La ley asintótica de los números primos

Jasson Vindas Díaz
Universiteit Gent
jasson.vindas@ugent.be

Academia Nacional de Ciencias
26 de noviembre de 2025
San José, Costa Rica

- Los **números primos** figuran entre los objetos **más importantes** de toda la matemática
- Los matemáticos han estado obsesionados con ellos por miles de años

¿Qué son los primos?

- Recordemos que un número natural mayor que 1 es primo si solamente es divisible por 1 y por sí mismo

los primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Teorema (fundamental de la aritmética)
Todo número entero se puede escribir como un producto de potencias de números primos.

¿Por qué son importantes los primos?

- Los números primos son los bloques con los que se pueden construir todos los números naturales en base a multiplicación ← importancia matemática

Ejemplos: $120 = 2^3 \times 3 \times 5$; $3828667 = 29 \times 47 \times 53^2$

$7919 = 1 \times 7919$ ← milésimo primo

- En general, números primos grandes son difíciles de detectar ← importancia en aplicaciones

$\boxed{\text{En nuestra era digital los números primos son herramientas cruciales para codificar información de una manera segura}}$

¿Cuántos números primos existen?

Teorema (Euclides, 300 a.C) El conjunto de números primos es infinito.

Demostración: Por reducción al absurdo.

- Supongamos que solo hay una cantidad finita de primos $p_1 (=2), p_2 (=3), p_3, p_4, \ldots, p_n$.
- Considere: $N = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n$, mas grande que todo primo
- N no es divisible por ningún p_j, porque de serlo, lo sería también $N - p_1 \cdots p_n = 1$.
- N no es ningún primo, por lo tanto es compuesto, por lo tanto N es divisible por algún p_j $\boxed{\text{Contradicción } \Rightarrow\Leftarrow}$

¿Cómo se comportan los números primos?

A primera vista tienen un comportamiento caótico, imposible de predecir:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

¿Cómo se comportan los números primos?

El matemático Zagier tiene una manera interesante de referirse al comportamiento de los primos:

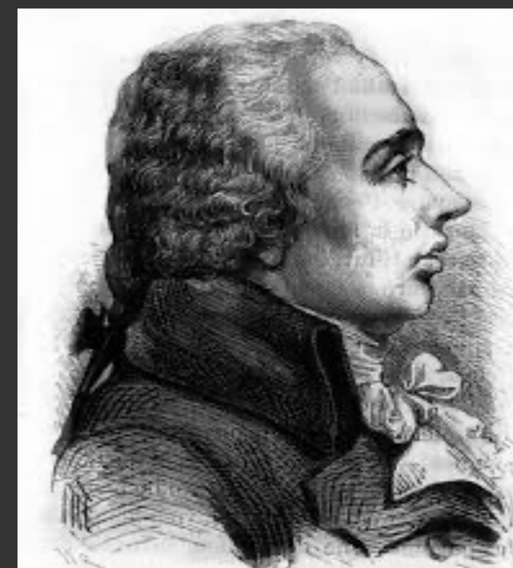
"Los números primos crecen como la malo hierba entre los números naturales, aparentemente sin obedecer ninguna ley más que el azar, y nadie puede predecir donde el siguiente primo crecerá.

Sin embargo, ellos también muestran una regularidad sorprendente, tanto así que hay leyes que gobiernan su comportamiento y que ellos obedecen con una disciplina casi militar"

¿Cómo se comportan los números primos?

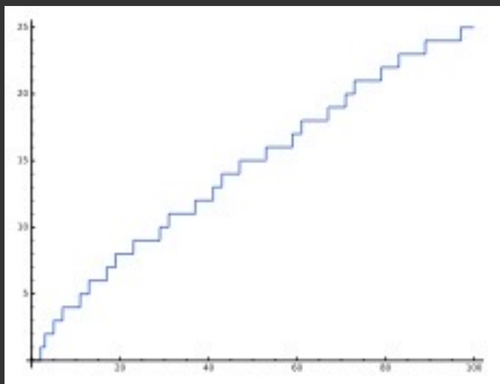
- Vistos como individuos: comportamiento impredecible
- Vistos como conjunto: patrones estadísticos sorprendentes
- Los primeros en notar estos patrones fueron Gauss (1792) y Legendre (1797)

