LES VARIÉTÉS SUR LE CORPS À UN ÉLÉMENT

Christophe SOULÉ

Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Avril 2003

IHES/M/03/26

Les variétés sur le corps à un élément

Christophe Soulé

April 28, 2003

Une fantaisie récurrente de plusieurs mathématiciens ([22], [14], [19], [11], ...) est l'existence d'un "corps à un élément", noté $\mathbb{F}_1$, et d'une géométrie algébrique sur ce corps. On pense par exemple que le groupe des points de SL_N dans $\mathbb{F}_1$ est le groupe symétrique des permutations de N lettres, et que ces N lettres sont les points dans $\mathbb{F}_1$ de l'espace projectif $\mathbb{P}^N$. Et l'on s'est aperçu depuis longtemps que des formules connues pour les points d'un groupe de Chevalley dans le corps fini $\mathbb{F}_q$, $q > 1$, donnent par la spécialisation $q = 1$ des formules vraies pour le groupe de Weyl correspondant. Par ailleurs, l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions incite à chercher un corps de base pour la courbe affine $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Enfin, il y a un intérêt croissant en géométrie arithmétique pour les variétés algébriques sur $\mathbb{Z}$ issues de constructions combinatoires sur les ensembles finis.

Le but de cet article est de proposer une définition des variétés sur $\mathbb{F}_1$. Pour ce faire, on part de l'idée qu'une variété X (de type fini) sur $\mathbb{F}_1$ doit avoir une extension des scalaires à $\mathbb{Z}$, qui sera un schéma $X_{\mathbb{Z}}$ de type fini sur $\mathbb{Z}$. Les points de X (dans un anneau ad hoc) sont alors une partie, qu'on supposera finie, de l'ensemble des points de $X_{\mathbb{Z}}$. Par exemple, l'ensemble des points du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{F}_1$ dans un anneau R fini et plat sur $\mathbb{Z}$ est l'ensemble (fini) des racines de l'unité contenues dans R.

cfr. HARAN p. 670

La variété $X_{\mathbb{Z}}$ doit être entièrement déterminée par X (à isomorphisme unique près). Autrement dit, les variétés sur $\mathbb{Z}$ obtenues par extension des scalaires de $\mathbb{F}_1$ à $\mathbb{Z}$ possèdent une description "combinatoire finie". Notre résultat principal (Théorème 1) est que les variétés toriques lisses peuvent être définies sur $\mathbb{F}_1$. Un autre exemple, inspiré de la théorie d'Arakelov, consiste à associer à tout réseau $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^d$ muni d'une norme hermitienne sur $\Lambda \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C}$ une variété affine sur le corps $\mathbb{F}_1$. Cependant, nous n'avons pas su, à ce stade, définir sur $\mathbb{F}_1$ les groupes de Chevalley et les variétés de drapeaux.

Pour en revenir à la définition d'une variété X sur $\mathbb{F}_1$, il se trouve que la donnée des points de X ne suffit pas à déterminer la variété algébrique $X_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$. C'est pourquoi nous sommes conduits à adjoindre à la donnée des points celle de fonctions, à savoir une $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{A}_X$, qui sera dans nos exemples une algèbre de Banach commutative. La définition de X permet aussi d'évaluer les fonctions de $\mathcal{A}_X$ aux points de X. Dans le cas de $\mathbb{G}_m$ par exemple, l'algèbre $\mathcal{A}_{\mathbb{G}_m}$ est celle des fonctions continues sur le cercle unité.

Une variété V sur $\mathbb{Z}$ définit un "objet sur $\mathbb{F}_1$", constitué du foncteur des points de V et de l'algèbre des fonctions algébriques sur $V(\mathbb{C})$. Si X est une variété sur $\mathbb{F}_1$, son extension $X_{\mathbb{Z}}$ à $\mathbb{Z}$ est un objet initial parmi toutes les variétés V sur $\mathbb{Z}$ telles qu'il existe un morphisme d'objets sur $\mathbb{F}_1$ de X vers V (Définitions 3 et 5). L'existence de $X_{\mathbb{Z}}$ est une propriété non triviale de l'objet X.

Ce texte est organisé comme suit. Le premier paragraphe est un bref historique du corps $\mathbb{F}_1$ et des spéculations auxquelles il a donné lieu. Le second explique quels raisonnements ont conduit aux définitions présentées ici, qui font l'objet du troisième paragraphe. La section 4 donne quelques propriétés des variétés sur $\mathbb{F}_1$, qui indiquent une certaine cohérence de la théorie envisagée. On peut par exemple définir des variétés sur $\mathbb{F}_1$ par recollement (Proposition 5). La section suivante montre que les variétés toriques lisses et les réseaux hermitiens sont des exemples de variétés sur $\mathbb{F}_1$.

Dans le paragraphe 6 nous définissons, dans certains cas, la fonction zêta $\zeta_X(s)$ d'une variété X sur $\mathbb{F}_1$, à partir du nombre de points de X dans les extensions finies de $\mathbb{F}_1$. Cette fonction $\zeta_X(s)$ est un polynôme de la variable s, qui est bien celui prévu par Manin dans son article [?] sur le sujet.

Le dernier paragraphe propose des spéculations sur l'image de la K-théorie algébrique de $\mathbb{F}_1$ dans celle de $\mathbb{Z}$. Il est naturel de penser que ce groupe est l'image de l'homomorphisme J d'Adams, qui prend ses valeurs dans les groupes d'homotopie stable des sphères. Un résultat de Totaro sur les variétés toriques [23] se révèle tout à fait cohérent avec une interprétation de cette image de J en termes d'extensions de motifs de Tate mixtes sur $\mathbb{F}_1$.

Ce travail n'est bien sûr qu'une tentative. Il serait intéressant de trouver d'autres exemples de variétés sur $\mathbb{F}_1$ et démontrer d'avantage de propriétés, quitte à modifier les définitions. Par exemple, on aimerait disposer de produits fibrés dans la catégorie des schémas sur $\mathbb{F}_1$. On signalera au cours du texte quelques variantes possibles des définitions présentées.

Une version préliminaire de cet article est le court preprint [20]. J'ai bénéficié durant ce travail de très nombreuses discussions, avec notamment J.-B. Bost, M. Broué, P. Cartier, A. Connes, I. Gelfand, H. Gillet, M. Kapranov, M. Kontsevich, L. Lafforgue, Y. Manin, J-P. Serre et B. Totaro, que je tiens à remercier.

1 Un historique

1.1

J. Tits parle dans [22] § 13 du "corps de caractéristique un". Si G est un groupe de Chevalley, simple et simplement connexe, le groupe des points de G dans $\mathbb{F}_1$ n'est autre que le groupe de Weyl W de G :

$$W = G(\mathbb{F}_1)\,. \tag{1}$$

Tits montre qu'on peut associer à G une "géométrie" finie, dont W est le groupe d'automorphismes et dont les propriétés sont comparables à celles du groupe fini

$G(\mathbb{F}_q)$ pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$, $q > 1$. Par exemple, l'hexagone est la géométrie associée à $G_2(\mathbb{F}_1)$.

La théorie des représentations fournit aussi de nombreux exemples justifiant la formule (1). R. Steinberg avait déjà construit dans [21] des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{F}_q)$ de façon parallèle à celle des représentations du groupe symétrique de N lettres Σ_N. Leurs caractères sont des q-analogues des formules connues pour le groupe symétrique. Par exemple, si $N = N_1 + \cdots + N_r$, $N_i \geq 1$, est une partition de l'entier N et si $P \subset \mathrm{SL}_N$ est le sous-groupe parabolique standard associé à cette partition, le cardinal de l'ensemble fini $\mathrm{SL}_N(\mathbb{F}_q)/P(\mathbb{F}_q)$ est

$$\#\,(\mathrm{SL}_N(\mathbb{F}_q)/P(\mathbb{F}_q)) = \{N\}/\{N_1\}\{N_2\}\ldots\{N_r\}\,,$$

avec

$$\{n\} = \prod_{i=1}^{n}\,[i]$$

et

$$[n] = q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + 1\,.$$

Une telle formule, vraie si $q > 1$, demeure valable quand $q = 1$ si l'on pose

$$\Sigma_N = \mathrm{SL}_N(\mathbb{F}_1)$$

(cf. (1)) et

$$P(\mathbb{F}_1) = \prod_{i=1}^{r} \Sigma_{N_i}\,.$$

Si G est un groupe de Chevalley quelconque, les représentations "unipotentes" de $G(\mathbb{F}_q)$ sont des q-analogues des représentations de W. Les travaux plus récents de M. Broué, G. Malle et J. Michel [4], [5], [6] montrent qu'il est possible d'étendre cette analogie en faisant de q une variable abstraite.

