Wiskunde 3 — partim Analyse: oefeningen

Lijnintegralen

1. Bereken de lijnintegraal

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{xdx + ydy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

waarbij

$$\mathcal{C} : P(t) = \exp t \sin t \ \mathbf{e}_x + \exp t \cos t \ \mathbf{e}_y, 0 \leq t \leq 2\pi \quad .$$

Antwoord: $\frac{1}{3}(1 - \exp(-6\pi))$

2. Bereken de lijnintegraal

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \circ \mathbf{dP}$$

waarbij

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - 2xy) \ \mathbf{e}_x + (y^2 - 2xy) \ \mathbf{e}_y$$

en $\mathcal{C}$ het stuk van de parabool $y = x^2$ van $(-2,4)$ tot $(1,1)$.

Antwoord: $-\frac{369}{10}$

3. Bereken de lijnintegraal

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \circ \mathbf{dP}$$

waarbij

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -y \ \mathbf{e}_x + x \ \mathbf{e}_y - \frac{z}{2} \ \mathbf{e}_z$$

en

$$\mathcal{C} : P(t) = \cos t \ \mathbf{e}_x + \sin t \ \mathbf{e}_y + 2t \ \mathbf{e}_z, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad .$$

Antwoord: $2\pi(1 - 2\pi)$

4. Bereken de lijnintegraal

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \circ \mathbf{dP}$$

waarbij

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{\mathbf{OP}}{|\mathbf{OP}|}$$

en $\mathcal{C}$ de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 4$ doorlopen in tegenwijzerzin.

Antwoord: 0

5. Bereken de lijnintegraal

$$\int_{\mathcal{C}} y^2 \sin^3 x \sqrt{1+\cos^2 x}\ ds$$

waarbij

$$\mathcal{C} : y = \sin x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Antwoord: $\frac{64}{105}$

6. Bereken de lijnintegraal

$$\int_{\mathcal{C}} y^2\ ds$$

waarbij $\mathcal{C}$: de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$.

Antwoord: π

7. Bepaal de coördinaten van het massamiddelpunt van een niet uniforme draad gelegen langs één winding van een cirkelvormige schroeflijn

$$[R\cos t, R\sin t, \frac{p}{2\pi}t], \quad t : 0 \to 2\pi$$

als de massadichtheid ρ evenredig is met de afstand tot de z-as.

8. Gegeven is de vlakke kromme $\mathcal{C}$ met parametervoorstelling:

$$\mathbf{P}(t) = [\sin t - t\cos t,\ \cos t + t\sin t]\ , \quad -\pi \leq t \leq \pi \quad .$$

Gevraagd:

(i) schets deze kromme;

(ii) langs de kromme $\mathcal{C}$ ligt een draad; bepaal de coördinaten van het massamiddelpunt van deze draad als de massadichtheid ρ evenredig is met het kwadraat van de afstand tot de oorsprong.

9. Bepaal de coördinaten van het massamiddelpunt van een niet-uniforme dunne draad met soortelijke massa $\rho(x, y, z)$ evenredig met de afstand tot het (x, z)-vlak, gelegen langs de kromme met parametervergelijking:

$$\mathbf{P}(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin t\ \mathbf{e}_x + a\cos t\ \mathbf{e}_y + \frac{a}{\sqrt{2}}\sin t\ \mathbf{e}_z, \quad 0 < t < \pi$$

(a: positieve constante).
Maak ook een schets van de kromme en duid het massamiddelpunt aan.

10. Bepaal de coördinaten van het massamiddelpunt van een niet-uniforme draad met soortelijke massa $\rho(x, y, z) = z$, gelegen langs de kromme met parametervergelijking:

$$\mathbf{P}(t) = a \cos t \ \mathbf{e}_1 + b \sin t \ \mathbf{e}_2 + ct \ \mathbf{e}_3, \quad 0 < t < 2\pi$$

(a, b en c drie positieve constanten).

11. Bepaal de arbeid nodig om een massadeeltje met massa m te verplaatsen langs één winding van een cirkelvormige schroeflijn

$$[R \cos t, R \sin t, \frac{p}{2\pi} t], \quad t : 0 \to 2\pi$$

in het zwaartekrachtveld $\mathbf{F}(x, y, z) = mg \ \mathbf{e_z}$.