príncipe de las matemáticas

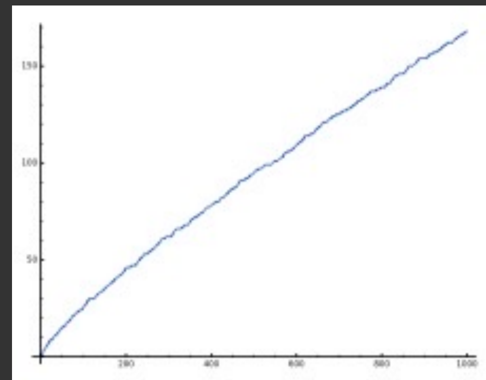


La ley asintótica de los primos: conjetura

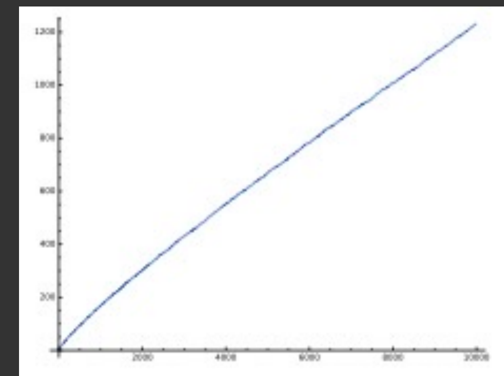
$\pi(x) =$ cantidad de primos $\leq x$



$\pi(x)$: $1 \leq x \leq 100$



$\pi(x)$: $1 \leq x \leq 1000$



$\pi(x)$: $1 \leq x \leq 10\,000$

Conjetura (Gauss-Legendre)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \quad x \to +\infty$$

$$\left(\text{es decir } \lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1\right)$$

Ley asintótica: un problema abierto por un siglo

- La verificacion de la veracidad de la ley asintótica de repartición de los números primos se tardo nada menos que alrededor de un siglo
- La primera esperanza de progreso vino en 1852:

Cotas de Chebyshev:

$$(0{,}92)\cdot \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq (1.10)\,\frac{x}{\ln x}$$

para x suficientemente grande

El camino a la ley asintótica: ideas revolucionarias

- En 1859, Riemann publica una influyente memoria donde diseña una posible ruta hacia la ley de los primos.
- Su idea es conectar los primos con la llamada en su honor función zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1$$

y extendida (de cierta forma) a $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

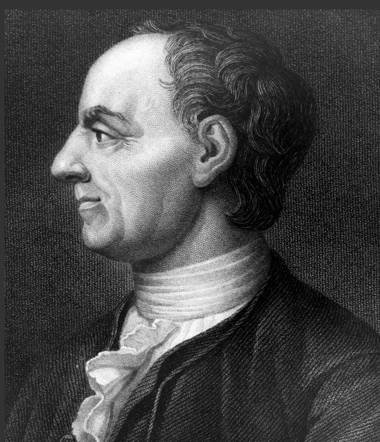
La función zeta: introducida por Euler

Esta función fue introducida por Euler en 1737

para $s \in \mathbb{R}$, $s>1$.

Producto de Euler: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$

codifica la estructura multiplicativa



Teorema (Euler) $\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = +\infty$