1.2

Y. Manin aborde d'un autre point de vue la discussion du corps à un élément $\mathbb{F}_1$ [14]. L'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions [W], dont est issue la théorie d'Arakelov, fait du schéma $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ l'analogue d'une courbe affine sur un corps. On peut voir dans $\mathbb{F}_1$ le corps de définition de la courbe $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Manin demande alors quel sens donner au produit fibré

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \underset{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)}{\times} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})\,. \tag{2}$$

Une telle question est naturelle si l'on se souvient du rôle joué par la surface $C \underset{\mathbb{F}_q}{\times} C$ dans la preuve par Weil de l'hypothèse de Riemann pour une courbe projective et lisse C sur le corps fini $\mathbb{F}_q$.

Manin propose aussi de développer une géométrie algébrique sur le corps $\mathbb{F}_1$ ([14], 1.7), ainsi qu'une théorie des motifs et des fonctions zêtas associées. Par exemple, l'espace projectif $\mathbb{P}^d_{\mathbb{F}_1}$ de dimension d sur $\mathbb{F}_1$ devrait avoir pour fonction zêta le polynôme

$$\zeta_{\mathbb{P}^d_{\mathbb{F}_1}} = (s)s(s-1)(s-2)\dots(s-d)\,. \tag{3}$$

1.3

Ces spéculations ont été poursuivies par Smirnov [19] et Kapranov-Smirnov [11] [10] (non publiés). Ceux-ci proposent une algèbre linéaire sur $\mathbb{F}_1$ (un espace vectoriel linéaire sur $\mathbb{F}_1$ est un ensemble fini pointé) et expliquent en ces termes la loi de réciprocité de Gauss (voir [1] pour le cas géométrique). Ils proposent aussi que, si $n \geq 1$, le corps $\mathbb{F}_1$ a une extension finie de degré n, dont les éléments inversibles sont les racines de l'unité d'ordre n.

2 Préliminaires

2.1

Notre objectif est de définir les variétés algébriques sur le corps à un élément.

Notons d'abord que l'on ne s'attend pas à voir figurer $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ parmi ces variétés. En effet sa fonction zêta, la fonction zêta de Riemann, a un nombre infini de zéros, ce qui indique que $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ n'est pas de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)$. Et nous ne chercherons pas à donner un sens au produit fibré (2).

Par contre, si X est une variété (de type fini) sur $\mathbb{F}_1$, on s'attend à ce que $X \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z}$ soit une variété algébrique (de type fini) sur $\mathbb{Z}$. Si de plus X est lisse sur $\mathbb{F}_1$, la variété $X \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z}$ aura bonne réduction partout, de réduction en p la variété algébrique $X \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{F}_p$, lisse que $\mathbb{F}_p$. Ceci nous conduit à la question suivante :

Question 1. *Quelles sont les variétés sur $\mathbb{Z}$ obtenues par extension des scalaires de $\mathbb{F}_1$ à $\mathbb{Z}$?*

On aimerait par exemple que les variétés toriques ou les variétés de drapeaux d'un groupe de Chevalley puissent être définies sur $\mathbb{F}_1$.

2.2

Un point de départ pour nos définitions est cette définition très économique des schémas : un schéma est un foncteur covariant de la catégorie des anneaux vers celle des ensembles qui est localement représentable par un anneau. On trouvera dans [8] la preuve que cette définition est équivalente à la définition usuelle. Ceci suggère de définir les variétés sur $\mathbb{F}_1$ comme foncteurs d'une catégorie d'anneaux vers celle des ensembles finis.

2.3

Puisqu'à une variété X sur $\mathbb{F}_1$ on souhaite associer une variété algébrique $X \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z}$ sur les entiers, il convient de comprendre quel est le foncteur associé à l'extension des scalaires d'une variété algébrique.

Soit k un corps, $\mathcal{A}_k$ la catégorie des k-algèbres unitaires commutatives, et Ω un objet de $\mathcal{A}_k$. Si R est un objet de $\mathcal{A}_k$, on note $R_\Omega R \underset{k}{\otimes} \Omega$ son extension des scalaires de k à Ω. De même, si X est un schéma sur k, on pose $X_\Omega X \underset{k}{\otimes} \Omega$.

Notons $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles. Si X est un schéma sur k on désigne par

$$\underline{X} : \mathcal{A}_k \to \mathcal{E}ns$$

le foncteur covariant qui à R associe $X(R)$. De même, si S est un schéma sur Ω, on désigne par

$$\underline{S} : \mathcal{A}_k \to \mathcal{E}ns$$

le foncteur covariant qui à R associe $S(R_\Omega)$. La proposition suivante montre que le foncteur $\underline{X_\Omega}$ vérifie une propriété universelle.

Proposition 1. i) *Pour tout objet R de $\mathcal{A}_k$ et tout schéma X sur k il existe une inclusion canonique naturelle*

$$X(R) \subset X_\Omega(R_\Omega)\,.$$

On note $i : \underline{X} \to \underline{X_\Omega}$ la transformation naturelle ainsi définie.

ii) *Si S est un schéma sur Ω et si*

$$\varphi : \underline{X} \to \underline{S}$$

est une transformation naturelle, il existe un unique morphisme algébrique sur Ω

$$\varphi_\Omega : X_\Omega \to S$$

tel que la transformation composée

$$\underline{X} \xrightarrow{\ i\ } \underline{X_\Omega} \xrightarrow{\ \varphi_\Omega\ } \underline{S}$$

de i avec la transformation induite par φ_Ω coïncide avec φ, i.e. $\varphi = \underline{\varphi_\Omega} \circ i$.

Preuve. Puisque k est contenu dans Ω et que $X_\Omega(R_\Omega)$ coïncide avec l'ensemble des points de X dans la k-algèbre R_Ω, l'énoncé i) est clair. Pour montrer ii) supposons d'abord que X est affine et soit $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ la k-algèbre des fonctions globales sur X. L'identité de A définit un point $\mathrm{id}_A \in X(A)$, dont l'image par φ est un morphisme algébrique sur Ω :

$$\varphi_\Omega \in \mathrm{Hom}_\Omega(X_\Omega, S) = X_\Omega(A_\Omega)\,.$$

Si R est une k-algèbre et $f \in X(R)$ un morphisme de A vers R, on a, par fonctorialité de φ,

$$\varphi(f) = f^*(\varphi(\mathrm{id}_A)) = f^*(\varphi_\Omega) = \varphi_\Omega \circ f_\Omega\,.$$

Cela montre que $\varphi = \underline{\varphi_\Omega} \circ i$.

Dans le cas général, soit $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ un recouvrement ouvert de X par des variétés affines et

$$\varphi : \underline{X} \to \underline{S}$$

une transformation naturelle. La restriction de $\underline{\varphi}$ à $\underline{X}_j$ (resp. $\underline{X_j \cap X_{j'}}$) est induite par un morphisme algébrique $\varphi_{j\Omega} : X_{j\Omega} \to S$ (resp. $\varphi_{jj'\Omega} : (X_j \cap X_{j'})_\Omega \to S$) et, par fonctorialité et unicité, la restriction de $\varphi_{j\Omega}$ à $(X_j \cap X_{j'})_\Omega$ coïncide avec $\varphi_{jj'\Omega}$ quels que soient les indices j et j' dans J. Par conséquent, les morphismes $\varphi_{j\Omega}$, $j \in J$, se recollent pour donner un morphisme

$$\varphi_\Omega : X \to S$$

algébrique sur Ω. Si R est une k-algèbre et $f : \mathrm{Spec}(R) \to X$ un point de $X(R)$, considérons les k-schémas affines $U_j = f^{-1}(X_j)$, $j \in J$. La restriction de $(\varphi_\Omega \circ i)(f)$ à $U_{j\Omega}$ coïncide par définition avec celle de $\varphi_{j\Omega} \circ f$, c'est-à-dire avec la restriction de $\varphi(f)$. Comme les $U_{j\Omega}$, $j \in J$, forment un recouvrement ouvert de U_Ω, on en conclut que $\varphi_\Omega \circ i = \varphi$. q.e.d.

2.4

On voudrait qu'un énoncé tel que la Proposition 1 soit vrai quand $k = \mathbb{F}_1$ et $\Omega = \mathbb{Z}$. Mais cela suppose qu'on sache d'abord répondre à la question suivante :

Question 2. *Quels sont les anneaux obtenus par extension des scalaires de* $\mathbb{F}_1$ *à* $\mathbb{Z}$ *?*

Or, d'après Kapranov et Smirnov, pour tout entier $n \geq 1$, le corps $\mathbb{F}_1$ possède une extension $\mathbb{F}_{1^n}$ de degré n, obtenue par l'adjonction des racines n-ièmes de l'unité. La $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{F}_{1^n} \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z}$ est alors de rang n sur $\mathbb{Z}$. Cela conduit à poser

$$\mathbb{F}_{1^n} \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)\,. \tag{4}$$

Cet anneau R_n est donc une des réponses à la Question 2, et d'après la Proposition 1, si X est une variété sur $\mathbb{F}_1$, il existe une inclusion naturelle

$$X(\mathbb{F}_{1^n}) \subset (X \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z})(R_n)\,.$$

Plus généralement, nous admettrons que l'extension des scalaires de $\mathbb{F}_1$ à $\mathbb{Z}$ induit une équivalence de catégorie entre une catégorie de $\mathbb{F}_1$-algèbres et la catégorie $\mathcal{R}$ des anneaux finis et plats sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire celle des anneaux R dont le groupe associé est un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini. Une variété X sur $\mathbb{F}_1$ doit donc définir un foncteur covariant $\underline{X}$ de la catégorie $\mathcal{R}$ dans celle des ensembles, contenu dans le foncteur qui à R associe l'ensemble $(X \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z})(R)$.

