten dat ze van vergelijkbare “moeilijkheid” zijn.

VERBANDEN

Tweelingpriemvermoeden en vermoeden van Goldbach zijn gerelateerd: additieve structuur van priemgetallen.

Wiskundigen schatten dat ze van vergelijkbare "moeilijkheid" zijn.

De oplossing ligt nog niet binnen handbereik, maar nieuwe voortgang in het ene zal leiden tot inzicht in het andere probleem.

BEDANKT VOOR UW AANDACHT!

GHENT UNIVERSITY