De driedeling van een hoek

1 De drie klassieke constructieproblemen

In 430 voor Christus bereikt de oorlog tussen de Griekse stadsteden Athene, baas op zee, en Sparta, oppermachtig op het land, haar hoogtepunt. De Atheense defensie plooit zich terug achter de stadsmuren. De inwoners uit de regio zitten opgepakt in een stad onder beleg. Op dat ogenblik breekt een plaag uit. Massaal raken mensen geïnfecteerd, velen sterven. De stad stuurt een delegatie naar het heiligdom van Apollo op Delos [1] met één vraag: 'Hoe kunnen we de god plezieren en er zo voor zorgen dat de plaag stopt?' Het antwoord van de priesters van Apollo is schijnbaar éénduidig: 'Verdubbel het kubusvormig altaar van Apollo.' De Atheners construeren prompt een nieuw altaar waarvan de lengte van de ribbe het dubbel is van de lengte van de ribbe van de oorspronkelijke kubus. De plaag duurt voort en roeit een groot deel van de inwoners uit. Het is één van de voornaamste oorzaken dat Athene, wieg van de democratie, het pleit uiteindelijk verliest.
Het volume van de nieuwe kubus is niet tweemaal, maar achtmaal zo groot geworden. Om het volume van een kubus te verdubbelen moet de lengte van de ribbe vermenigvuldigd worden met $\sqrt[3]{2}$. Zaak is echter om deze ribbe uitgaande van de oorspronkelijke te construeren. Anders gezegd: gegeven een lijnstuk met een bepaalde lengte, hoe construeer je een lijnstuk waarvan de lengte vermenigvuldigd is met $\sqrt[3]{2}$.
De Griekse wiskundigen ontwikkelen een rijke meetkunde steunend op zo weinig axioma's en postulaten als mogelijk. Eenzelfde discipline leggen ze ook op aan constructies. Een constructie wordt pas voor vol aanzien als ze enkel met passer en liniaal kan worden uitgevoerd. Daarbij is de liniaal ongemarkeerd maar willekeurig lang en de passer moet bij het opheffen weer dichtklappen zodat het niet mogelijk

1. Alternatieve verhalen circuleren. In sommige verhalen zijn het de inwoners van Delos die getroffen worden door een plaag en die een delegatie naar het wereldberoemde orakel van Delphi sturen.

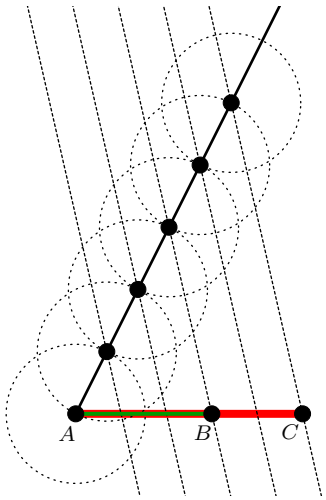
is om op snelle wijze afstanden over te brengen. Deze twee instrumenten laten volgende basisconstructies toe:

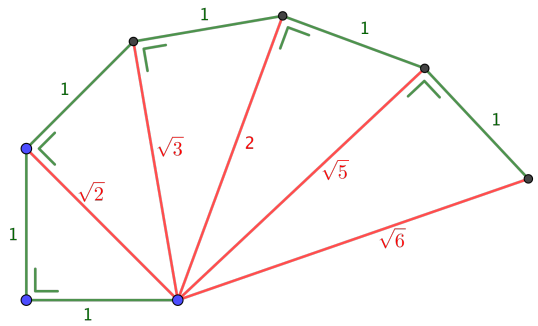
- Een rechte construeren door twee punten.
- Een cirkel construeren door een gegeven punt met een ander gegeven punt als middelpunt.
- Een gemeenschappelijk punt construeren van twee snijdende rechten, van twee snijdende of rakende cirkels en van een snijdende of rakende rechte en cirkel.

Het Delische probleem is dus terug te voeren op de vraag of je $\sqrt[3]{2}$ met passer en liniaal kan construeren. Ze is bekend geworden als één van de drie klassieke problemen uit de Griekse wiskunde. Problemen die alle te maken hebben met het kunnen construeren van een bepaald getal.
De drie klassieke problemen:

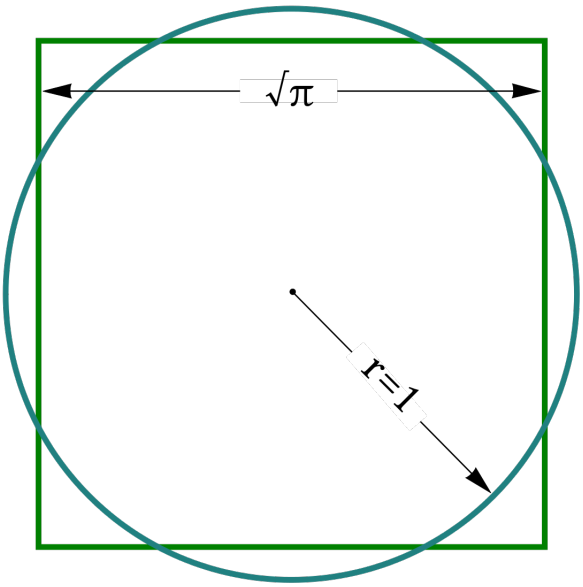
1. Het Delische probleem: de verdubbeling van de kubus.
2. De kwadratuur van de cirkel. Hier is de opgave een vierkant te construeren dat dezelfde oppervlakte heeft als een gegeven cirkel (schijf).
3. De driedeling van een willekeurige hoek. Een hoek in twee even grote hoeken delen, kan eenvoudig met een passer-en-liniaal constructie. Een willekeurige hoek in drie even grote hoeken delen, blijkt heel wat moeilijker te zijn.