Pour définir les variétés sur $\mathbb{F}_1$ nous procéderons en deux temps. La catégorie $\mathcal{A}$ des variétés affines sur $\mathbb{F}_1$ sera définie par une propriété universelle inspirée de la Proposition 1 pour des foncteurs de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{E}ns$. Celle des variétés sur $\mathbb{F}_1$ sera alors obtenue en considérant une propriété universelle pour des foncteurs de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{E}ns$.

3 Définitions

Rappelons que $\mathcal{R}$ est la catégorie des anneaux finis et plats sur $\mathbb{Z}$ et $\mathcal{E}ns$ celle des ensembles.

3.1 Définition 1.

Un *truc sur* $\mathbb{F}_1$ est le couple $X = (\underline{X}, \mathcal{A}_X)$ d'un foncteur covariant

$$\underline{X} : \mathcal{R} \to \mathcal{E}ns$$

et d'une $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{A}_X$. Pour tout morphisme d'anneaux unitaires $\sigma : R \to \mathbb{C}$, $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, et pour tout élément $x \in \underline{X}(R)$ on suppose de plus donné un morphisme d'algèbre (dit "d'évaluation")

$$e_{x,\sigma} : \mathcal{A}_X \to \mathbb{C}.$$

Si $f : R' \to R$ est un morphisme de $\mathcal{R}$ et si $y \in \underline{X}(R')$, l'égalité suivante doit être satisfaite :

$$e_{f(y),\sigma} = e_{y,\sigma\circ f} \tag{5}$$

Pour tout morphisme $\sigma : R \to \mathbb{C}$.

Variantes. i) On pourrait remplacer $\mathcal{R}$ par la sous-catégorie pleine engendrée par les anneaux R_n, $n \geq 1$, et leurs produits tensoriels.
ii) L'idée d'ajouter à $\underline{X}$ une "donnée topologique à l'infini" est due à J.-B. Bost. Il n'y a pas lieu de supposer que $\mathcal{A}_X$ est commutative. Un objectif est de faire le lien avec la théorie d'A. Connes (voir par exemple [7]), un truc X sur $\mathbb{F}_1$ disposant d'une extension au point à l'infini de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, essentiellement donnée par l'algèbre $\mathcal{A}_X$. Par ignorance, nous resterons très évasifs sur les propriétés requises sur cette $\mathbb{C}$-algèbre.

3.2 Définition 2.

i) Un truc $X = (\underline{X}, \mathcal{A}_X)$ sur $\mathbb{F}_1$ est *fini* quand tous les ensembles $\underline{X}(R)$, $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, sont finis.

ii) Un *morphisme* $\varphi : X \to Y$ entre deux trucs sur $\mathbb{F}_1$ est la donnée d'une transformation naturelle

$$\underline{\varphi} : \underline{X} \to \underline{Y}$$

et d'un morphisme d'algèbres

$$\varphi^* : \mathcal{A}_Y \to \mathcal{A}_X$$

tels que, si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, si $\sigma : R \to \mathbb{C}$ est un morphisme d'anneaux unitaires, et si $x \in \underline{X}(R)$, on a

$$e_{\sigma,\underline{\varphi}(x)}(\alpha) = e_{\sigma,x}(\varphi^*(\alpha)) \tag{6}$$

pour toute fonction $\alpha \in \mathcal{A}_Y$.

iii) Un morphisme

$$\varphi = (\underline{\varphi}, \varphi^*) : X \to Y$$

est une *immersion* si φ^* est injectif et si l'application

$$\underline{\varphi} : \underline{X}(R) \to \underline{Y}(R)$$

est injective quel que soit l'anneau $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$.

Si $\varphi = (\underline{\varphi}, \varphi^*) : X \to Y$ et $\psi = (\underline{\psi}, \psi^*) : Y \to Z$ sont deux morphismes, leur composé est le couple

$$\psi \circ \varphi = (\underline{\psi} \circ \underline{\varphi}, \varphi^* \circ \psi^*) : X \to Z\,.$$

On note $\mathcal{T}$ la catégorie des trucs sur $\mathbb{F}_1$.

3.3

Soit $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$ la catégorie des variétés sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire les schémas de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Si V et W sont deux objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$, on désigne par $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, W)$ l'ensemble des morphismes algébriques de V vers W.

Si V est un objet de $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$, on lui associe un truc $V = (\underline{V}, \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}))$ sur $\mathbb{F}_1$ de la façon suivante. Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ on pose

$$\underline{V}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Spec}(R), V)$$

et si $f : R' \to R$ est une flèche de $\mathcal{R}$, l'application

$$\underline{V}(f) : \underline{V}(R') \to \underline{V}(R)$$

est la composition avec f. La $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ est celle des fonctions globales (i.e. les sections du faisceau canonique) sur la variété $V_{\mathbb{C}} = V \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C}$. Si $\sigma : R \to \mathbb{C}$ est un morphisme d'anneaux unitaires et si $x \in \underline{V}(R)$, l'image de x par σ est un point complexe $\sigma(x)$ de $V_{\mathbb{C}}$. On note

$$e_{x,\sigma} : \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{C}$$

l'évaluation au point $\sigma(x)$ des fonctions sur $V_{\mathbb{C}}$. La formule (5) est évidemment vérifiée. Tout morphisme algébrique $f : V \to W$ induit un morphisme dans $\mathcal{T}$, également noté f.

3.4 Définition 3.

Une *variété affine sur* $\mathbb{F}_1$ est un truc fini X sur $\mathbb{F}_1$ tel qu'il existe une variété algébrique affine $X_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$ et une immersion $i : X \to X_{\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{T}$ vérifiant la propriété suivante.

Quels que soient la variété affine $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ et le morphisme de $\mathcal{T}$

$$\varphi : X \to V\,,$$

il existe un unique morphisme algébrique

$$\varphi_{\mathbb{Z}} : X_{\mathbb{Z}} \to V$$

tel que $\varphi = \varphi_{\mathbb{Z}} \circ i$.

On voit que la variété $X_{\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$ est uniquement déterminée par X. On la note aussi $X \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z}$. Par ailleurs, si X et Y sont deux variétés affines sur $\mathbb{F}_1$ et si $f : X \to Y$ est un morphisme de $\mathcal{T}$, il existe un unique morphisme $f_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\mathbb{Z}}, Y_{\mathbb{Z}})$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{f_{\mathbb{Z}}} & Y_{\mathbb{Z}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

On notera $\mathcal{A}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ dont les objets sont les variétés affines.

3.5 Définition 4.

i) Un *objet sur* $\mathbb{F}_1$ est la donnée $X = (\underline{\underline{X}}, \mathcal{a}_X)$ d'un foncteur contravariant

$$\underline{\underline{X}} : \mathcal{A} \to \mathcal{E}ns$$

et d'une $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{a}_X$ ainsi que d'un morphisme d'algèbres

$$e_x : \mathcal{a}_X \to \mathcal{a}_A$$

pour objet A de $\mathcal{A}$ et tout élément x de $\underline{\underline{X}}(A)$. Si $f : A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{A}$ et $x \in \underline{\underline{X}}(B)$, on suppose de plus que l'égalité

$$e_{f^*(x)} = f^* \circ e_x \tag{7}$$

est vérifiée, avec $f^*(x) = \underline{\underline{X}}(f)(x) \in \underline{\underline{X}}(A)$.
ii) Un objet X sur $\mathbb{F}_1$ est *fini* si $\underline{\underline{X}}(\mathrm{Spec}\, R)$ est fini quel que soit $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ (d'après la Proposition 2 ii) ci-dessous, la catégorie $\mathcal{R}^{\mathrm{opp}}$ est contenue dans $\mathcal{A}$).
iii) Un *morphisme* $\varphi : X \to Y$ entre objets sur $\mathbb{F}_1$ est la donnée d'une transformation naturelle

$$\underline{\underline{\varphi}} : \underline{\underline{X}} \to \underline{\underline{Y}}$$

et d'un morphisme d'algèbres $\varphi^* : \mathcal{a}_Y \to \mathcal{a}_X$ tels que, si $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et $x \in \underline{\underline{X}}(A)$, on ait

$$e_{\underline{\underline{\varphi}}(x)} = e_x \circ \varphi^*\,. \tag{8}$$

iv) On dit que le morphisme φ est une *immersion* si $\underline{\underline{\varphi}}$ et φ^* sont injectifs.

Le composé de deux morphismes est défini de la façon évidente, et l'on note $\mathcal{O}$ la catégorie des objets sur $\mathbb{F}_1$.

3.6

Si $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$, on lui associe comme suit un objet $V = (\underline{\underline{V}}, \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}))$ sur $\mathbb{F}_1$.