12. Bepaal de coördinaten van het massamiddelpunt van een niet-uniforme draad met soortelijke massa $\rho(x, y, z) = z$, gelegen langs de kromme met parametervergelijking:

$$\mathbf{P}(t) = a \cos t \ \mathbf{e}_1 + b \sin t \ \mathbf{e}_2 + ct \ \mathbf{e}_3, \quad 0 < t < 2\pi$$

(a, b en c drie positieve constanten).

13. Een deeltje met massa m wordt verplaatst in het zwaarteveld (waarbij het aardoppervlak samenvalt met het XY-vlak) langs de kromme met parametervergelijking:

$$\mathbf{P}(t) = \sqrt{2} \cos t \ \mathbf{e}_1 + \sin t \ \mathbf{e}_2 + \sin t \ \mathbf{e}_3, \quad \pi < t < 2\pi$$

Bepaal de arbeid die hiervoor dient geleverd.

Lineaire DV van de eerste orde

14. (i) Een kamer met volume V bevat op het ogenblik $t = 0$ geen CO. Van dan af blaast men in de kamer lucht die $p\%$ CO bevat, met een snelheid van s dm^3 per seconde.
Het homogeen mengsel verlaat de kamer met dezelfde snelheid.
Bepaal op elk ogenblik t de concentratie $c(t)$ aan CO in de kamer.
(ii) Op een bepaald moment bedraagt de concentratie aan CO in de kamer c_0; van dan af bevat de instromende lucht geen CO meer. Hoe lang duurt het voor de concentratie aan CO in de kamer op de helft is teruggevallen?

15. Een vloeistoftank met onbeperkte capaciteit, bevat aanvankelijk V liter water waarin Z kilogram zout is opgelost.
Er stroomt zuiver water de tank binnen met een debiet van s liter per minuut. Het (door roeren) homogeen mengsel verlaat de tank met een debiet van r liter ($r < s$) per minuut.

Gevraagd:

(i) bepaal op elk ogenblik t de hoeveelheid zout in de tank;
(ii) na hoeveel tijd is de concentratie zout op de helft van de initiële concentratie teruggevallen?

16. Een vloeistoftank met een capaciteit van W liter, bevat aanvankelijk V liter ($V < W$) water waarin Z kilogram zout is opgelost.
Tijdens de eerste faze stroomt zuiver water de tank binnen met een debiet van s liter per minuut. Het (door roeren) homogeen mengsel verlaat de tank met een debiet van r liter ($r < s$) per minuut. De eerste faze stopt op het ogenblik dat de tank volledig gevuld is.
Tijdens de tweede faze bevat het instromend water zout met een concentratie van k kilogram per liter. Het uitstroomdebiet blijft onveranderd, terwijl het instroomdebiet teruggebracht wordt op eveneens r liter per minuut.
Gevraagd:

(i) Bepaal op elk ogenblik van de eerste faze de hoeveelheid zout in de tank.
(ii) Hoelang moet de tweede faze duren om de hoeveelheid zout in de tank op het einde van de eerste faze, te verdubbelen?
(iii) Schets de grafiek van het volledige verloop (eerste en tweede faze) van de hoeveelheid zout in de tank in het concrete geval waar $W = 500, V = 100, s = 10, r = 5, Z = 30, k = 1/2$.

17. In een meer met constant volume V m^3 stroomt water dat een concentratie k kg/m^3 aan polluerende bestanddelen bevat, met een debiet van r m^3/min; water stroomt ook uit het meer met hetzelfde debiet. Bovendien worden polluanten rechtstreeks in het meer geloosd met een constante snelheid P kg/min. Er wordt ondersteld dat de verontreiniging zich steeds homogeen over het meer verspreid.
Gevraagd:
(i) Bepaal de concentratie aan polluanten in het meer $c(t)$ als functie van de tijd t, aangenomen dat $c(0) = c_0$.
(ii) Op een bepaald ogenblik wordt het lozen van alle polluerende bestanddelen stopgezet ($k = P = 0$). Bereken de tijd nodig opdat de concentratie aan polluanten zou teruggevallen op de helft, respectievelijk een tiende.

18. De temperatuur van een voorwerp verandert met een snelheid die op elk ogenblik recht evenredig is met het verschil tussen de omgevingstemperatuur en de temperatuur van het voorwerp.
Een verse kop koffie heeft een temperatuur 70 graden; na 10 minuten in een eerste kamer met constante temperatuur 20 graden te hebben gestaan, is de temperatuur van de koffie teruggevallen op 40 graden.
Hierna zet men het kopje koffie in een tweede kamer waar de constante temperatuur W heerst.