Sommige getallen kan je construeren met passer en liniaal. Zo is het mogelijk om uitgaande van een lijnstuk een nieuw lijnstuk te construeren waarvan de lengte $\frac{5}{3}$ is van de lengte van het oorspronkelijke lijnstuk. Om dit te doen steunen we op de stelling van Thales. Op die manier is het mogelijk om elk rationaal getal te construeren. Via de wortelslak is het bovendien mogelijk de positieve vierkantswortel van elk natuurlijk getal te construeren.





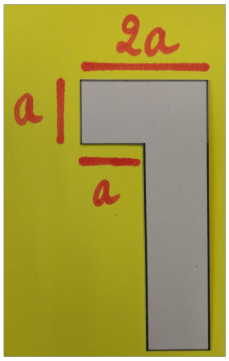
Niet alle getallen zijn echter construeerbaar. In 1837 bewijst Pierre Wantzel dat de getallen die geconstrueerd moeten worden voor de drie klassieke problemen niet te construeren zijn met passer en liniaal.

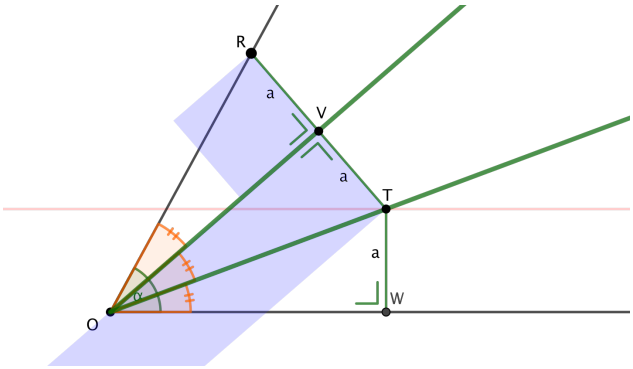


In deze bundel focussen we op het probleem van de driedeling van een willekeurige hoek. We zien een aantal constructiemethoden, waarbij dus meer dan passer en liniaal nodig zijn. Ze maken gebruik van een nieuw instrument en/of hanteren een neusis-methode: een methode waar je door schuiven en passen het constructie-instrument moet positioneren. We gaan op zoek naar de meetkundige verklaring voor de geldigheid van de constructies en proberen de instrumenten ook zelf te maken a.d.h.v. een sjabloon of onderdelen van constructie-speelgoed zoals Meccano.

2 Winkelhaak

Een eerste instrument om een hoek in drie te delen is de winkelhaak. De kop van de winkelhaak is een rechthoek waarbij de lengte tweemaal de breedte is. De rechthoek kan dus opgedeeld worden in twee vierkanten. De steel is even breed als de zijde van zo'n vierkant. We stellen de lengte van die zijde gelijk aan a.
De constructie bestaat uit twee stappen. Eerst wordt een evenwijdige getrokken op afstand a van het eerste been. Vervolgens wordt de winkelhaak zo gelegd dat het punt R op het tweede been en het punt T op de evenwijdige ligt. Bovendien moet de binnenkant van de steel door het hoekpunt O gaan.
Zie ook: `http://cage.ugent.be/~gmaes/Winkelhaak.mov`





We plaatsen de winkelhaak zoals beschreven in de constructie en duiden de punten R en T aan. Het punt V is het midden van het lijnstuk $[RT]$, het punt W is het voetpunt van de loodlijn uit het punt T op het eerste been van de hoek $\hat{\alpha}$.
Te bewijzen: $|\widehat{ROV}| = |\widehat{TOV}| = |\widehat{TOW}|$
Bewijs:

1. $\Delta ROV \cong \Delta TOV$ wegens congruentiekenmerk zijde-hoek-zijde, aangezien

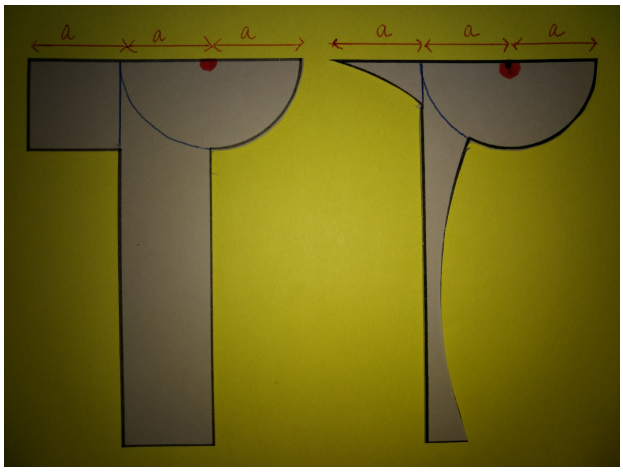
$\lvert\widehat{RVO}\rvert = \lvert\widehat{TVO}\rvert = 90°$	eigenschap winkelhaak
$\lvert RV\rvert = \lvert TV\rvert = a$	eigenschap winkelhaak
$[OV]$	gemeenschappelijke zijde