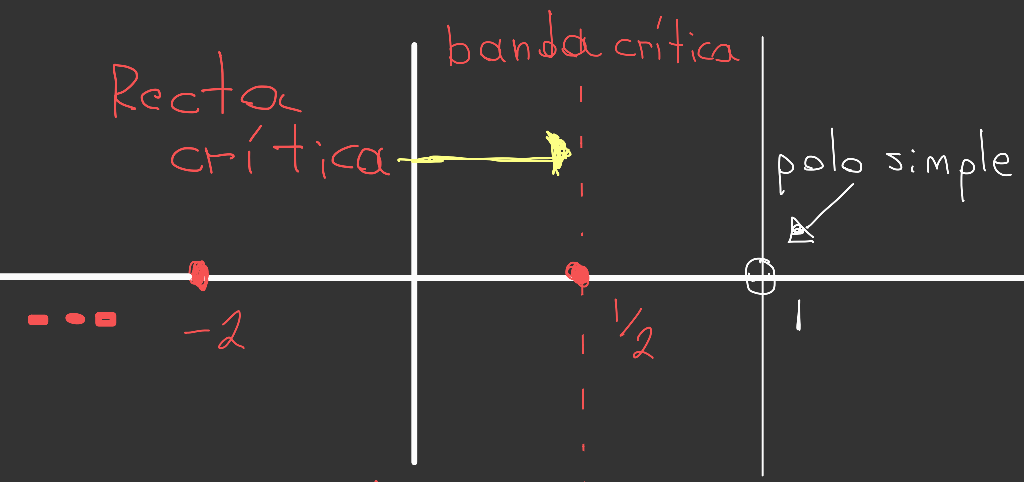
La hipótesis de Riemann

Ecuación funcional

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s)$$

producto de Euler

$$\zeta(s) = \prod_{p}^{+\infty} \frac{1}{1-p^{-s}}$$



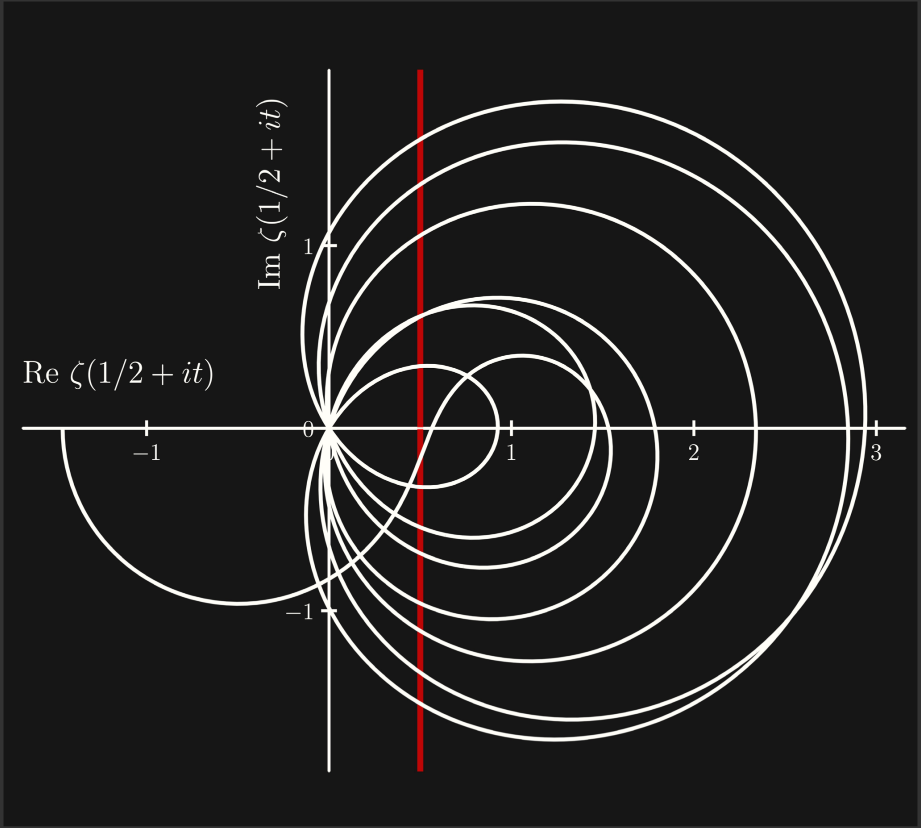
ceros triviales $s = -2, -4, -6, \ldots$

Hipótesis de Riemann

Todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$ se encuentran sobre la línea

$$\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$$

Gráfico de $\zeta(\frac{1}{2}+it)$



Hardy probó en 1914 que $\zeta(s)$ tiene un número infinito de ceros en la recta crítica $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Respuesta al problema centenario

Finalmente después de un siglo, el matemático belga de la Vallée Poussin y el matemático francés Hadamard fueron capaces de demostrar independientemente la conjetura de Gauss y Legendre ultilizando la función zeta de Riemann

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

Teorema de los números primos (de la Vallée Poussin y Hadamard, independientemente, 1846).

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \quad x \to +\infty$$

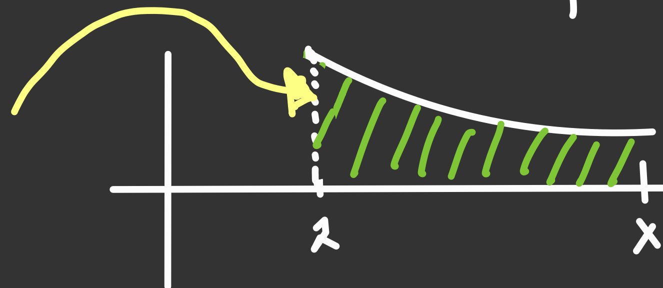
x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	error relativo
100	25	21.71	13.13%
1000	168	144.9	13.83%
10000	1229	1086	11.66%
100000	9592	8685	9.45%

Problema importante: Desde la entonces los matemáticos se han dedicado a tratar de mejorar el error en la aproximación de $\pi(x)$.