Si $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ on pose

$$\underline{\underline{V}}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{\mathbb{Z}}, V)$$

et si $f : A \to B$ est une flèche de $\mathcal{A}$ on désigne par $\underline{\underline{V}}(f)$ la composition avec $f_{\mathbb{Z}}$. Si $x \in \underline{\underline{V}}(A)$, l'évaluation e_x est le morphisme composé

$$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{x^*} \mathcal{O}(A_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{i^*} \mathcal{a}_A\,,$$

où $i : A \to A_{\mathbb{Z}}$ est l'inclusion associée à A.

En associant à $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, W)$ le morphisme de composition avec f et celui d'image inverse $f^* : \mathcal{O}(W_{\mathbb{C}}) \to \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$, on obtient ainsi un foncteur

$$\mathcal{V}_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{O}\,.$$

3.7 Définition 5

Une *variété sur* $\mathbb{F}_1$ est la donnée d'un objet X sur $\mathbb{F}_1$ tel qu'il existe une variété algébrique $X_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$ et une immersion $i : X \to X_{\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{O}$ ayant la propriété suivante. Pour toute variété $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ et tout morphisme

$$\varphi : X \to V$$

dans $\mathcal{O}$, il existe un unique morphisme algébrique

$$\varphi_{\mathbb{Z}} : X_{\mathbb{Z}} \to V$$

tel que $\varphi = \varphi_{\mathbb{Z}} \circ i$.

La variété $X_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ est uniquement déterminée (à isomorphisme unique près) par la variété X sur $\mathbb{F}_1$. On la note aussi $X \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z}$ et on l'appelle *extension des scalaires de* X de $\mathbb{F}_1$ à $\mathbb{Z}$. Si X et Y sont deux variétés sur $\mathbb{F}_1$ et $f : X \to Y$ est un morphisme de $\mathcal{O}$, il existe un unique morphisme algébrique $f_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\mathbb{Z}}, Y_{\mathbb{Z}})$ qui induit f sur X (cf. 3.4). Autrement dit, si $\mathcal{V}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}$ dont les objets sont les variétés sur $\mathbb{F}_1$, l'extension des scalaires de $\mathbb{F}_1$ à $\mathbb{Z}$ est un foncteur fidèle de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$.

3.8 Variantes

3.8.1

Pour éviter le choix trop trivial $\mathcal{a}_X = \mathcal{O}(X_{\mathbb{C}})$ (où $X_{\mathbb{C}} = X_{\mathbb{Z}} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C}$) dans la définition d'une variété X sur $\mathbb{F}_1$ (cf. Proposition 4 ci-dessous) on pourrait par exemple imposer (dans les définitions 3 et 5) que l'algèbre $\mathcal{a}_X$ est une algèbre de Banach commutative. Ce sera le cas pour les exemples discutés dans la section 5 ([18], 18.11).

3.8.2

Comme l'a suggéré R. Pink, pour tout entier $n \geq 1$, on peut aussi définir les variétés sur $\mathbb{F}_{1^n}$ en remplaçant dans les définitions précédentes la catégorie $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$) par la sous-catégorie des R_n-algèbres finies et plates (resp. par la catégorie des schémas de type fini sur $\mathrm{Spec}(R_n)$).

4 Quelques propriétés

4.1

La catégorie opposée à $\mathcal{R}$ est contenue dans $\mathcal{A}$.

Proposition 2. i) *Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ et $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, l'ensemble $\underline{X}(R)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Spec}(R), X)$.*

ii) *Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, le truc sur $\mathbb{F}_1$ associé à $\mathrm{Spec}(R)$ est une variété affine sur $\mathbb{F}_1$ dont l'extension à $\mathbb{Z}$ coïncide avec $\mathrm{Spec}(R)$. On obtient ainsi un foncteur contravariant pleinement fidèle de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{A}$.*

Preuve. i) Soient $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ un anneau fini et plat sur $\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Spec}(R)$ le schéma associé. Si $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ et si

$$\varphi : \mathrm{Spec}(R) \to X$$

est un morphisme de $\mathcal{T}$, l'image par $\underline{\varphi}$ de l'application identique

$$\mathrm{id}_R \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{Spec}(R))$$

est un élément $\underline{\varphi}(\mathrm{id}_R) \in \underline{X}(R)$.

Inversement, étant donné $x \in \underline{X}(R)$, pour tout morphisme de $\mathcal{R}$

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(R, R') = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Spec}(R'), \mathrm{Spec}(R))\,,$$

l'image de x par l'application

$$\underline{X}(f) : \underline{X}(R) \to \underline{X}(R')$$

définit un élément $f(x) \in \underline{X}(R')$ et l'on obtient ainsi une transformation naturelle

$$\underline{x} : \underline{\mathrm{Spec}}(R) \to \underline{X}\,.$$

Par ailleurs, si Σ est l'ensemble (fini) des morphismes unitaires $\sigma : R \to \mathbb{C}$, on dispose d'isomorphismes canoniques

$$\mathcal{O}(\mathrm{Spec}(R)_{\mathbb{C}}) = R \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C} = \mathbb{C}^{\Sigma}\,.$$

La collection des morphismes d'évaluation en x

$$e_{x,\sigma} : \mathcal{a}_X \to \mathbb{C}, \qquad \sigma \in \Sigma\,,$$

définit donc un morphisme d'algèbres

$$x^* : \mathfrak{a}_X \to R \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C}$$

qui vérifie la condition (6) avec $\underline{x}$. On obtient ainsi un morphisme $(\underline{x}, x^*)$ de $\mathrm{Spec}(R)$ vers X dans $\mathcal{T}$.

On vérifie que les applications $\varphi \mapsto \underline{\varphi}(\mathrm{id}_R)$ et $x \mapsto (\underline{x}, x^*)$ sont des bijections inverses entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Spec}(R), X)$ et $\underline{X}(R)$.

Par exemple on a la formule

$$X(\mathbb{F}_{1^n}) = \underline{X}(R_n)\,, \tag{9}$$

où le terme de gauche désigne les morphismes dans $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{1^n})$ vers X.

ii) Si R et R' sont des anneaux de $\mathcal{R}$, l'ensemble $\underline{\mathrm{Spec}(R)}(R')$ des morphismes d'anneaux de R vers R' est fini. Par ailleurs, si V est un objet de $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$ et R un objet de $\mathcal{R}$ on sait, d'après i), que

$$\underline{V}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Spec}(R), V)\,.$$

Comme $\underline{V}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Spec}(R), V)$ par définition de V, on voit que tout morphisme de $\mathrm{Spec}(R)$ vers V dans $\mathcal{T}$ est algébrique. Cela montre que $\mathrm{Spec}(R)$ est une variété affine sur $\mathbb{F}_1$ dont l'extension à $\mathbb{Z}$ est $\mathrm{Spec}(R)$.

En choisissant $V = \mathrm{Spec}(R')$, $R' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, dans l'argument précédent on voit aussi que tout morphisme

$$\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(R')$$

dans $\mathcal{T}$ provient d'un unique morphisme $R' \to R$ dans $\mathcal{R}$. Par conséquent le foncteur $R \mapsto \mathrm{Spec}(R)$ de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{A}$ est pleinement fidèle.

4.2

On définit un foncteur

$$\varepsilon : \mathcal{T} \to \mathcal{O}$$

en associant à un truc $X = (\underline{X}, \mathfrak{a}_X)$ le couple $(\underline{\underline{X}}, \mathfrak{a}_X)$ où $\underline{\underline{X}}$ est le foncteur sur $\mathcal{A}$ représenté par X:

$$\underline{\underline{X}}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X)\,.$$

Si $u \in \underline{\underline{X}}(A)$ l'évaluation en u est l'image inverse u^*:

$$e_u = u^* : \mathfrak{a}_X \to \mathfrak{a}_A\,.$$

Ce foncteur ε va nous permettre de considérer les variétés affines sur $\mathbb{F}_1$ comme des variétés sur $\mathbb{F}_1$:

Proposition 3. i) *Le foncteur $\varepsilon : \mathcal{T} \to \mathcal{O}$ est pleinement fidèle.*

ii) *L'image essentielle de $\mathcal{A}$ par ε est la catégorie des variétés sur $\mathbb{F}_1$ dont l'extension des scalaires à $\mathbb{Z}$ est affine.*

Preuve. i) Considérons le foncteur

$$\rho : \mathcal{O} \to \mathcal{T}$$

qui à l'objet $(\underline{\underline{X}}, \mathcal{A}_X)$ sur $\mathbb{F}_1$ associe le truc $(\underline{X}, \mathcal{A}_X)$, où $\underline{X}$ est la restriction à $\mathcal{R}$ du foncteur $\underline{\underline{X}}$ (cf. Proposition 2 ii)).