   Daaruit volgt: $|\widehat{ROV}| = |\widehat{TOV}|$
2. $\Delta TOV \cong \Delta TOW$ wegens congruentiekenmerk zijde-zijde in een rechthoekige driehoek, aangezien

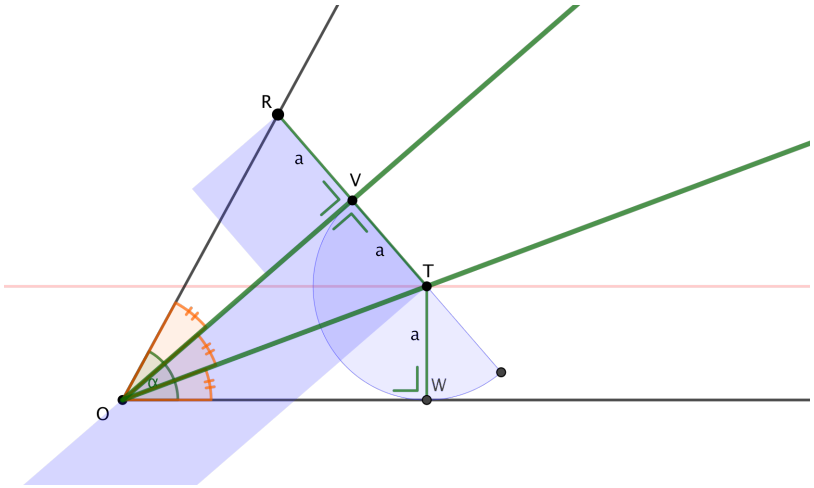
$\lvert\widehat{RVO}\rvert = \lvert\widehat{TWO}\rvert = 90°$	eigenschap winkelhaak en loodlijn
$\lvert VT\rvert = \lvert TW\rvert = a$	eigenschap winkelhaak en afgepaste afstand
$[OT]$	gemeenschappelijke zijde

   Daaruit volgt: $|\widehat{TOV}| = |\widehat{TOW}|$ □

3 Tomahawk



De tomahawk is een verbeterde versie van de winkelhaak. De winkelhaak is uitgebreid met een kwart cirkel. Daardoor is het niet meer nodig om een evenwijdige rechte als hulplijn te construeren. Op de foto zie je twee tomahawks. De tomahawk links is de basisvorm, deze rechts is een meer gestroomlijnde versie. Voor de constructie verwijzen we naar `http://cage.ugent.be/~gmaes/Tomahawk.mov` en onderstaande tekening.
Door de eis dat de halve schijf moet raken aan het eerste been van de hoek, is de afstand tussen het punt T - bij de tomahawk is dat het middelpunt van de schijf - en het eerste been steeds gelijk aan a.



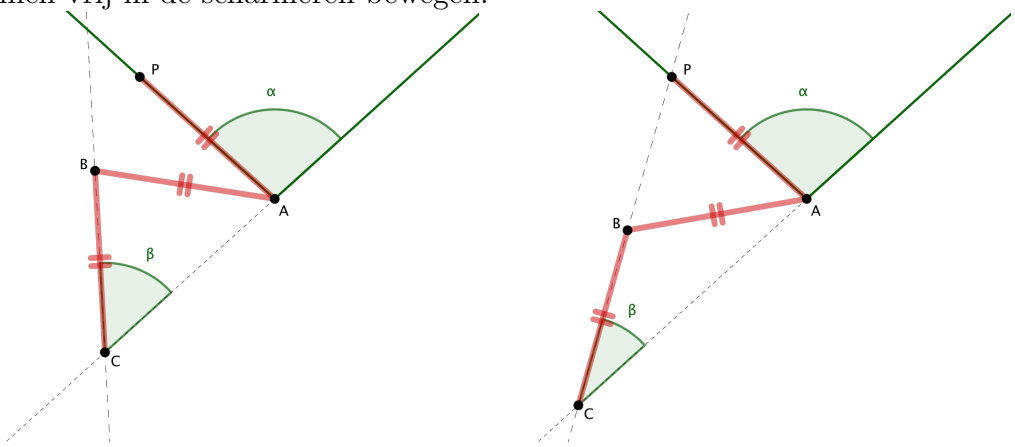
Een klein nadeel is dat het punt T niet aangeduid is op een tomahawk en je dus niet in één keer twee benen kan tekenen waardoor de drie delen ontstaan, maar enkel het been OV.

4 Vouwingen

Het is eveneens mogelijk een hoek in drie te vouwen. We verwijzen hiervoor naar het volgende filmpje: `http://cage.ugent.be/~gmaes/DriedelingVouwen.mov`. Het bewijs van deze constructie is gelijk aan dat voor de winkelhaak.

5 Drie stangen

We kunnen een hoek $\hat{\beta}$ construeren waarvan de grootte één derde is van de grootte van een gegeven hoek $\hat{\alpha}$ m.b.v. een systeem van 3 even lange stangen en 2 scharnieren waarmee stang 1 aan stang 2 en stang 2 aan stang 3 is bevestigd. De stangen kunnen vrij in de scharnieren bewegen.

