Note Title 8/18/2009

Jasson Vindas Díaz

Department of Pure Mathematics & Computer Algebra
Ghent University

SOBRE ALGUNOS TEOREMAS TAUBERIANOS Y SUS VERSIONES DISTRIBUCIONALES

Presentado en:

Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

setiembre 16, 2009

1. Introducción

El objetivo de estas notas es dar una breve introducción a las ideas básicas de la Teoría Tauberiana. Discutiremos tres teoremas tauberianos, algunas de sus aplicaciones y recientes generalizaciones.

El nombre "tauberiano" siempre viene asociado a un teorema de tipo Abeliano. En general un teorema de tipo abeliano es aquel que obtiene información asintótica después de aplicar una transformación a una función o serie. Por otro lado, los teoremas tauberianos son "recíprocos" de teoremas abelianos, sujetos a hipótesis adicionales no triviales. La mejor manera de entender la naturaleza de este tipo de problemas es analizando casos particulares.

En la Seccion 2 discutiremos el célebre teorema tauberiano de Littlewood (1910). Seguidamente, estudiaremos dos teoremas tauberianos que pueden ser usados para dar pruebas rápidas del famoso teorema de los números primos. La Sección 3 es dedicada a sumabilidad de Lambert, mientras que la Sección 4 tratará sobre el teorema de Ikehara.

Finalmente, en la Seccion 5 discutiremos nuevas generalizaciones de estos tres teoremas clásicos

2. El teorema de Littlewood (1910).

Para entender el contexto de teorema de Littlewood debemos hace alusión a otros dos teoremas.

2.1 El teorema de Abel (~1820-30)

El teorema de Abel es usualmente enseñado en un curso de Cálculo II; por conveniencia del lector lo enunciaremos aquí. Es el prototipo por excelencia de teorema "abeliano".

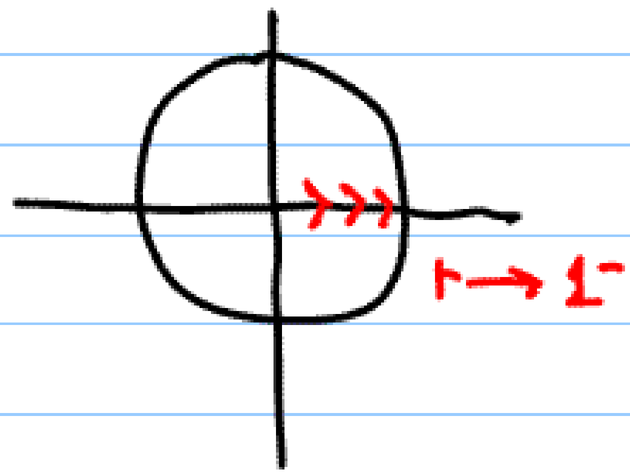
Teorema 1 (Abel) Supongamos que la serie numérica $\sum c_n$ is convergente,

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \gamma.$$

Entonces

$$(2) \quad \lim_{r \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \gamma.$$

Nótese que la convergencia de (1) implica que la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ tiene radio de convergencia al menos 1. Así $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ esta definida en el interior del círculo unidad en el plano complejo



Así el teorema de Abel nos dice que $f(r) \to \gamma$ cuando r tiende a 1, sobre el eje real, un segmento radial.

El teorema de Abel sirve como un método elemental para encontrar valores numéricos de series

Ejemplo1: Encuentre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Note que esta serie es convergente por otro lado, si $|r|<1$

$$\log(1+r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} r^n$$

El teorema de Abel nos dice que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{r \to 1^-} \log(1+r) = \log 2$$

Ejemplo2: El recíproco del teorema de Abel no es cierto en general. Consideremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

la cual es divergente, pero

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n r^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-r)^n = \frac{1}{1+r} \xrightarrow{r\to 1^-} \frac{1}{2}$$

Nota1: Si (2) se satisface. Decimos que la serie es Abel sumable a γ y escribimos

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \gamma \quad (A)$$

Por el Ejemplo2, (3) no implica (1). Pero por el teorema de Abel (1) $\Rightarrow$ (3).

2.2 El teorema de Tauber. (1897)

El nacimiento de la teoría tauberiana se dió después del siguiente teorema de Tauber, el cual es una especie de recíproca del Teorema1.