Si X est dans $\mathcal{T}$, le truc $\rho \circ \varepsilon(X)$ vérifie

$$\underline{\rho \circ \varepsilon(X)}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Spec}(R), X) = \underline{X}(R)$$

(Proposition 2 i)). Par conséquent

$$\rho \circ \varepsilon = \mathrm{id}_{\mathcal{T}} \,. \tag{10}$$

De plus ρ est l'adjoint à gauche de ε: si Y est un truc sur $\mathbb{F}_1$ et X un objet sur $\mathbb{F}_1$ il existe un isomorphisme canonique et naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\rho(X), Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X, \varepsilon(Y)) \,. \tag{11}$$

En effet, si

$$\psi : X \to \varepsilon(Y)$$

est un morphisme de $\mathcal{O}$, le morphisme

$$\rho(\psi) : \rho(X) \to \rho \circ \varepsilon(Y) = Y$$

est un morphisme de $\mathcal{T}$.

Inversement, étant donné un morphisme

$$\varphi : \rho(X) \to Y$$

de $\mathcal{T}$, pour tout objet A de $\mathcal{A}$ et tout $x \in \underline{\underline{X}}(A)$, si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ et

$$f \in \underline{A}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Spec}(R), A)$$

(Prop. 2 i)), puisque $\underline{\underline{X}}$ est un foncteur contravariant, on obtient un élément $\underline{\underline{X}}(f)(x) \in \underline{\underline{X}}(R) = \underline{\rho(X)}(R)$, et donc un élément

$$\underline{\varphi}(\underline{\underline{X}}(f)(x)) \in \underline{Y}(R) \,.$$

L'application $f \mapsto \underline{\varphi}(\underline{\underline{X}}(f)(x))$ définit une transformation naturelle de $\underline{A}$ vers $\underline{Y}$ qui, jointe au morphisme d'algèbres

$$x^* \circ \varphi^* : \mathcal{A}_Y \to \mathcal{A}_A \,,$$

définit un élément de

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Y) = \underline{\underline{\varepsilon(Y)}}(A)$$

qui dépend fonctoriellement de $x \in \underline{\underline{X}}(A)$. D'où une transformation naturelle

$$\underline{\underline{X}} \to \underline{\underline{\varepsilon(Y)}}$$

qui, jointe au morphisme d'algèbres

$$\varphi^* : \mathcal{a}_Y \to \mathcal{a}_X\,,$$

fournit un morphisme $\alpha(\varphi)$ de X vers $\varepsilon(Y)$. On vérifie que les applications $\varphi \mapsto \alpha(\varphi)$ et $\psi \mapsto \rho(\psi)$ sont des bijections inverses naturelles entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\rho(X), Y)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X, \varepsilon(Y))$. Cela démontre (11).

Il résulte de (10) et (11) que $\varepsilon : \mathcal{T} \to \mathcal{O}$ est pleinement fidèle.

ii) Considérons une variété affine X sur $\mathbb{F}_1$, $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ et

$$\varphi : \varepsilon(X) \to V$$

un morphisme de $\mathcal{O}$. L'image par $\underline{\underline{\varphi}}$ du morphisme identique

$$\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X) = \underline{\underline{\varepsilon(X)}}(X)$$

est un morphisme algébrique $\varphi_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\mathbb{Z}}, V)$. Si A est une variété affine sur $\mathbb{F}_1$ et

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X) = \underline{\underline{X}}(A)\,,$$

on sait que f est par un morphisme algébrique $f_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{\mathbb{Z}}, X_{\mathbb{Z}})$ (Définition 3) et donc

$$\underline{\underline{\varphi}}(f) = \underline{\underline{\varphi}}(f^*(\mathrm{id}_X)) = f_{\mathbb{Z}}^*(\underline{\underline{\varphi}}(\mathrm{id}_X)) = f_{\mathbb{Z}}^*(\varphi_{\mathbb{Z}}) = \varphi_{\mathbb{Z}} \circ f_{\mathbb{Z}}$$

dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{\mathbb{Z}}, V)$. Il en résulte que φ est le morphisme induit par $\varphi_{\mathbb{Z}}$ sur $\varepsilon(X)$, et donc $\varepsilon(X)$ est une variété sur $\mathbb{F}_1$ dont $X_{\mathbb{Z}}$ est l'extension des scalaires à $\mathbb{Z}$.

Inversement, supposons que X soit une variété sur $\mathbb{F}_1$ telle que $X_{\mathbb{Z}}$ soit affine. Soient $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ une variété algébrique affine et

$$\varphi : \rho(X) \to V$$

un morphisme de $\mathcal{T}$. Puisque V est affine on a

$$\varepsilon(\underline{\underline{V}}, \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})) = (\underline{\underline{V}}, \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}))\,.$$

Donc φ induit un morphisme

$$\varepsilon(\varphi) : \varepsilon \circ \rho(X) \to V$$

dans $\mathcal{O}$. L'isomorphisme d'adjonction

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\rho(X), \rho(X)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X, \varepsilon \circ \rho(X))$$

associe à l'identité de $\rho(X)$ un morphisme canonique

$$X \to \varepsilon \circ \rho(X)\,.$$

Puisque X est une variété sur $\mathbb{F}_1$, le composé du morphisme précédent avec $\varepsilon(\varphi)$ dans $\mathcal{O}$ est induit par un morphisme algébrique

$$\varphi_{\mathbb{Z}} : X_{\mathbb{Z}} \to V \, .$$

En appliquant le foncteur ρ, on voit que $\varphi_{\mathbb{Z}} \circ i$ coïncide avec le morphisme

$$\varphi : \rho(X) \to V$$

dans $\mathcal{T}$. Par conséquent $\rho(X)$ est une variété affine dont $X_{\mathbb{Z}}$ est l'extension des scalaires à $\mathbb{Z}$. Cela démontre ii).

4.3

En général une variété sur $\mathbb{Z}$ peut être l'extension des scalaires à $\mathbb{Z}$ de plusieurs variétés sur $\mathbb{F}_1$.

Proposition 4. *Soit X une variété sur $\mathbb{F}_1$. Supposons que l'immersion $i : X \to X_{\mathbb{Z}}$ soit la composée dans $\mathcal{O}$ d'une immersion $u : X \to Y$ et d'une immersion $j : Y \to X_{\mathbb{Z}}$.*

Supposons de plus que X est affine ou que $\underline{\underline{u}}$ est une équivalence. Alors Y est une variété sur $\mathbb{F}_1$ telle que

$$Y \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z} = X_{\mathbb{Z}} \, .$$

Preuve. Soient $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ et

$$\varphi : Y \to V$$

un morphisme de $\mathcal{O}$. Puisque X est une variété sur $\mathbb{F}_1$, la restriction de φ à X est induite par un morphisme algébrique $\varphi_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\mathbb{Z}}, V)$: $\varphi_{\mathbb{Z}} \circ i = \varphi \circ u$. Il s'agit de vérifier que $\varphi_{\mathbb{Z}} \circ j = \varphi$.

Or le composé des morphismes d'algèbres

$$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{Z}}^*} \mathcal{O}(X_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{i^*} \mathcal{A}_X$$

coïncide avec

$$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{A}_Y \xrightarrow{u^*} \mathcal{A}_X \, .$$

Comme $i^* = u^* \circ j^*$ et comme u^* est injectif, on en déduit que

$$\varphi^* = j^* \circ \varphi_{\mathbb{Z}}^* \, . \tag{12}$$

Si le foncteur $\underline{\underline{u}} : \underline{\underline{X}} \to \underline{\underline{Y}}$ est une équivalence on a $\underline{\underline{\varphi}}_{\mathbb{Z}} \circ \underline{\underline{j}} = \underline{\underline{\varphi}}$ donc (12) suffit à montrer que $\varphi_{\mathbb{Z}} \circ j = \varphi$.

Dans le cas où X est affine, on peut supposer que V est affine (Proposition 3 ii)). Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, si $x \in \underline{\underline{Y}}(R)$, si $\alpha \in \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ et si $\sigma : R \to \mathbb{C}$ est un morphisme d'anneaux unitaires, on a, d'après (8) et (12)

$$e_{\sigma,\underline{\underline{\varphi}}(x)}(\alpha) = e_{\sigma,x}(\varphi^*(\alpha)) = e_{\sigma,x}(j^* \circ \varphi_{\mathbb{Z}}^*(\alpha)) = e_{\sigma,\underline{\underline{\varphi}}_{\mathbb{Z}} \circ \underline{\underline{j}}(x)}(\alpha) \, . \tag{13}$$

Comme R est plat sur $\mathbb{Z}$, le morphisme canonique

$$R \to R \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C} = R^{\Sigma}$$

est injectif. Et comme V est affine les fonctions de $\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ séparent les points de $V(\mathbb{C})$. Par conséquent les égalités (13) avec $\sigma \in \Sigma$ et $\alpha \in \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ montrent que

$$\underline{\underline{\varphi}}(x) = \underline{\underline{\varphi}}_{\mathbb{Z}} \circ \underline{\underline{j}}(x) \, .$$

Par conséquent $\varphi = \varphi_{\mathbb{Z}} \circ j$. q.e.d.

4.4

L'énoncé suivant permet de définir des variétés sur $\mathbb{F}_1$ par recollement.