Gevraagd:

(i) Bepaal op elk ogenblik $t \in [0, 10]$ de temperatuur van de koffie in de eerste kamer.
(ii) Hoe hoog dient de temperatuur W in de tweede kamer te zijn, opdat na 10 minuten in de tweede kamer te hebben gestaan, het kopje koffie terug zijn oorspronkelijke temperatuur 70 zou bereiken?
(iii) Schets de grafiek van het volledig temperatuursverloop van het kopje koffie in $0 \leq t \leq 20$.

19. De verandering per tijdseenheid van de temperatuur aan het oppervlak van een lichaam is op elk moment recht evenredig met het verschil tussen de omgevingstemperatuur en de temperatuur van het lichaam op dat moment.

Vraagstuk 1
In een omgeving van 21 graden celsius vindt men het lichaam van een

overledene en stelt vast dat het een temperatuur van 33 graden celsius heeft, en twee uur daarna nog 30 graden. Bepaal het tijdstip van overlijden onder de aanname dat een normale lichaamstemperatuur 37 graden celsius bedraagt.

Vraagstuk 2
Men vindt hetzelfde lichaam met een temperatuur van 33 graden, maar men bergt het ogenblikkelijk op in een koelkast met een temperatuur van 3 graden. Bepaal de temperatuur van het stoffelijk overschot twee uur na de ontdekking ervan.

20. (i) Een kamer met volume V bevat op het ogenblik $t = 0$ geen CO. Van dan af blaast men in de kamer lucht die $p\%$ CO bevat, met een snelheid van $s\ dm^3$ per seconde.
Het homogeen mengsel verlaat de kamer met dezelfde snelheid.
Bepaal op elk ogenblik t de concentratie $c(t)$ aan CO in de kamer.

    (ii) Op een bepaald moment bedraagt de concentratie aan CO in de kamer c_0; van dan af bevat de instromende lucht geen CO meer. Hoe lang duurt het voor de concentratie aan CO in de kamer op de helft is teruggevallen?

21. Een populatie bakteriën neemt in aantal toe recht evenredig met het aantal aanwezige bakteriën (evenredigheidsfcator a). De aanwezigheid van een toxine veroorzaakt de dood van bakteriën met een snelheid evenredig met het aantal bakteriën en evenredig met de hoeveelheid toxine (evenredigheidsfactor b).
Op het begintijdstip is de populatie bakteriën N en is er geen toxine aanwezig in de voedingsbodem. Van dan af neemt de hoeveelheid toxine toe met constante snelheid c.
Bepaal de populatie bakteriën op elk tijdstip $t > 0$ en voor $t \to +\infty$.

22. Een radioactief isotoop vervalt derwijze op elk moment de hoeveelheid materiaal die per tijdseenheid desintegreert recht evenredig is met de beschikbare hoeveelheid op dit moment. Men constateert dat van 100 mg radioactief thorium 234 na één week nog 82.04 mg rest.

Vraagstuk 1
Bepaal de halfwaardentijd van thorium 234, dit is de tijdspanne waarin de helft van de hoeveelheid radioactief materiaal is gedesintegreerd (en dus de helft overblijft).

Vraagstuk 2
Als men initieel ($t = 0$) beschikt over 100 mg thorium 234 en dagelijks 1 mg eraan toevoegt, bepaal dan de hoeveelheid radioactief materiaal na één week.

Vraagstuk 3
Als men initieel (t=0) beschikt over 100 mg thorium 234, hoeveel moet men dan dagelijks eraan toevoegen (constante hoeveelheid per dag), om steeds over 100 mg thorium 234 te beschikken?

Lineaire DV van de tweede orde

23. Een voorwerp met massa $m = 1$ beweegt aan een veer (veerconstante $k = 2$) in een visceuze middenstof (weerstandscoëfficiënt $\gamma = 3$) onder invloed van een uitwendige kracht gegeven door $F(t) = \sin 2t$.
    Op het ogenblik $t = 0$ bevindt het voorwerp zich in initiële rust.
    Gevraagd:

    - Bepaal de transiënte beweging.
    - Bepaal de evenwichtsbeweging; bepaal amplitude en faze ervan.