Teorema2 (Tauber, 1897)

Supongamos que

(4) $$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \gamma.$$

Si

(5) $$\lim_{n\to\infty} n c_n = 0,$$

entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \gamma$. ///

La condición (5) puede ser expresada con el símbolo de Landau, $c_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.
El nombre "teorema tauberiano" y "teorema abeliano" fue creado por los famosos matemáticos británicos G. Hardy y J. Littlewood quienes descubrieron un gran número de teoremas de este tipo en los siguientes 30 años.
Cabe resaltar que el Teorema 2 es muy sencillo de demostrar, es más puede ser dado como ejercicio a un buen estudiante de Cálculo II.
En 1910, Littlewood generaliza el teorema de Tauber. El remplaza la condición "o" por "$\mathcal{O}$", es decir la hipótesis tauberiana (5) por

$$(6) \quad \exists M > 0 \text{ tq } n|c_n| \leq M, \ \forall n \geq 1$$

Teorema 3 (Littlewood, 1910)
Si (4) y (5) se satisfacen, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ es convergente a γ. ////

Nótese que el cambio de la hipótesis (5) a (6) parece ser insignificante; sin embargo ¡no lo es! El teorema de Littlewood es mucho más profundo que el de Tauber, y su demostración no es para nada trivial!

Para varias demostraciones de este teorema ver [2, 5, 6, 9, 10, 11].

3. Teorema tauberiano para sumabilidad de Lambert

En esta y la siguiente sección daremos demostraciones rápidas del teorema de los números primos usando herramientas tauberianas

3.1 Preliminares sobre números primos

El teorema de los números primos asegura que

(7) $$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \longrightarrow \infty.$$

donde

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p<x \\ p \text{ primo}}} 1 = \text{“}\#\text{ primos menores que } x\text{”}.$$

Fue conjeturado euristicamento mediante observaciones numéricas por Gauss, Legendre, y otros. Las primeras demostraciones conocidas se deben al Francés Hadamard y el Belga de la Vallée Poussin (1896). Aunque simultaneas, fueron encontradas independientemente. Las demostraciones originales pueden ser encontradas en el Libro de Edwards [1]

3.2 Una equivalencia del teorema de los números primos.

En su forma (7), la relación asintótica es difícil de manipular. Debido a esto, usualmente (7) es demostrada por medio de funciones y relaciones intermedias. Nosotros usaremos la función de Möbius. Definida como

$$(8) \quad \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ (-1)^r & \text{si } n = p_1 \cdots p_r \ (p_j \text{ son primos}) \\ 0 & \text{si } n \text{ es divisible por el cuadrado de un primo.} \end{cases}$$

Landau (ver [8]) demostró que el teorema de los números primos es equivalente a

$$(9) \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{n<x} \mu(n) = 0.$$

Usando el símbolo $\mathcal{O}$ de Landau (9) se puede escribir como $\sum_{n<x} \mu(n) = \mathcal{O}(x)$. Landau mismo demostró también que si uno logra probar que

$$(10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0,$$

obtendría en seguida (9) y por consiguiente (7), el teorema de los números primos.
Para futura referencia necesitaremos el siguiente lema. Usamos la notación $d|n$, para denotar "d divide a n".

Lema 1:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

Pba: Si $n=1$, la suma solamente tiene un término $\mu(1)=1$. Supongamos que $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$; así todo $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ $(0 \leq \beta_j \leq \alpha_j)$.
Por lo tanto,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p_1) + \cdots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2)$$

$$+ \mu(p_1 p_3) + \cdots + \mu(p_1 p_2 p_3) + \cdots + \mu(p_1 \cdots p_k)$$

$$= 1 + (-1)^1 k + (-1)^2 \binom{k}{2} + (-1)^3 \binom{k}{3} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j = (1-1)^k = 0.$$

3.3. El método de Lambert

Diremos que una serie es sumable a un

número γ por el método de Lambert si

$\sum c_n \frac{nt}{e^{nt}-1}$ converge para $t>0$ y la suma

tiende a γ cuando $t \downarrow 0^+$, es decir

$$\lim_{t\to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{nt}{e^{nt}-1} = \gamma .$$