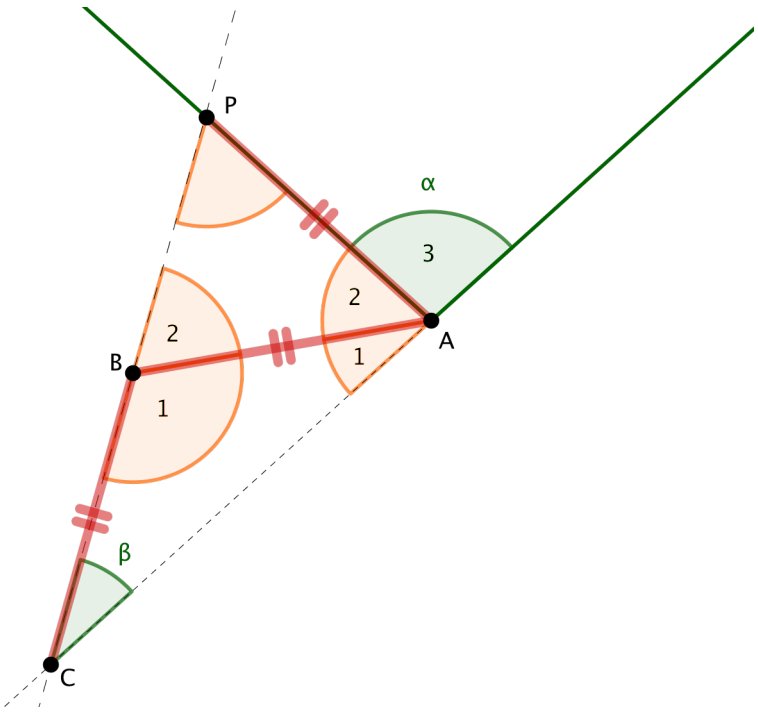


De constructie komt als volgt tot stand.
De eerste stang wordt langs één been van de gegeven hoek gelegd. Het tweede been van de hoek wordt verlengd voorbij het hoekpunt. Nu moeten stang 2 en 3 zo geplaatst worden dat het uiteinde van stang 3 op het verlengde been ligt en het eindpunt van de eerste stang in het verlengde ligt van de derde stang. Zie ook bijhorende figuur, waarbij je links een foute positie en rechts de goede positie van de stangen ziet. De hoek gevormd door de derde stang en het verlengde van het been van de gegeven hoek is één derde van de gegeven hoek.
Zie ook: `http://cage.ugent.be/~gmaes/Driestangen.mov`
Het is echter niet zo gemakkelijk om dit drie-stangen-systeem vlot te hanteren. Dit komt doordat er enerzijds nog zeer veel bewegingsvrijheid is - de richting van elke stang is immers onafhankelijk van de andere stangen - en er anderzijds aan nogal wat incidentievoorwaarden moet voldaan worden. Het zou bijgevolg handig zijn om 'vastere' systemen te vinden die gebaseerd zijn op dit drie-stangen-systeem.

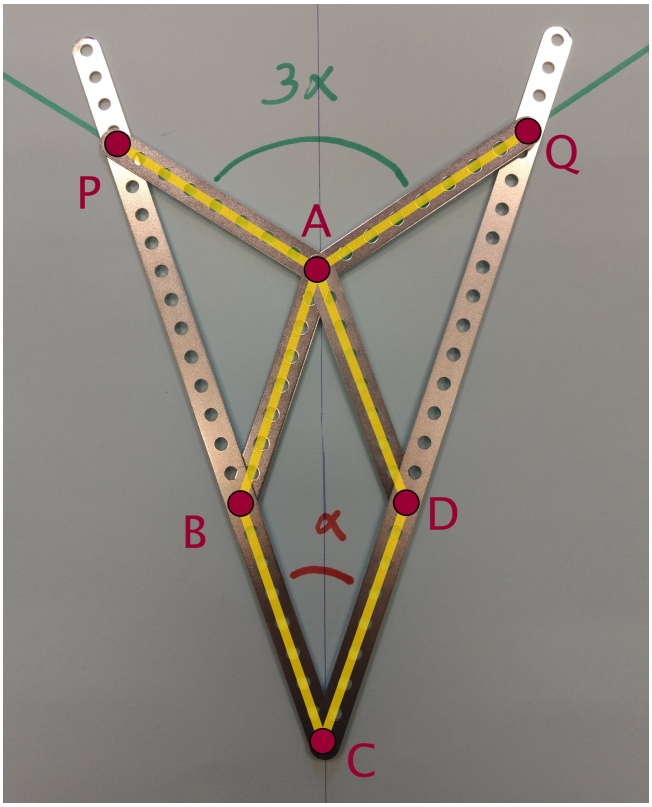
We tonen eerst aan dat deze constructie correct is.

1. ΔABC is gelijkbenig met tophoek in B, daaruit volgt dat $|\hat{A}_1| = \beta$. Dit betekent ook dat $|\hat{B}_2| = 2\beta$. Dit is zo omdat een buitenhoek van een driehoek even groot is als de som van grootes van de niet-aanliggende binnenhoeken.
2. ΔBAP is echter ook gelijkbenig met tophoek in A, waaruit volgt dat $|\hat{P}| = 2\beta$. Omdat de som van de hoekgroottes van een driehoek gelijk is aan $180°$, is $|\hat{A}_2|$ gelijk aan $180° - 4\beta$
3. Er geldt

$$\begin{aligned} &|\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| + |\hat{A}_3| = 180° \\ \Leftrightarrow &\beta + 180° - 4\beta + \alpha = 180° \\ \Leftrightarrow &3\beta = \alpha \end{aligned}$$