24. Een voorwerp met massa $m = 1$ beweegt aan een veer (veerconstante $k = 9$) in een middenstof zonder weerstand (weerstandscoëfficiënt $\gamma = 0$) onder invloed van een uitwendige kracht gegeven door $F(t) = \sin 3t$.
    Op het ogenblik $t = 0$ bevindt het voorwerp zich in initiële rust.

    Gevraagd:

    (i) bepaal op elk ogenblik t de uitwijking $u(t)$ van het voorwerp t.o.v. de evenwichtsstand;

    (ii) hoe gedraagt het voorwerp zich voor $t \to +\infty$?

25. Een voorwerp met massa $m = 1$ beweegt aan een veer (veerconstante $k = 4$) in het vacuüm (weerstandscoëfficiënt $\gamma = 0$) onder invloed van een uitwendige kracht gegeven door $F(t) = \cos 2t$.
    Op het ogenblik $t = 0$ bevindt het voorwerp zich in initiële rust.

    Gevraagd:

    (i) Bepaal op elk ogenblik $t > 0$ de uitwijking $u(t)$ van het voorwerp t.o.v. de evenwichtsstand.

    (ii) Hoe gedraagt het voorwerp zich voor zeer grote tijdswaarden?

26. Een massa van 8 kg trekt een veer $1,5$ dm uit. Het verticaal opgehangen veersysteem heeft een dempingselement dat een weerstandskracht uitoefent die recht evenredig is (evenredigheidsconstante γ) met de grootte van de snelheid van het voorwerp. Er is geen externe aandrijvingskracht.
    Op het begintijdstip wordt het voorwerp 2 dm omhoog geduwd en zonder meer losgelaten. Bepaal de beweging van het voorwerp met bespreking naargelang γ.

27. Een veersysteem met veerconstante $k = 3\ N/m$ hangt verticaal in een medium dat een weerstandskracht uitoefent die recht evenredig is met de grootte van de snelheid van het voorwerp met een massa van $2\ kg$ dat aan de veer is opgehangen. Het veersysteem wordt verder nog aangedreven door een externe kracht $(3\cos 2t - 2\sin 3t)\ N$. bepaal de evenwichtsbeweging (de zg. "steady state").

Warmtedistributie in een staaf

28. Een uniforme staaf (materiaalconstante α^2) met lengte ℓ wordt aan beide uiteinden op temperatuur 0 gehouden.
De begintemperatuur ($t = 0$) wordt gegeven door de functie $f(x) = 2\sin\frac{3\pi x}{\ell}$, $0 < x < \ell$.
Gevraagd:

    - Bepaal de initiële energie (= warmte) in de staaf.
    - Bepaal de evenwichtstoestand voor $t \to +\infty$ vooraf.
    - Bepaal de temperatuur in de staaf op elke plaats $x \in [0, \ell]$ en elk tijdstip $t > 0$.
    - Controleer de reeds gevonden evenwichtstoestand voor $t \to +\infty$ aan de hand van de oplossing.
    - Bepaal de energie (= warmte) in de staaf voor de evenwichtstoestand $t \to +\infty$; conclusie?

29. Een uniforme staaf (materiaalconstante α^2) met lengte ℓ is aan beide uiteinden geïsoleerd.
De begintemperatuur ($t = 0$) wordt gegeven door de functie $f(x) = 3\cos^2\frac{\pi x}{2\ell}$, $0 < x < \ell$.
Gevraagd:

    - Bepaal de initiële energie (= warmte) in de staaf.
    - Bepaal de evenwichtstoestand voor $t \to +\infty$ vooraf.
    - Bepaal de temperatuur in de staaf op elke plaats $x \in [0, \ell]$ en elk tijdstip $t > 0$.
    - Controleer de reeds gevonden evenwichtstoestand voor $t \to +\infty$ aan de hand van de oplossing.
    - Bepaal de energie (= warmte) in de staaf voor de evenwichtstoestand $t \to +\infty$; conclusie?

30. Een uniforme dunne staaf (materiaalconstante α^2) met lengte ℓ is aan beide uiteinden geïsoleerd.
De begintemperatuur ($t = 0$) wordt gegeven door de functie $f(x) = 1 + \cos\frac{3\pi x}{\ell}$, $0 < x < \ell$.

    Gevraagd:

    (i) Bepaal de initiële energie (= warmte) in de staaf.

(ii) Bepaal de evenwichtstoestand voor $t \to +\infty$ vooraf.

(iii) Bepaal de temperatuur in de staaf op elke plaats $x \in [0, \ell]$ en elk tijdstip $t > 0$.