En tal caso se escribe

$$(11) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \gamma \quad (L).$$

Ejemplo 3: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0 \quad (L).$

Pba:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) \frac{t}{e^{mt}-1} = t \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) \left(\frac{e^{-mt}}{1-e^{-mt}}\right)$$

$$= t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(m) e^{-kmt} \qquad ; \; n = km$$

$$= t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} \left(\sum_{m/n} \mu(m) \right)$$

$$= t e^{-t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 .$$

3.4 El teorema tauberiano para el método de Lambert

Teorema 4: Supogamos que

(12) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \gamma \quad (L).$

Si la hipótesis tauberiana

(13) $\exists M>0$ tq $\quad n|c_n| \leq M, \forall n$

se satisface, entonces

(14) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \gamma$

Corollario 1: $\pi(x) = \sum_{\substack{p<x \\ p \text{ primo}}} 1 \sim \dfrac{x}{\log x}$

Pba: Pongamos $c_n = \dfrac{\mu(n)}{n}$ en el Teorema 4, entonce por el Ejemplo 3, (12) se satisface con $\gamma = 1$, evidentemente $n|c_n| \leq 1$. Así

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0,$$

el resto se sigue de los comentarios de la Sección 3.2.

3.5. Comentarios históricos

La primera prueba del Teorema 4 fue dada por Hardy y Littlewood en 1921 [3] . Sin embargo en la demostración misma ellos usaron el teorema de los números primos. Esto motivo la pregunta abierta sobre la posibilidad de hallar una demostración independiente del teorema de los números primos. En 1928 N. Wiener resuelve esta situación insatisfactoría, hayando una prueba independiente. Es mas, estas ideas llevaron a N. Wiener a crear su teoría tauberiana de caracter muy general [14].

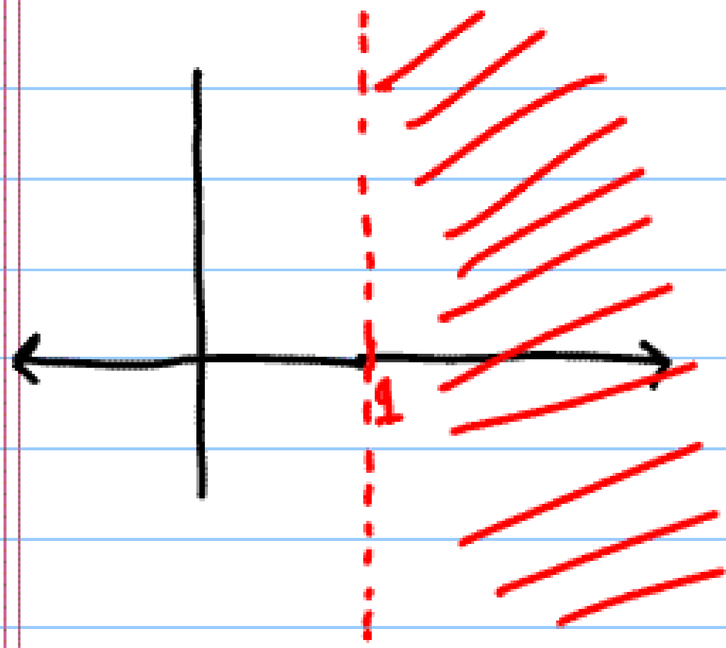
4. El Teorema de Ikehara

En esta sección también presentaremos un teorema tauberiano que puede ser usado para dar una prueba rápida del teorema de los números primos. Primero discutamos algunas propiedades de la función Zeta de Riemann.

4.1 La función Zeta de Riemann

Esta función es definida por

$$(15) \quad \zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} , \quad \operatorname{Re} z > 1$$



Lema 2: $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ extiende a una función analítica en $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Pba:

$$\zeta(z) = z \int_1^\infty \frac{[t]}{t^{z+1}}\, dt \quad (\text{¡Ejercicio!})$$

($[\cdot]$ significa parte entera), además

$$\frac{1}{z-1} = \int_1^\infty \frac{t}{t^{z+1}}\, dt .$$

Por lo tanto

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1} = z \int_1^\infty \frac{[t]-t}{t^{z+1}} + z \int \frac{t}{t^{z+1}} - \int_1^\infty \frac{t}{t^{z+1}}$$

$$= z \int_1^\infty \frac{[t]-t}{t^{z+1}} + 1 ,$$

el ultimo término esta bien definido para $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Lema 3: $\zeta(1+ix) \neq 0$, $x \neq 0$. (Ver [1,6,8])

4.2. Relación entre la función ζ y los números primos.

La siguiente relación fue descubierta por Euler

$$(16)\quad \zeta(z) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^z}\right)}$$