El resto en el TNP (teorema números primos)

Tratemos de encontrar mejores aproximaciones para $\pi(x)$.

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$



$$\sim \frac{x}{\ln x}$$

Problema del término de error en el TNP

Encuentre una función $E(x)$ t.q para alguna constante $C>0$:

$$|\pi(x) - Li(x)| \leq C \cdot E(x)$$

(escribimos: $\pi(x) - Li(x) \ll E(x)$)

La hipótesis de Riemann y el resto en el TNP

- Recordemos que la hipótesis de Riemann es

$$\operatorname{Re} s > \frac{1}{2} \Rightarrow \zeta(s) \neq 0$$

- Uno puede demostrar:

La hipótesis de Riemann es verdadera si y solo si

$$\pi(x) - Li(x) \ll E(x) = x^{1/2+\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Nota: Littlewood probó que no es posible con $\varepsilon = 0$

El TNP original y el término de error

El teorema de de la Vallée Poussin y Hadamard

Resto en TNP

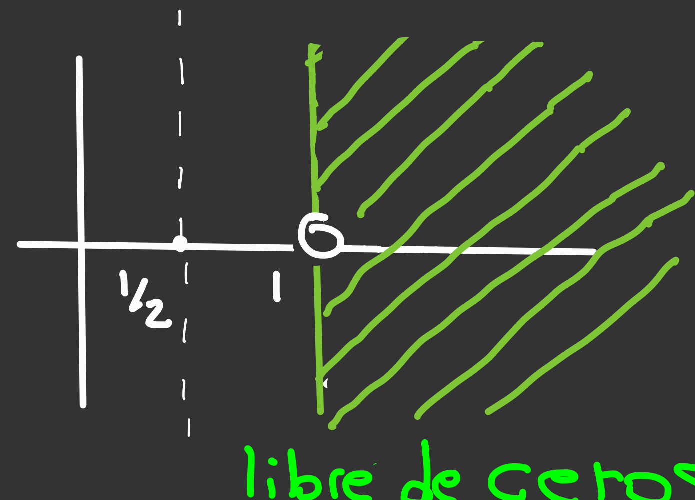
$$\pi(x) - Li(x) << E(x)$$

con $E(x)$ una función tal que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{E(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 0$$

Ceros de ζ de Riemann

$$\mathrm{Re}\, s \geq 1 \Rightarrow \zeta(s) \neq 0$$



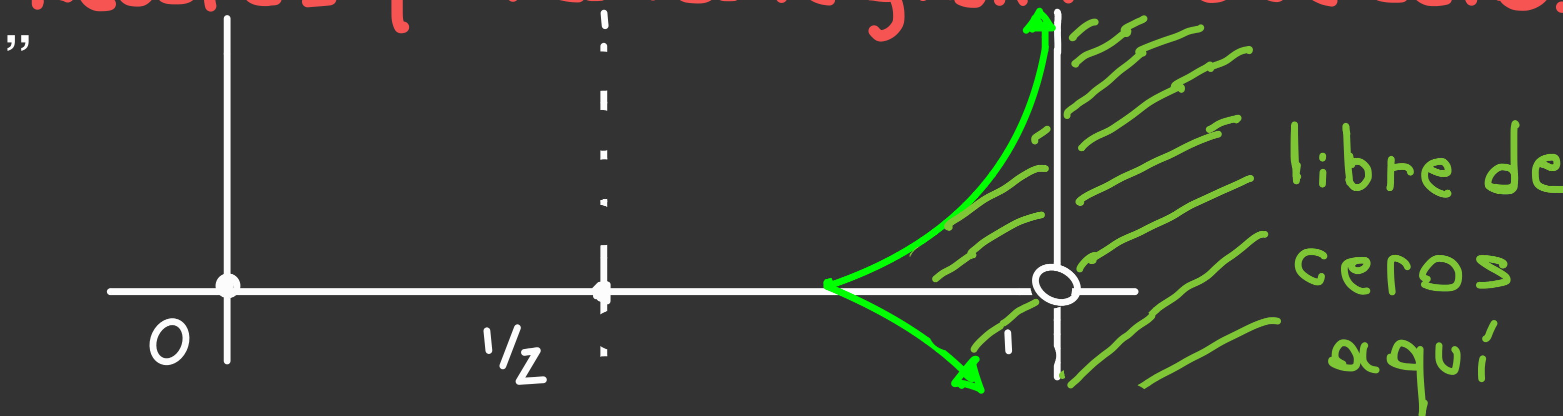
Récords para el término de error en el TNP