(iv) Controleer de reeds gevonden evenwichtstoestand voor $t \to +\infty$ aan de hand van de bekomen oplossing.

(v) Bepaal de energie (= warmte) in de staaf voor de evenwichtstoestand $t \to +\infty$; conclusie?

(vi) Schets, op dezelfde grafiek, de begintemperatuur en de evenwichtstemperatuur.

31. Een uniforme staaf (materiaalconstante α^2) met lengte ℓ is aan beide uiteinden geïsoleerd.
De begintemperatuur ($t = 0$) wordt gegeven door de functie $f(x) = 3\cos^2 \frac{\pi x}{2\ell}$, $0 < x < \ell$.
Gevraagd:

- Bepaal de initiële energie (= warmte) in de staaf.
- Bepaal de evenwichtstoestand voor $t \to +\infty$ vooraf.
- Bepaal de temperatuur in de staaf op elke plaats $x \in [0, \ell]$ en elk tijdstip $t > 0$.
- Controleer de reeds gevonden evenwichtstoestand voor $t \to +\infty$ aan de hand van de oplossing.
- Bepaal de energie (= warmte) in de staaf voor de evenwichtstoestand $t \to +\infty$; conclusie?

32. Een gietijzeren staaf met lengte $L = 2$ heeft initieel temperatuursprofiel $f(x) = 1-x$. Vanaf $t > 0$ worden beide uiteinden op temperatuur $u = 0$ gehouden.
Bepaal de temperatuur in elk punt x van de staaf op elk tijdstip t.

33. Een gietijzeren staaf met lengte $L = 2$ heeft initieel temperatuursprofiel $f(x) = 1-x$ voor $x \in]0, 1[$, $f(x) = 0$ voor $x \in [1, 2[$. Vanaf $t > 0$ worden beide uiteinden op temperatuur $u = 0$ gehouden.
Bepaal de temperatuur in elk punt x van de staaf op elk tijdstip t.

34. Een gietijzeren staaf met lengte $L = 2$ heeft initieel temperatuursprofiel $f(x) = 1 - x$ voor $x \in]0, 1[$, $f(x) = 0$ voor $x \in [1, 2[$. Vanaf $t > 0$ wordt het linkeruiteinde op temperatuur $u_1 = \frac{1}{2}$ gehouden, het rechteruiteinde op temperatuur $u_2 = 2$.
Bepaal de temperatuur in elk punt x van de staaf op elk tijdstip t.

35. Een gietijzeren staaf met lengte $L = 2$ heeft initieel temperatuursprofiel $f(x) = 1 - x$ voor $x \in]0, 1[$, $f(x) = 0$ voor $x \in [1, 2[$. Beide uiteinden zijn geïsoleerd.
Bepaal de temperatuur in elk punt x van de staaf op elk tijdstip t.

36. Een homogene staaf met lengte $\frac{\pi}{2}$ heeft een initieel temperatuursprofiel gegeven door $f(x) = 100$ voor $0 < x < \frac{\pi}{4}$ en $f(x) = -100$ voor $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$. Vanaf $t > 0$ wordt het linkeruiteinde op temperatuur 300 graden Celsius gehouden, terwijl het rechteruiteinde geïsoleerd is.
Gevraagd:

   - Bepaal de evenwichtstoestand.
   - Bepaal de temperatuur in elk punt van de staaf op elk ogenblik t.
   - Wat gebeurt er met het sprongpunt van $f(x)$ in $x = \frac{\pi}{4}$, voor $t > 0$? Leg uit.

37. Een homogene staaf met lengte $\frac{\pi}{2}$ heeft een initieel temperatuursprofiel gegeven door $f(x) = 100$ voor $0 < x < \frac{\pi}{4}$ en $f(x) = -200$ voor $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$. Vanaf $t > 0$ wordt het linkeruiteinde op temperatuur 400 graden gehouden, terwijl het rechteruiteinde geïsoleerd is. De warmtevergelijking luidt $u_{xx} = u_t$.
Gevraagd:

   - Bepaal de temperatuur in elk punt x van de staaf op elk tijdstip t; maak een schets van de oplossing op $t = 1$, samen met de beginstand.
   - Vanaf welk tijdstip zal de temperatuur in het midden van de staaf minder dan 1% van de evenwichtstemperatuur afwijken?