Proposition 5. *Soient $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ et $V = \underset{i \in I}{\cup} U_i$ un recouvrement ouvert fini de V. On suppose données des variétés X_i, $i \in I$, et X_{ij}, $i \neq j$, sur $\mathbb{F}_1$ et des immersions*

$$X_{ij} \to X_i \quad \textit{et} \quad X_i \to V$$

dans $\mathcal{O}$ dont les extensions à $\mathbb{Z}$ sont les inclusions

$$U_i \cap U_j \to U_i \quad \textit{et} \quad U_i \to V \, .$$

On suppose de plus que l'immersion composée

$$X_{ij} \to X_i \to V$$

coïncide avec

$$X_{ij} \to X_j \to V$$

si $i \neq j$. Pour tout objet A de $\mathcal{A}$ on pose

$$\underline{\underline{X}}(A) = \underset{i}{\cup} \, \underline{\underline{X}}_i(A)$$

(réunion dans $\underline{\underline{V}}(A)$) et l'on note $\mathcal{A}_X$ la sous-algèbre du produit des $\mathcal{A}_{X_i}$, $i \in I$, formée des familles $(\alpha_i)_{i \in I}$ telles que, si $i \neq j$, les images de α_i et α_j dans $\mathcal{A}_{X_{ij}}$ coïncident.

Alors l'objet $X = (\underline{\underline{X}}, \mathcal{A}_X)$ sur $\mathbb{F}_1$ (avec les morphismes d'évaluation évidents) est une variété sur $\mathbb{F}_1$ telle que

$$X \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z} = V \, .$$

Preuve. Les composées des morphismes d'algèbres

$$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \to \mathcal{A}_{X_i} \to \mathcal{A}_{X_{ij}}$$

et

$$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \to \mathcal{a}_{X_j} \to \mathcal{a}_{X_{ij}}$$

coïncident. Il existe donc une immersion

$$u : X \to V$$

dans $\mathcal{O}$. Par ailleurs, si $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ et si

$$\varphi : X \to W$$

est un morphisme de $\mathcal{O}$, la restriction φ_i (resp. φ_{ij}) de φ à X_i (resp. X_{ij}) est induite par un unique morphisme algébrique $\varphi_{i\mathbb{Z}}$ (resp. $\varphi_{ij\mathbb{Z}}$) de U_i (resp. $U_i \cap U_j$) vers W. Comme la restriction de $\varphi_{i\mathbb{Z}}$ à X_{ij} coïncide avec celle de φ, la restriction de $\varphi_{i\mathbb{Z}}$ à $U_i \cap U_j$ est égale à $\varphi_{ij\mathbb{Z}}$ (unicité). C'est donc aussi la restriction de $\varphi_{j\mathbb{Z}}$ à $U_i \cap U_j$. Par conséquent, la collection des morphismes $\varphi_{i\mathbb{Z}}$, $i \in I$, définit par recollement un morphisme $\varphi_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, W)$ dont la restriction à U_i est égale à $\varphi_{i\mathbb{Z}}$, quel que soit $i \in I$. Par suite, si $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, l'application

$$\underline{\underline{\varphi}}_{\mathbb{Z}} \circ \underline{\underline{u}} : \underline{\underline{X}}(A) \to \underline{\underline{W}}(A)$$

coïncide avec $\underline{\underline{\varphi}}_i$ sur le sous-ensemble $\underline{\underline{X}}_i(A)$. Comme $\underline{\underline{X}}(A)$ est, par définition, la réunion des $\underline{\underline{X}}_i(A)$, $i \in I$, on voit que

$$\underline{\underline{\varphi}} = \underline{\underline{\varphi}}_{\mathbb{Z}} \circ \underline{\underline{u}}.$$

Par ailleurs, le morphisme d'algèbres composé

$$\mathcal{O}(W_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{Z}}^*} \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{u^*} \mathcal{a}_X \longrightarrow \mathcal{a}_{X_i}$$

coïncide avec φ_i^* et $\mathcal{a}_X$ est contenue dans le produit des algèbres $\mathcal{a}_{X_i}$, donc

$$\varphi^* = u^* \circ \varphi_{\mathbb{Z}}^*.$$

Par conséquent $\varphi = \varphi_{\mathbb{Z}} \circ u$.

q.e.d.

5 Exemples

5.1

Soient $N \simeq \mathbb{Z}^d$ un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $d \geq 1$, et Δ un éventail de $N_{\mathbb{R}} = N \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R}$. Notons $\mathbb{P}(\Delta)$ la variété torique associée à Δ [9] [13]. Supposons que Δ est régulier et que, par conséquent, $\mathbb{P}(\Delta)$ est une variété lisse sur $\mathbb{Z}$. On se propose de montrer que $\mathbb{P}(\Delta)$ est l'extension à $\mathbb{Z}$ d'une variété $X(\Delta)$ sur $\mathbb{F}_1$.

Par définition, Δ est une famille finie $\{\tau\}$ de cônes stricts de $N_{\mathbb{R}}$. A chaque cône τ est associée une variété torique affine

$$U_\tau = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}\,[\mathcal{S}_\tau])\,,$$

où $\mathcal{S}_\tau$ est le monoïde intersection de $M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ avec le dual $\tau^* \subset M_{\mathbb{R}}$ du cône τ. La variété $\mathbb{P}(\Delta)$ est obtenue par recollement des variétés U_τ le long de leurs ouverts $U_{\tau \cap \tau'}$.

Si $m \in \mathcal{S}_\tau$ on note

$$\chi^m : U_\tau \to \mathbb{A}^1$$

le caractère associé à m. Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, on note $\mu(R)$ l'ensemble (fini) des racines de l'unité de R et

$$\underline{X}_\tau(R) \subset U_\tau(R)$$

l'ensemble (fini) des éléments $x \in U_\tau(R)$ tels que

$$\chi^m(x) \in \mu(R) \cup \{0\}$$

quel que soit $m \in \mathcal{S}_\tau$.

Par ailleurs, suivant Batyrev et Tschinkel [2], on désigne par C_τ l'ensemble des points $x \in U_\tau(\mathbb{C})$ tels que

$$|\chi^m(x)| \leq 1$$

quel que soit $m \in \mathcal{S}_\tau$, et

$$C_\Delta = \bigcup_\tau C_\tau$$

dans $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$. Notons $\mathcal{a}_\tau$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur C_τ dont la restriction à l'intérieur de C_τ est holomorphe. On note aussi $\mathcal{a}_\Delta$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur C_Δ dont la restriction à l'intérieur de chaque C_τ, $\tau \in \Delta$, est holomorphe.

Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ et si $\sigma \in R \to \mathbb{C}$ est un morphisme d'anneaux unitaires, l'application

$$U_\tau(R) \to U_\tau(\mathbb{C})$$

induite par σ envoie $\underline{X}_\tau(R)$ dans C_τ. On peut donc évaluer les fonctions de $\mathcal{a}_\tau$ en chaque point $x \in \underline{X}_\tau(R)$. On obtient ainsi un truc $X_\tau = (\underline{X}_\tau, \mathcal{a}_\tau)$ sur $\mathbb{F}_1$. Si A est une variété affine sur $\mathbb{F}_1$ on pose

$$\underline{\underline{X(\Delta)}}(A) = \bigcup_\tau \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{\mathbb{Z}}, U_\tau)$$

dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{\mathbb{Z}}, \mathbb{P}(\Delta))$. Par image inverse et l'énoncé i) ci-dessous, un point $x \in \underline{\underline{X(\Delta)}}(A)$ définit une évaluation $e_x : \mathcal{a}_\Delta \to \mathcal{a}_A$.

Théorème 1. i) *Pour tout cône ouvert τ de Δ, le truc X_τ est une variété affine sur $\mathbb{F}_1$ et*

$$U_\tau = X_\tau \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z}\,.$$

ii) *L'objet* $X(\Delta) = (\underline{\underline{X(\Delta)}}, \mathfrak{a}_\Delta)$ *sur* $\mathbb{F}_1$ *est une variété sur* $\mathbb{F}_1$ *telle que*

$$X(\Delta) \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z} = \mathbb{P}(\Delta)\,.$$

Preuve. Montrons d'abord que i) implique ii). Il résulte de i) que, si A est une variété affine sur $\mathbb{F}_1$ et $\tau \in \Delta$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X_\tau) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{\mathbb{Z}}, U_\tau)\,. \tag{14}$$

Par conséquent, la Proposition 5 permet de recoller les variétés X_τ le long des sous-variétés $X_{\tau\cap\tau'}$ pour obtenir une variété sur $\mathbb{F}_1$ dont l'extension des scalaires à $\mathbb{Z}$ est la variété $\mathbb{P}(\Delta)$. Si τ et τ' sont deux cônes de Δ, les morphismes d'algèbres

$$\mathfrak{a}_\Delta \to \mathfrak{a}_\tau \to \mathfrak{a}_{\tau\cap\tau'}$$

et

$$\mathfrak{a}_\Delta \to \mathfrak{a}_{\tau'} \to \mathfrak{a}_{\tau\cap\tau'}$$

coïncident, donc, d'après la Proposition 4, et la définition de $\underline{\underline{X(\Delta)}}$, l'objet $X(\Delta) = (\underline{\underline{X(\Delta)}}, \mathfrak{a}_\Delta)$, muni des évaluations déduites de (14), est une variété sur $\mathbb{F}_1$ telle que $X(\Delta) \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z} = \mathbb{P}(\Delta)$.