Pba:

$$\prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^z}\right)} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \cdots\right)$$

multiplicando todos los productos de la pasada productoria obtenemos (16). ////

La función zeta de Riemann también esta conectada con $\sum \frac{\mu(n)}{n^z}$, por

$$(17)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right) = \frac{1}{\zeta(z)}.$$

Corolario 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = \frac{1}{\zeta(z)}$ en continua en $\operatorname{Re} z \geq 0$

4.3. El teorema de Ikehara [4].

Teorema 5 (Ikehara 1931) Supongase que $G(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^z}$ es convergente para $\operatorname{Re} z>1$, donde $c_n \geq -M$, para alguna constante M. Supongamos que existe $\beta\in\mathbb{R}$ tq

$$G(z)-\frac{\beta}{z-1} \tag{18}$$

extiende a una funcion continua en $\operatorname{Re} z = 1$. Entonces

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} c_n=\beta. \tag{19}$$

Corolario 3: El teorema de Ikehara implica que

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x} \tag{20}$$

Pba: En la Sección 3.2 indicamos que (20) es equivalente a

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu(n)=0. \tag{21}$$

Note que (21) se sigue del Corolario 2 y del Teorema 5, donde aquí $\beta=0$.

5 Notas Sobre Tauberianos para Funciones Generalizadas

Indicamos aquí referencias a la literatura sobre extensiones de los Teoremas 3, 4 y 5., específicamente extensiones en el marco de trabajo de la teoría de funciones generalizadas (distribuciones de Schwartz).

5.1 Teorema de Littlewood: Para generalizacion del teorema de Littlewood en el contexto de transformada de Laplace y representaciones analíticas de distribuciones ver: [10,11,13].
He aquí un ejemplo de [10].

Consideraremos el espacio $S[0,\infty)$:

$\phi \in S[0,\infty)$ si:

i) $\phi \in C^\infty[0,\infty)$

ii) $\forall m,k \in \mathbb{N}\ \exists C_{m,k}$ tq $|\phi^{(k)}(x)| \leq \dfrac{C_{m,k}}{(1+|x|)^m}, x \geq 0$

En otras palabras las restricciones al intervalo $[0,\infty)$ de funciones en la clase de Schwartz $S(\mathbb{R})$, las funciones suaves de decaimiento rápido en infinito. Lo dotamos con su topología canónica de espacio de Fréchet [13]. Su espacio dual, será denotado por $S'[0,\infty)$. Así en general dada $f \in S'[0,\infty)$ y $\phi \in S[0,\infty)$, denotamos la evaluación del funcional lineal en la función de prueba por

$$\langle f(t), \phi(t) \rangle ,$$

"t" es la variable de evaluación. Un ejemplo de un elemento de $S[0,\infty)$ es la "función" delta de Dirac, dada por

$$<\delta(t),\phi(t)>=\phi(0).$$

Dado un numero $h\in\mathbb{R}$, la dilatación y traslación de una distribución se definen por

$$<f(t+h),\phi(t)>:=<f(t),\phi(t-h)>.$$

Nótese que $1\notin S[0,\infty)$, sin embargo se le puede dar sentido a $<f(t),1>$ en algunos casos

Definición: Decimos que

$$<f(t),1>=\gamma \quad (C)$$

si $\exists k\in\mathbb{N}$ y una función continua F t.q. $F^{(k+1)}=f$ y

$$F(t)\sim\gamma\frac{t^k}{k!},\ t\to\infty$$

Definición: Decimos que $f(\lambda x)=O(\frac{1}{\lambda}),\ \lambda\to\infty$ si $<f(\lambda t),\phi(t)>=O(\frac{1}{\lambda}),\ \forall\phi\in S[0,\infty)$.

Teorema 6: Sea $f\in S'[0,\infty)$. Si

(22) $$\lim_{\varepsilon\to0^+}<f(t),e^{-\varepsilon t}>=\gamma$$

(23) y $f(\lambda t)=O(\frac{1}{\lambda})$, entonces

(24) $$<f(t),\gamma>=1$$

La relación entre el Teorema 6 y el teorema de Littlewood se establece por la siguiente proposición, ver detalles en [10].