$$\pi(x) - Li(x) \ll E(x)$$

Vinogradov

		
de la Vallée Poussin 1897	Littlewood 1922	Vinogradov-Korobov 1958
$E(x)$	$E(x)$	$E(x)$
$x\exp\left(-a(\ln x)^{1/2}\right)$	$x\exp\left(-a(\ln x \ln\ln x)^{1/2}\right)$	$x\exp\left(-a\frac{(\ln x)^{3/5}}{(\ln\ln x)^{1/5}}\right)$

Récords para la región libre de ceros



de la Vallée Poussin 1897	Littlewood 1922	Vinogradov-Korobov 1958
$\zeta(\sigma+it)\neq 0$	$\zeta(\sigma+it)\neq 0$	$\zeta(\sigma+it)\neq 0$
$1-\frac{c}{\ln(2+\lvert t\rvert)}\leq\sigma$	$1-\frac{c\ln\ln(3+\lvert t\rvert)}{\ln(2+\lvert t\rvert)}\leq\sigma$	$1-\frac{c}{(\ln(2+\lvert t\rvert))^{2/3}(\ln\ln(3+\lvert t\rvert))^{1/3}}\leq\sigma$

La hipótesis de Riemann: enigma sin resolver

- Inicios de siglo XX: problema #8 lista de David Hilbert (solo 3 de 23 permanecen sin solución).
- Inicios siglo XXI: problema #6 lista de problemas del milenio (6 de 7 permanecen sin resolver)

Hilbert: "si despertara alguna vez después de dormir por 1000 años, mi primera pregunta sería: ¿ya ha sido demostrada la hipótesis de Riemann?

Los primos generalizados de Beurling (1937)

- Fueron introducidos para estudiar que tan dependiente es el TNP de la estructura aditiva de los enteros.

Los primos generalizados de Beurling (1937)

- Fueron introducidos para estudiar que tan dependiente es el TNP de la estructura aditiva de los enteros.
- Primos generalizados: cualquier sucesión

$$1 < p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \cdots \leq p_k \leq \cdots \longrightarrow +\infty$$

- Números generalizados: productos de primos generalizados

$$1 = n_0 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots \leq n_k \leq \cdots \longrightarrow +\infty$$

Los objetos centrales en la teoría de Beurling

$$\pi(x) = \sum_{p_k \leq x} 1, \quad N(x) = \sum_{n_k \leq x} 1, \quad \zeta(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n_k^s}$$

Ejemplo: Tomemos como los primos generalizados los primos ordinarios impares.

- $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$
- $N(x) = \#\text{impares} \leq x \sim \dfrac{x}{2}$

Falla de la hipótesis de Riemann en este contexto

Teorema (Landau, 1924) Si para algún $A>0$ and $0<\eta<1$

(1) $N(x) - Ax \ll x^{\eta}$ entonces

(2) $\pi(x) - Li(x) \ll x \cdot \exp(-\alpha\sqrt{\ln x})$

Teorema (Diamond, Montgomery, Vorhauer, 2006)

Existe un sistema de números generalizados tal que (1) y (2) valen, pero para el $\zeta(\sigma+it)=0$ una infinidad de veces sobre la curva

$$\sigma = 1 - \frac{c}{\ln(2+|t|)}$$

Validéz de Riemann con irregularidades

Teorema (Balazard 1999, Hilberdink-Lapidus 2006) Si ($\frac{1}{2} \leq \eta < 1$)

(3) $\pi(x) - Li(x) \ll x^{\eta}$ entonces

(4) $N(x) - Ax \ll x \cdot \exp\left(-b\sqrt{\ln x \ln\ln x}\right)$ con $b > \sqrt{2(1-\eta)}$

Teorema (Broucke, Debruyne, Vindas, 2020, 2024)

Existe un sistema de números generalizados tal que $\pi(x) - Li(x) \ll \sqrt{x}$,

pero para el cual la acotación (4) no puede ser mejorada