6 De pantograaf van Ceva



In onze zoektocht om het drie-stangen-systeem meer te verankeren in een teken-instrument botsen we op de pantograaf van Ceva. De pantograaf bestaat uit 6 stangen van gelijke lengte en twee liggers. Er zitten scharnieren in de punten A, B, C en D. De punten P en Q zijn los en kunnen dus verplaatst worden. Het punt A wordt op het hoekpunt gelegd en de stangen $[AP]$ en $[AQ]$ moeten zo langs de benen van de hoek gelegd worden dat

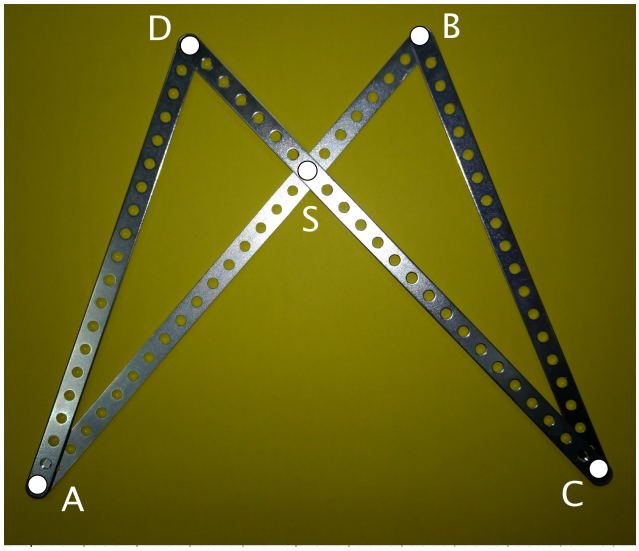
- C op de bissectrice van de hoek ligt,
- P op de ene ligger en dus in het verlengde van $[BC]$ ligt,
- Q op de andere ligger en dus in het verlengde van $[DC]$ ligt.

Het moge duidelijk zijn dat de pantograaf eigenlijk een soort dubbel drie-stangen-systeem is. Het bewijs van deze constructiemethode is dan ook nauw verwant met het bewijs geleverd in de vorige paragraaf. De pantograaf is al een vaster systeem in vergelijking met het drie-stangen-systeem. Wel moeten de punten P en Q nog steeds op de liggers gepast worden. Dit kan verbeterd worden door de liggers te voorzien van gleuven en de punten P en Q te laten glijden. We zijn echter op zoek naar een instrument dat enkel gebruik maakt van stangen en scharnieren.

7 De driedeler van Kempe

7.1 Antiparallellogram

Een antiparallellogram is een niet-convexe vierhoek, waarbij de 'overstaande' zijden - zijden die geen hoekpunten gemeenschappelijk hebben - twee aan twee even lang zijn.



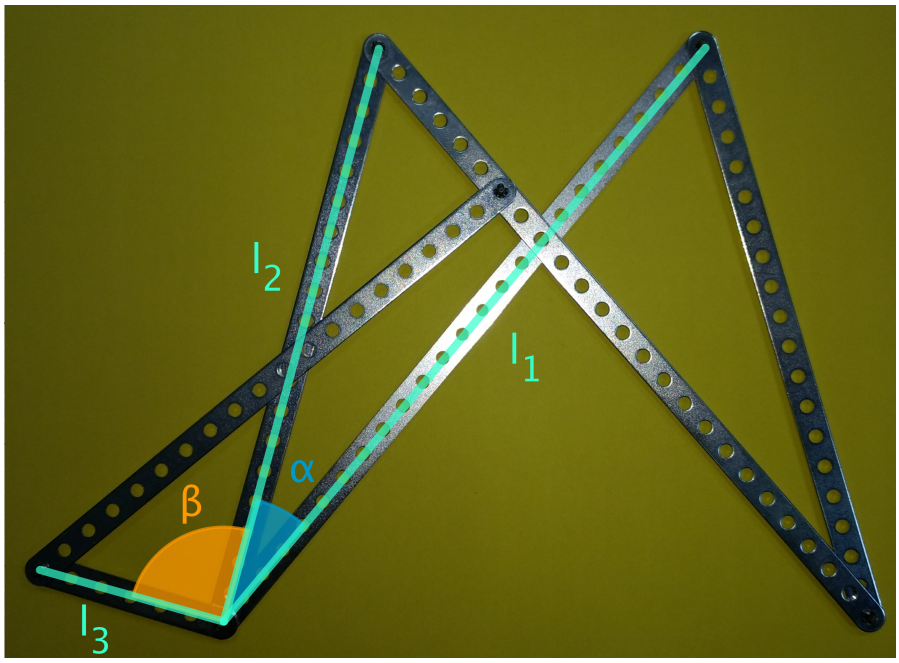
De vier zijden van een antiparallellogram kunnen niet alle dezelfde lengte a hebben. De punten D en B zouden dan beide op een cirkel moeten liggen met straal a en middelpunt A en eveneens op de cirkel met straal a en middelpunt C. Daaruit volgt dat ofwel D samenvalt met B, waardoor er geen vierhoek ontstaat, ofwel de vierhoek $ABCD$ een ruit vormt, maar dat is dan weer een convexe figuur. Eén paar zijden is dus langer dan de andere. De twee langste overstaande zijden snijden elkaar in het punt S.
We kunnen aantonen dat $\Delta ADS \cong \Delta CBS$.
Immers $\Delta ADB \cong \Delta CBD$ zijn congruent, wegens zijde-zijde-zijde (definitie antiparallellogram en gemeenschappelijke zijde). Daaruit volgt dat de hoeken $\widehat{DAB}$ en $\widehat{BCD}$ even groot zijn. Het derde paar overeenkomstige hoeken van de twee driehoeken ADS en CBS zijn dus ook even groot. De twee driehoeken zijn dan congruent op basis van het congruentiekenmerk hoek-zijde-hoek.