Proposición 1: Si $<\sum c_n \delta(x-n), 1> = \gamma \quad (C)$

y

(25) $\quad c_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$

entonces

(26) $\quad \sum c_n = \gamma.$ ///

5.2 Sumabilidad de Lambert y las distribuciones

La generalización del Teorema 4 no ha sido dada, el autor de estas notas conjetura la siguiente afirmación

Conjetura 1: Sea $f \in S'[0,\infty)$. Tenemos que

(27) $\quad <f(t), 1> = \gamma \quad (C)$

si y sólo si las dos siguientes condiciones se satisfacen

(28) $\quad f(\lambda t) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \; \lambda \to \infty$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

y

(29) $\quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} <f(t), \frac{\varepsilon t}{e^{\varepsilon t} - 1}> = \gamma$ ////

De nueva la versión distribucional, Conjetura 1, implica la versión clásica, Teorema 4, por medio de la Proposición 1.

5.3. Versión Distribucional de Teorema de Ikehara.

J. Korevaar ha debilitado considerablemente las condiciones frontera en este teorema en Para generalizaciones del teorema de [7], es más, el propone este nuevo teorema como un posible camino hacia la conjetura de los primos gemelos (ver también para otra versión [10, Chap. 2])

Definición: $f \in S'(\mathbb{R})$ es llamada una pseudofunción si su transformada de Fourier, $\hat{f}$, es un elemento del espacio $C_0(\mathbb{R})$, las funciones continuas que se anulan en $\pm\infty$.

Teorema 7 (Korevaar 2005) Supongase que $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^z}$ es convergente para $\operatorname{Re} z > 1$, donde $c_n \geq -M$, para alguna constante M. Si existe $\beta \in \mathbb{R}$ tq

$$G(z) - \frac{\beta}{z-1} \tag{30}$$

extiende localmente a una pseudofunción en $\operatorname{Re} z = 1$
Entonces

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} c_n = \beta \tag{31}$$

5.3.1. Del Teorema 7 a la conjetura de los primos gemelos.

La conjetura de los números primos gemelos en su forma general de Hardy y Littlewood dice que

(32) $$\pi_2(x) = \sum_{\substack{p<x \\ p,\,p+2 \text{ primos}}} 1$$

satisface la relación asintótica

(33) $$\pi_2(x) \sim C_2 \frac{x}{\log^2 x}, \quad x \to \infty,$$

donde C_2 es la llamada constante de los primos gemelos,

(34) $$C_2 = 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Se puede demostrar que (33) es equivalente a probar que

(35) $$\psi_2(x) = \sum_{n<x} \Lambda(n)\Lambda(n+1),$$

donde Λ es la función de von Mangoldt [1,6]. Korevaar demostró usando el Teorema 7 que (33) es equivalente a probar que

(36) $$\frac{1}{z} \sum \frac{\Lambda(n)\Lambda(n+2)}{n^z} - \frac{C_2}{z-1}$$

extiende localmente a una pseudofunción en $\operatorname{Re} z = 1$. Por supuesto, no es claro si (36) es cierta ¡Cualquiera que lo demuestre habrá resuelto un problema del Milenio!

Referencias

[1] H.M. Edwards, Riemann's zeta function, Academic press, N.Y., 1974

[2] G.H. Hardy, Divergent Series, Clarendon Press, 1949

[3] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, On a tauberian theorem for Lambert's series, and some fundamental theorems for the analytic theory of numbers, Proc. London Math. Soc. (2) 19, 21-29.

[4] S. Ikehara, An extension of Landau's theorem in the analytic theory of numbers, J. Math. and Phys. M.I.T. 10 (1931), 1-12.

[5] J. Karamata, Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes, Math. Z. 32 (1930), 319-320.

[6] J. Korevaar, Tauberian Theory: A Century of Developments, Springer, 2004.

[7] J. Korevaar, Distributional Wiener-Ikehara and twin primes, Indag. Math. 16 (2005), 37-49.

[8] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzalen, Chelsea Publishing Co., N.Y., 1953

[9] J.E. Littlewood, The converse of Abel's theorem on power series, Proc. London Math. Soc. (2) 9 (1910), 434-448.

[10] J. Vindas, Local Behavior of Distributions and Applications, Doctoral Thesis, Louisiana State University, 2009

[11] J. Vindas, R. Estrada, A tauberian theorem for distributional pointvalues, Arch. Math. (Basel) 91 (2008), 247-253.
[12] J. Vindas, R. Estrada, A quick distributional way to the prime numbers theorem, Indag. Math, por aparecer.
[13] V.S. Vladimirov, Yu.N. Drozhzhinov, B.I. Zav'yalov, Tauberian Theorems for generalized functions, Kluwer, Dordrecht, 1988
[14] N. Wiener, Tauberian Theorems, Ann. of Math. 33 (1932), 1-100.