Il reste à démontrer i). Soit donc V une variété affine sur $\mathbb{Z}$ et

$$\varphi : X_\tau \to V$$

un morphisme de $\mathcal{T}$. Supposons d'abord que V soit la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}\,[T])$. On a $\mathcal{O}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}[T]$ et l'on peut décrire comme suit la fonction

$$\alpha = \varphi^*(T) \in \mathfrak{a}_\tau\,.$$

Puisque Δ est régulier, il existe une base $\{m_1, \ldots, m_d\}$ de M telle que $\{m_1, \ldots, m_r\}$ soit une famille génératrice du semi-groupe $\mathcal{S}_\tau$, où r est la dimension de τ. Soit τ' le cône ouvert $\mathbb{R}_+ m_1 + \ldots + \mathbb{R}_+ m_d$. La carte affine

$$\chi : U_{\tau'}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^d$$

donnée par

$$\chi(x) = (\chi^{m_1}(x), \ldots, \chi^{m_d}(x))$$

identifie C_τ (resp. son intérieur) avec l'ensemble des points (x_i) de $\mathbb{C}^d$ tels que

$$|x_1| \leq 1, \ldots, |x_{d-r}| \leq 1,\ |x_{d-r+1}| = \ldots = |x_d| = 1$$

(resp.

$$|x_1| < 1, \ldots, |x_{d-r}| < 1,\ |x_{d-r+1}| = \ldots = |x_d| = 1)\,.$$

Autrement dit C_τ (resp. son intérieur) est le produit de $d - r$ disques fermés (resp. ouverts) et de r cercles (cf. [13], Proposition 3.2.9).

La restriction de $\alpha(x_1, \ldots, x_d)$ au produit des d cercles $|x_j| = 1$, $j = 1, \ldots, d$, admet un développement de Fourier convergent

$$\alpha(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_d}) = \sum_{I \subset \mathbb{Z}^d} a_I \, e^{iI\cdot\theta} ,$$

où $a_I \in \mathbb{C}$ et $I \cdot \theta = \sum_{j=1}^{d} i_j \, \theta_j$ si $I = (i_1, \ldots, i_d)$. Comme α est holomorphe dans C_τ^0, les coefficients a_I sont nuls si l'un des indices $i_1, \ldots, i_{d-r}$ est strictement négatif.

Par ailleurs, pour tout entier $n \geq 1$, considérons l'anneau

$$R_{d,n} = \mathbb{Z}\,[T_1, \ldots, T_d]/(T_j^n = 1, \, j = 1, \ldots, d) ,$$

et le point $x_n \in X_\tau(R_{d,n})$ de coordonnées

$$\chi^{m_j}(x_n) = T_j \in R_{d,n} ,$$

quel que soit $j = 1, \ldots, d$. Son image $\underline{\varphi}(x_n)$ dans $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}(R_{d,n}) = R_{d,n}$ est la classe d'un polynôme de Laurent

$$P_n(T_1, \ldots, T_d) = \sum_{I \in \mathbb{Z}^d} a_I(n) T_1^{i_1} \ldots T_d^{i_d} ,$$

où les coefficients $a_I(n)$ sont entiers et presque tous nuls.

Tout morphisme $\sigma : R_{d,n} \to \mathbb{C}$ est obtenu en envoyant chaque T_j, $j \in J$, sur une racine n-ième ζ_j de l'unité. On a donc, d'après la condition (6),

$$P_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_d) = \alpha(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$$

dès que $\zeta_1^n = \zeta_2^n = \ldots = \zeta_d^n = 1$. Pour tout multi-indice $I \subset \mathbb{Z}^d$ le coefficient de Fourier a_I se calcule par la formule

$$a_I = (2\pi)^{-d} \int_{(S^1)^d} \alpha(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_d}) \, e^{-iI\cdot\theta} \, d\theta_1 \ldots d\theta_d .$$

C'est donc la limite quand n tend vers l'infini de

$$a_I(n) = n^{-d} \sum_{\zeta_1^n = \ldots = \zeta_d^n = 1} P_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \prod_{j=1}^{d} \zeta_j^{-i_j} .$$

Puisque $a_I(n)$ est un entier quel que soit $n \geq 1$, a_I doit être un entier, nul pour presque tout I (puisque la série de Fourier définissant α converge). Il en résulte que la fonction $\alpha = \varphi^*(T)$ est un polynôme

$$P(T_1, \ldots, T_d) \in \mathbb{Z}\,[T_1, \ldots, T_{d-r}, T_{d-r+1}^{\pm 1}, \ldots, T_d^{\pm 1}] ,$$

c'est-à-dire un élément de $\mathbb{Z}[\mathcal{S}_\tau]$. Elle définit donc un morphisme

$$\varphi_{\mathbb{Z}} : U_\tau \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$$

tel que $\varphi^* : \mathcal{O}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}) \to \mathcal{a}_\tau$ soit le composé de $\varphi^*_{\mathbb{Z}}$ et de la restriction à C_τ. Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ et si $\sigma : R \to \mathbb{C}$ est un morphisme d'anneaux unitaires, il résulte alors de (8) que le morphisme composé

$$\underline{X_\tau}(R) \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}(R) = R \xrightarrow{\ \sigma\ } \mathbb{C}$$

coïncide avec

$$\underline{X_\tau}(R) \longrightarrow U_\tau(R) \xrightarrow{\ \varphi_{\mathbb{Z}}\ } R \xrightarrow{\ \sigma\ } \mathbb{C}.$$

Comme le produit des morphismes σ est injectif on voit que φ est la restriction de $\varphi_{\mathbb{Z}}$ à X_τ.

Soit maintenant

$$\varphi : X_\tau \to V$$

un morphisme de $\mathcal{T}$ où $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ est une variété affine arbitraire. Soit W la réunion des composantes horizontales de V, c'est à dire le spectre de l'anneau des fonctions de V modulo torsion, et $W \to V$ l'inclusion canonique. Pour tout $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, l'application $W(R) \to V(R)$ est bijective. On peut donc supposer que $V = W$, c'est à dire que la variété V est plate sur $\mathbb{Z}$. Chacune des coordonnées

$$\pi_j : V \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}\,,$$

$j = 1, \ldots, n$, définit un morphisme $\pi_j \circ \varphi$ de X_τ vers $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{T}$, dont on vient de voir qu'il est induit par un morphisme $\psi_{j\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(U_\tau, \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}})$. Notons

$$\psi_{\mathbb{Z}} : U_\tau \to \mathbb{A}^n$$

le produit des morphismes $\psi_{j\mathbb{Z}}$, $j = 1, \ldots, n$. La restriction de $\psi_{\mathbb{Z}}$ à X_τ coïncide avec le morphisme composé

$$X_\tau \xrightarrow{\varphi} V \longrightarrow \mathbb{A}^n\,.$$

Par ailleurs l'image de $\psi_{\mathbb{Z}}$ est contenue dans V, car C_τ est Zariski dense dans $U_\tau(\mathbb{C})$ et donc

$$\psi_{\mathbb{Z}}(U_\tau(\mathbb{C})) \subset \overline{\psi_\tau(C_\tau)} \subset V(\mathbb{C})\,.$$

La deuxième inclusion ci-dessus est due au fait que si $\alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^d_{\mathbb{C}})$, la restriction de $\alpha \circ \psi_{\mathbb{Z}}$ à C_τ est égale à $\varphi^*(\alpha | V(\mathbb{C}))$; elle est donc nulle si α s'annule sur $V(\mathbb{C})$. Puisque V est plate sur $\mathbb{Z}$ on en conclut que $\psi_{\mathbb{Z}}$ se factorise par un morphisme algébrique $\varphi_{\mathbb{Z}} : U_\tau \to V$, dont la restriction à X_τ est égale à φ. Cela démontre le théorème.

5.2

En prenant pour Δ les éventails habituels on obtient les exemples suivants de variétés $X(\Delta)$ sur $\mathbb{F}_1$.

5.2.1

La *droite affine* $\mathbb{A}^1$ sur $\mathbb{F}_1$ est la variété affine sur $\mathbb{F}_1$ définie par

$$\underline{\mathbb{A}}^1(R) = \mu(R) \cup \{0\}\,,\ \text{si } R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})\,,$$

(rappelons que $\mu(R)$ désigne l'ensemble des racines de l'unité de R), $\mathcal{a}_{\mathbb{A}^1}$ étant l'algèbre des fonctions continues sur le disque unité $D = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 1\}$ qui sont holomorphes dans l'intérieur de D, avec les évaluations évidentes. On a

$$\mathbb{A}^1 \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}\,.$$

5.2.2

Le *groupe multiplicatif* $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{F}_1$ est la variété affine sur $\mathbb{F}_1$ définie par

$$\underline{\mathbb{G}}_m(R) = \mu(R) \quad \text{si} \quad R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})\,,$$

l'algèbre $\mathcal{a}_{\mathbb{G}_m}$ étant celle des fonctions continues sur le cercle unité. Son extension des scalaires

$$\mathbb{G}_m \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z} = \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$$

est le schéma en groupe multiplicatif sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

5.2.3

On définit de même les produits $\mathbb{A}^a \times \mathbb{G}_m^b$ sur $\mathbb{F}_1$, $a, b \in \mathbb{N}$.