We kunnen ook aantonen dat de diagonalen van dit antiparallellogram $[AC]$ en $[DB]$ evenwijdig zijn aan elkaar. $\Delta ASC \sim \Delta BSC$ omdat het beide gelijkbenige driehoeken zijn met een even grote tophoek. De basishoeken van beide driehoeken zijn dus even groot i.h.b. $|\widehat{SAC}| = |\widehat{SBD}|$. Dit zijn even grote verwisselende bin-

nenhoeken als we de rechte AB als snijlijn van de rechten DB en AC zien. Daaruit volgt dat de diagonalen DB en AC evenwijdig zijn.

7.2 Gelinkte antiparallellogrammen

We kunnen aan een gegeven antiparallellogram een nieuw antiparallellogram linken, waarbij een kortste zijde van de gegeven antiparallellogram een langste zijde van de nieuwe antiparallellogram wordt. Een andere (korte) zijde van het nieuwe antiparallellogram is een deellijnstuk van een lange zijde van het gegeven antiparallellogram.



Aangezien we op zoek zijn naar een instrument om een hoek in drie gelijke delen te delen, willen we dat $\alpha = \beta$. Bij de gelinkte antiparallellogrammen op de foto is dat duidelijk niet het geval.
Dit zal zo zijn als de twee antiparallellogrammen gelijkvormig zijn. Dat is echter ook een nodige voorwaarde, aangezien beide parallellogrammen al een hoek hebben met gelijke grootte namelijk de hoek die gemeenschappelijk is. Hieruit volgt dus:

$$\begin{aligned} \alpha = \beta &\Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_2}{l_3} \\ &\Leftrightarrow l_2^2 = l_1 l_3 \end{aligned}$$

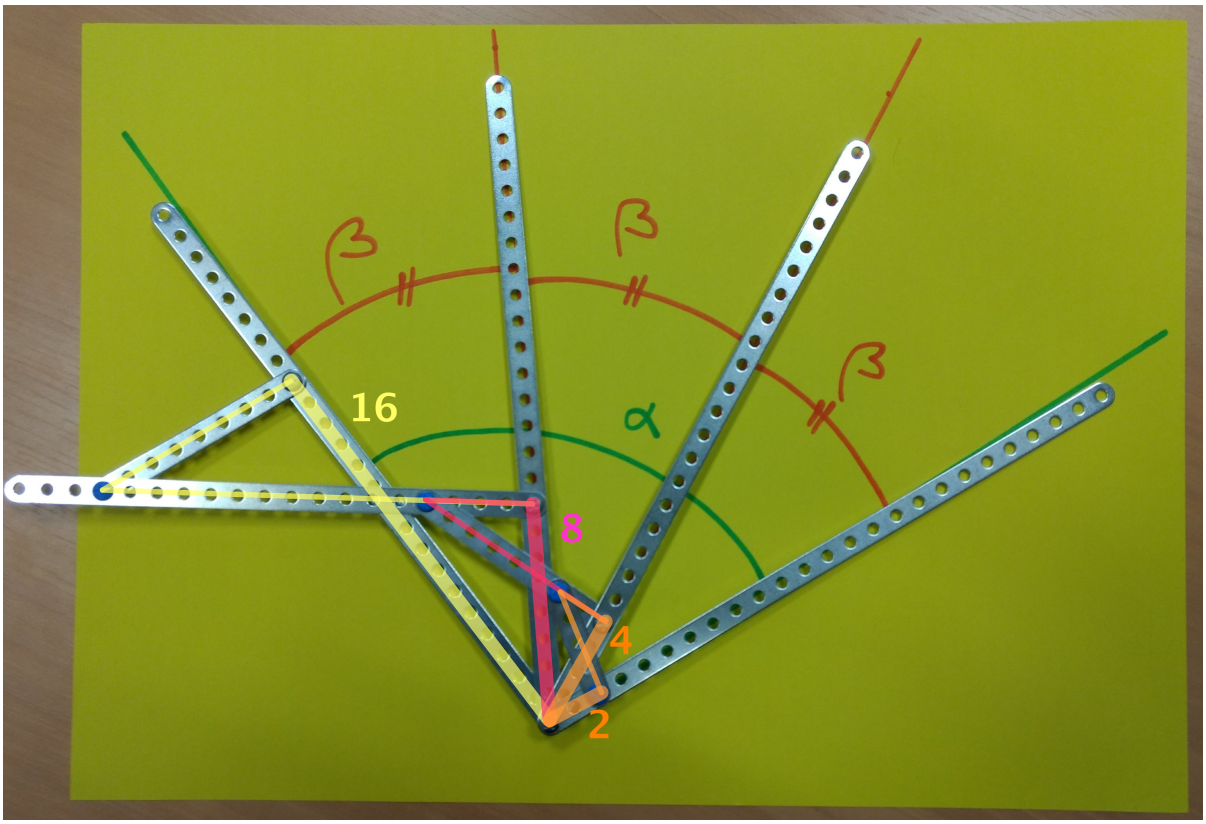
Anders gezegd: l_2 moet middelevenredig zijn tussen l_1 en l_3.