Trillende snaar

38. Een elastische snaar met lengte ℓ ligt op de x-as; de uiteinden $x = 0$ en $x = \ell$ zijn vast. Op het tijdstip $t = 0$ heeft de snaar de vorm $\sin \frac{7\pi x}{\ell}$ terwijl er geen initiële snelheid is.

    Gevraagd:
    Bepaal op elk tijdstip t de uitwijking $u(x,t)$ van het punt x van de snaar t.o.v. de x-as.
    Hoe gedraagt de snaar zich voor $t \to +\infty$?

39. Een theoretische elastische snaar met lengte 1 ligt op het interval $[0,1]$ van de X-as en heeft vaste uiteinden; op $t = 0$ wordt de beginstand gegeven door de functie $f(x) = 8x$ voor $0 < x < \frac{1}{4}$, $f(x) = 4x - 2$ voor $\frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4}$, $f(x) = 4 - 4x$ voor $\frac{3}{4} \leq x < 1$, terwijl de beginsnelheid nul is. De golfvergelijking luidt: $u_{xx} = u_{tt}$.
    Bepaal de uitwijking t.o.v. de evenwichtsstand voor elk punt van de snaar op elk ogenblik $t > 0$.

40. Een theoretische elastische snaar met lengte 2 ligt op het interval $[0,2]$ van de X-as en heeft vaste uiteinden; op $t = 0$ wordt de beginstand gegeven door de functie $f(x) = \cos(\frac{\pi(1-x)}{2})$, terwijl de beginsnelheid nul is. De golfvergelijking luidt: $4u_{xx} = u_{tt}$.
    Bepaal de uitwijking t.o.v. de evenwichtsstand voor elk punt van de snaar op elk ogenblik $t > 0$.

41. Beschouw een theoretische elastische snaar met lengte 4 en $\alpha = 0.7$. Het linkeruiteinde is vastgezet, terwijl het rechteruiteinde vrij is. De snaar wordt in beweging gebracht zonder initiële snelheid, vanuit de beginstand gegeven door $f(x) = x$.
    Bepaal de uitwijking t.o.v. de evenwichtsstand voor elk punt van de snaar op elk ogenblik $t > 0$.

42. Beschouw dezelfde snaar als in voorgaande oefening, waarbij men nu, i.p.v. de gegeven functie $f(x)$ een niet nader gespecifieerde functie $g(x)$ als beginconditie gebruikt. Stel dat $u(x,t)$ dan op $t = 10$ een discontinuiteit vertoont in $x = 3$, wat weet u over de functie $g(x)$?

43. Een snaar met lengte 1, vaste uiteinden, beginstand $f(x) = 0$ en beginsnelheid $g(x) = 2x$ voor $x \in [0, \frac{1}{2}]$ en $g(x) = 2(1-x)$ voor $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ beweegt volgens de golfvergelijking $u_{xx} = u_{tt}$.
    Bepaal $u(x,t)$ m.b.v. de methode van scheiding der veranderlijken en onderzoek de eventuele discontinuïteiten van u, u_x en u_{xx}.

44. Een theoretische snaar met vrije uiteinden ligt op $t = 0$ horizontaal langs het interval $[0, 1]$ van de X-as en krijgt een beginsnelheid mee, gegeven door $u_t(x, 0) = \sin^2(\pi x)\cos(2\pi x)$. De golfvergelijking luidt $u_{xx} = u_{tt}$.
Bepaal de oplossing d.m.v. scheiding der veranderlijken.

45. Een snaar met lengte l, vaste uiteinden, beginsnelheid $g(x) = 0$ en beginstand $f(x) = \frac{hx}{a}$ voor $x \in [0, a]$ en $f(x) = \frac{h(l-x)}{l-a}$ voor $x \in [a, l]$ beweegt volgens de golfvergelijking $u_{xx} = \alpha^2 u_{tt}$.
Bepaal $u(x, t)$ m.b.v. de methode van scheiding der veranderlijken.
Onderzoek de discontinuïteiten van u_x.

46. Een snaar met lengte 1, vrije uiteinden, beginstand $f(x) = 0$ en beginsnelheid $g(x) = 2x$ voor $x \in [0, \frac{1}{2}]$ en $g(x) = 2(1 - x)$ voor $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ beweegt volgens de golfvergelijking $u_{xx} = u_{tt}$.
Bepaal $u(x, t)$ m.b.v. de methode van scheiding der veranderlijken.
Onderzoek de eventuele discontinuïteiten van u, u_x en u_{xx}.