7.3 De driedeler van Kempe

De driedeler van Kempe bestaat uit 3 aan elkaar gelinkte antiparallellogrammen, op de wijze zoals in het vorig punt besproken. De drie antiparallellogrammen hebben respectieve afmetingen l_1 en l_2, l_2 en l_3, l_3 en l_4 en wel zo dat

- l_2 middelevenredig is tussen l_1 en l_3
- l_3 middelevenredig is tussen l_2 en l_4

We krijgen een rij van 4 getallen l_1, l_2, l_3, l_4, waarbij de tweede en de derde term het meetkundig gemiddelde zijn van de termen die hen omringen. De vier getallen vormen dus een meetkundige rij. Een voorbeeld hiervan vind je terug op onderstaande foto.



8 Bronnen

Yates, R.C. (1941) The trisection Problem, *National Mathematics Magazine*, Vol. 15, No. 6 , pp. 278-293

Cundy, H.M., Rollett, A.P. (1951) Mathematical Models,*Oxford University Press*

O'Rourke, J. (2011) How to fold it, *Cambridge University Press*

https://en.wikipedia.org/wiki/Squaring_the_circle

9 Didactische aanpak

Je kan de diverse paragrafen en constructies in verschillende volgordes aanbieden. Hier beschrijven we een mogelijke aanpak, met bijhorende onderzoeksvragen. De lijst van onderzoeksvragen is verre van exhaustief. Je kan de leerlingen individueel of in groepjes laten werken. Het voordeel van het werken in kleine groepjes (2 tot 4 leerlingen) is dat leerlingen terzelfdertijd verschillende meetkundige situaties kunnen bekijken. Ook kunnen ze door de bevruchting van ideëen mogelijks sneller tot de gevraagde bewijzen, redeneringen en concrete constructies komen.
De lessenreeks kan starten met een korte inleiding over de drie klassieke constructieproblemen. Dat kan je doen via een onderwijsleergesprek of door de leerlingen zaken daaromtrent te laten opzoeken. Het is in ieder geval wel interessant om voorbeelden van construeerbare getallen zoals breuken en vierkantswortels kort te behandelen.
De eerste 3 methodes vertonen een nauwe samenhang. Je kan ervoor opteren om slechts één of twee van deze te behandelen. De volgorde waarin ze behandeld wordt, kan ook gekozen worden. Zo lijkt het ons eveneens een goed idee om te starten met het vouwen om zo bij de winkelhaak te belanden.
Zo horen ook het drie-stangen-systeem en de pantograaf van Ceva samen. De volgorde waarin ze aan de leerlingen aangeboden worden, maakt niet zoveel uit. Eventueel kunnen ze terzelfdertijd behandeld worden. Wij hebben hier geopteerd om te werken van het 'losser' naar het 'vaster' instrument. Het lijkt ons echter ook een goed idee om te starten met de pantograaf en dan op zoek te gaan naar de essentie van het instrument om zo te belanden bij de drie stangen. Het bewijs voor de constructiemehtode met de pantograaf verloopt analoog als dat voor de drie stangen.
Het zoeken naar een stangensysteem met enkel scharnieren en zonder glijden brengt ons bij het laatste instrument: de driedeler van Kempe. Deze is gebaseerd op gelinkte antiparallellogrammen. Eén antiparallellogram is op zich al een interessant voorwerp, m.b.v. deze eenvoudige figuur kunnen we een ellipsograaf maken. Het is interessant om zeker deze onderzoeksvraag door de leerlingen te laten behandelen.

9.1 De drie klassieke constructieproblemen

Onderzoeksvragen:

1. *Gegeven een lijnstuk construeer dan een lijnstuk waarvan de lengte $\frac{7}{4}$ respectievelijk $\sqrt{5}$ keer zo groot is.*
2. *Door de eeuwen heen hebben amateur-wiskundigen geclaimd dat ze er wel in geslaagd waren om de driedeling met passer en liniaal uit te voeren. Dat gebeurde ook nog nadat Wantzel zijn bewijs had geleverd. In dit filmpje (`https://www.youtube.com/watch?v=jXmeQF4vtrs`) voert een persoon zulk een driedeling uit. Controleer deze methode voor een stompe hoek. Verklaar waarom je op die manier geen drie even grote hoeken krijgt?*
3. *Je kan niet elke hoek in drie delen met passer en liniaal ; voor een aantal hoeken lukt dit echter wel. Welke hoeken kan je wel in drie delen m.b.v. passer en liniaal?*

9.2 De winkelhaak

1. De leerlingen bekijken het filmpje met de constructie van de driedeling m.b.v. de winkelhaak.
2. De leerlingen voeren voor verscheidene hoeken de driedeling uit m.b.v. de winkelhaak.
   Onderzoeksvraag: Heeft het instrument zijn beperkingen? Kan je m.a.w. voor bepaalde hoeken de winkelhaak niet gebruiken? Kan je het instrument aanpassen zodat je het wel voor die hoeken wel kan gebruiken?
3. De leerlingen bewijzen de geldigheid van de constructie.

9.3 De tomahawk

1. De leerlingen krijgen de gestileerde versie van een tomahawk en zoeken uit hoe ze deze kunnen gebruiken bij de driedeling van een hoek.
2. De leerlingen bekijken het filmpje met de constructie van de driedeling m.b.v. de tomahawk.
3. De leerlingen leggen het verband tussen tomahawk en winkelhaak en verkrijgen zo een zeer sterk gelijkend bewijs voor de constructie.

Onderzoeksvragen:

1. *De tomahawk heeft een voordeel t.o.v. de winkelhaak. Welk? Ze heeft ook een nadeel. Welk?*

2. *Heeft het instrument zijn beperkingen? Kan je m.a.w. voor bepaalde hoeken de tomahawk niet gebruiken? Kan je het instrument aanpassen zodat je het wel voor die hoeken kan gebruiken?*
3. *Kan je met constructiemateriaal (Lego, Meccano, Knex) een tomahawk maken?*

9.4 Vouwen

1. De leerlingen bekijken het filmpje of de leerkracht toont éénmaal voor hoe het moet.
2. De leerlingen voeren de vouwconstructie uit.
3. De leerlingen bewijzen de geldigheid van de constructie.

Onderzoeksvraag:
Kan je ook het Delisch probleem oplossen door te vouwen? Kan je m.a.w. $\sqrt[3]{2}$ *vouwen? Zoek dit op.*

9.5 Drie stangen

1. De leerlingen bekijken het filmpje of de leerkracht toont éénmaal voor hoe het moet.
2. De leerlingen maken een drie-stangen-systeem.
3. De leerlingen voeren voor diverse hoeken de constructie m.b.v. het drie-stangen-systeem uit.
4. De leerlingen bewijzen de geldigheid van de constructie.

Onderzoeksvragen:

1. *Als* α *groter wordt, wordt* β *ook groter (zie figuur op pagina 7). De eerste en de tweede stang bewegen dan naar elkaar toe. Is er een hoek waarbij de eerste en de tweede stang samenvallen? Zo ja, voor welke hoek is dat?*
2. *Als de stang 1 over stang 2 schuift bij het groter maken van de hoek* $\hat{\alpha}$*, is er één positie waarbij de eerste stang de zwaartelijn is van de driehoek gevormd door de twee andere stangen en het verlengde van het been van de hoek* $\hat{\alpha}$*. Hoe groot is* α *voor die positie?*
3. *Welke figuur vormen de stangen voor* α *gelijk aan* $180°$*?*
4. *Maak een Geogebra-bestand waarbij een hoek in drie wordt gedeeld m.b.v. het 3-stangen systeem. Dit Geogebra-bestand kan ook hulp bieden bij het onderzoek op bovenstaande vragen.*
5. *Bekijk de constructie met een gemarkeerde liniaal. Leg het verband met de drie-stangenmethode.*

9.6 De pantograaf van Ceva

1. De leerlingen zoeken op wat de pantograaf van Ceva is en hoe deze kan gebruikt worden om een hoek in drie te delen.
2. De leerlingen maken zelf een pantograaf met constructiemateriaal.
3. De leerlingen voeren voor diverse hoeken de driedeling uit m.b.v. de pantograaf van Ceva.
4. De leerlingen bewijzen de geldigheid van de constructie.

Onderzoeksvragen: De pantograaf van Ceva kan ook als tekenaap gebruikt worden. De volgende vragen gaan over tekenapen of pantografen.

1. *Wat is een tekenaap? Hoe werkt het apparaat?*
2. *Maak m.b.v. constructiemateriaal een tekenaap die de afmetingen van een tekening met respectievelijk twee, drie en anderhalf vermenigvuldigt?*
3. *Maak een Geogebra-bestand omtrent een tekenaap, waarbij je de vergrotingsfactor kan wijzigen.*

9.7 De driedeler van Kempe

1. De leerlingen maken zelf een antiparallellogram.
2. De leerlingen bewijzen dat het antiparallellogram twee congruente driehoeken vormt.
3. De leerlingen maken zelf gelinkte antiparallellogrammenen. Ze experimenteren met de vorm en proberen even grote hoeken te bekomen.
4. De leerlingen stellen het verband tussen de drie lengtes van staven bij twee gelinkte antiparallellogrammen op als de overeenkomstige hoeken van de antiparallellogrammen even groot moeten zijn.
5. De leerlingen kennen het verband tussen de verschillende lengtes van staven bij een driedeler van Kempe.
6. De leerlingen kunnen een driedeler van Kempe maken.

Onderzoeksvragen:

1. *Kunnen de vier zijden van een antiparallellogram even lang zijn? Anders gezegd, bestaat er zoiets als een antiruit?*
2. *Wat is de onderlinge ligging van de diagonalen van een antiparallellogram? Bewijs dit.*
3. *We beschouwen de lengten van de zijden namelijk l_1 en l_2. Wat is de maximale en minimale lengte die de diagonalen van een antiparallellogram kunnen hebben?*

4. *De leerlingen maken een Geogebra-bestand omtrent twee gelinkte antiparallellogrammen waarbij ze de drie lengtes van de staven kunnen wijzigen. Ze kunnen dit bestand gebruiken bij onderzoek van bovenstaande vragen.*
5. *We beschouwen twee gelijkvormige, gelinkte antiparallellogrammen. Voor welke hoek θ zal het aanhechtingspunt P samenvallen met het snijput S van de twee lange zijden van het grote antiparallellogram?*
6. *Beschouw één antiparallellogram. Pin een korte zijde vast. Wat is dan de meetkundige plaats van het snijpunt S?*
   (a) *Maak een tekening m.b.v. een antiparallellogram.*
   (b) *Formuleer een vermoeden.*
   (c) *Maak een tekening in Geogebra. Gebruik het spoor om de kromme die het punt S aflegt te tekenen.*
   (d) *Toon je vermoeden aan.*