5.2.4

L'espace projectif $\mathbb{P}^d$ sur $\mathbb{F}_1$ est une variété sur $\mathbb{F}_1$ obtenue par recollement de $d+1$ espaces affines $\mathbb{A}^d$ sur $\mathbb{F}_1$. Son extension à $\mathbb{Z}$ est l'espace projectif $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Z}}$ de dimension d sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, l'ensemble fini $\underline{\mathbb{P}}^d(\mathrm{Spec}(R))$ est formé des points de $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Z}}(R)$ dont on peut choisir un système de coordonnées homogènes dans $(\mu(R) \cup \{0\})^{d+1}$. On a $\mathcal{a}_{\mathbb{P}^d} = \mathbb{C}$ et, plus généralement, $\mathcal{a}_{\Delta} = \mathbb{C}$ quand l'éventail Δ est complet.

5.3

Soit Λ un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini et $\|\cdot\|$ une norme hermitienne sur $\Lambda \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C}$. On pose $\overline{\Lambda} = (\Lambda, \|\cdot\|)$.

Soit $B = \{x \in \Lambda \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C}/\|x\| \leq 1\}$ la boule unité et Φ une partie de $(B \cap \Lambda) - \{0\}$ telle que si $v \in (B \cap \Lambda) - \{0\}$, un et un seul des vecteurs v et $-v$ est dans Φ. Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ on désigne par $\underline{X}(R)$ l'ensemble fini des éléments de $\Lambda \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R$ qui peuvent s'écrire

$$x = \sum_{v \in \Phi} v \otimes \zeta_v\,, \tag{15}$$

où $\zeta_v \in \mu(R) \cup \{0\}$. L'ensemble fini $\underline{X}(R)$ ne dépend pas de Φ et définit un foncteur

$$\underline{X} : \mathcal{R} \to \mathcal{E}ns\,.$$

Par ailleurs, notons $\Lambda_0 \subset \Lambda$ le réseau engendré par Λ et par C le sous-ensemble de $\Lambda_0 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C}$ formé des vecteurs de norme au plus égale à $t = \mathrm{card}(\Phi)$. Soit $\mathcal{a}$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur C qui sont holomorphes dans l'intérieur de C. Si $x \in \underline{X}(R)$ et si $\sigma : R \to \mathbb{C}$ est un morphisme d'anneaux unitaires, il résulte de (15) que

$$\|\sigma(x)\| = \left\| \sum_{v \in \Phi} v \otimes \sigma(\zeta_v) \right\| \leq t\,.$$

On peut donc évaluer les fonctions de $\mathcal{a}$ en $\sigma(x)$.

Proposition 6. *Le couple $X(\overline{\Lambda}) = (\underline{X}, \mathcal{a})$, muni des évaluations précédentes, est une variété affine sur $\mathbb{F}_1$ dont l'extension des scalaires à $\mathbb{Z}$ est le spectre $X_{\mathbb{Z}}$ de l'algèbre symétrique du dual de Λ_0.*

Preuve. Considérons le morphisme de groupes abéliens

$$\pi : \mathbb{Z}^{\Phi} \to \Lambda$$

tel que

$$\pi((n_v)) = \sum_{v \in \Phi} n_v\, v \in \Lambda\,.$$

Si $\mathbb{A}^{\Phi}$ est l'espace affine sur $\mathbb{F}_1$ de rang t, π induit un morphisme de trucs sur $\mathbb{F}_1$ de $\mathbb{A}^{\Phi}$ vers $X(\overline{\Lambda})$, qu'on note aussi π (on remarquera que si $(z_v) \in \mathbb{C}^{\Phi}$ et $|z_v| \leq 1$ quel que soit $v \in \Phi$, le vecteur $\sum\limits_{v \in \Phi} z_v\, v$ est dans C).

Si $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ est une variété affine et si

$$\varphi : X(\overline{\Lambda}) \to V$$

est un morphisme de $\mathcal{T}$, le morphisme composé

$$\varphi \circ \pi : \mathbb{A}^{\Phi} \to V$$

est, d'après le Théorème 1, la restriction d'un morphisme

$$\psi_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{A}^{\Phi}_{\mathbb{Z}}, V)\,.$$

Le choix d'une section s de la projection $\mathbb{Z}$-linéaire π de $\mathbb{Z}^{\Phi}$ sur Λ_0 induit une section algébrique

$$s_{\mathbb{Z}} : X_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{A}^{\Phi}_{\mathbb{Z}}$$

de la projection $\pi_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{A}^{\Phi}_{\mathbb{Z}}, X_{\mathbb{Z}})$. Notons

$$\varphi_{\mathbb{Z}} : X_{\mathbb{Z}} \to V$$

le morphisme composé $\psi_{\mathbb{Z}} \circ s_{\mathbb{Z}}$. Si $\alpha \in \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$, la restriction de $\varphi_{\mathbb{Z}}^*(\alpha)$ à C coïncide avec

$$s^* \circ \pi^* \circ \varphi^*(\alpha) = \varphi^*(\alpha)\,.$$

Il en résulte, comme dans la fin de la preuve du Théorème 1, que la restriction de $\varphi_{\mathbb{Z}}$ à $X(\overline{\Lambda})$ est égale à φ. q.e.d.

Remarque. Du point de vue de la théorie d'Arakelov, le couple $\overline{\Lambda} = (\Lambda, \|\cdot\|)$ est un fibré vectoriel sur la courbe $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$ et les éléments de $B \cap \Lambda$ sont les sections globales de ce fibré. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_1$ au sens de Kapranov et Smirnov (cf. [11] et 1.3). On peut sans doute voir $X(\overline{\Lambda})$ comme la variété affine sur $\mathbb{F}_1$ associé à cet espace vectoriel.

5.4

Il faudrait bien sûr trouver d'autres exemples que les précédents. Par exemple, si G est un schéma en groupes de Chevalley sur $\mathbb{Z}$, peut-on le définir sur $\mathbb{F}_1$? Et qu'en est-il des variétés de drapeaux associées ?

Par exemple la variété de Grassmann $G(2,4)$ est aussi la conique Q de $\mathbb{P}^5_{\mathbb{Z}}$ d'équation homogène

$$xy - zt + uv = 0\,. \tag{16}$$

Si l'on veut que le nombre des points de $\underline{\underline{X}}(R_n)$, $n \geq 1$, vérifie le Théorème 2 iii) ci-dessous, on peut définir comme suit un objet X sur $\mathbb{F}_1$ contenu dans celui associé à Q. Notons $S_{1,\mathbb{Z}}$, $S_{2,\mathbb{Z}}$, $S_{3,\mathbb{Z}}$ et $S_{4,\mathbb{Z}}$ les sous-variétés localement fermées de Q suivantes

$$S_{1,\mathbb{Z}} = Q \cap \{x \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^4_{\mathbb{Z}}$$

(coordonnées z/x, t/x, u/x, v/x),

$$S_{2,\mathbb{Z}} = Q \cap \{x = 0,\, z \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^3_{\mathbb{Z}}$$

(coordonnées y/z, u/z, v/z),

$$S_{3,\mathbb{Z}} = Q \cap \{x = z = 0,\, u \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}}$$

(coordonnées y/u, t/u), et

$$S_{4,\mathbb{Z}} = Q \cap \{x = z = u = 0\} \simeq \mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$$

(coordonnées homogènes (y,t,v)).

Notons S_1, S_2, S_3, S_4 les variétés sur $\mathbb{F}_1$ correspondantes (cf. 5.2), munies des immersions évidentes $S_\alpha \to Q$ dans $\mathcal{O}$. Si $A \in \mathcal{A}$ on pose

$$\underline{\underline{X}}(A) = \underline{\underline{S}}_1(A) \cup \underline{\underline{S}}_2(A) \cup \underline{\underline{S}}_3(A) \cup \underline{\underline{S}}_4(A)$$

dans $\underline{\underline{Q}}(A)$ et $\mathcal{a}_X = \mathbb{C}$.

Question 3. *L'objet $X = (\underline{\underline{X}}, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{F}_1$ est-il une variété sur $\mathbb{F}_1$ telle que $X \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z} = Q$?*

6 Fonctions zêta

6.1

Soit X une variété sur $\mathbb{F}_1$. On cherche à lui associer une fonction $\zeta_X(s)$. Si $n \geq 1$, rappelons que $R_n = \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$ et que l'ensemble fini $\underline{\underline{X}}(R_n)$ est aussi celui des morphismes de $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{1^n})$ vers X (cf. (9) si X est affine ; le cas général se montre de la même façon grâce à la Proposition 3). Puisque la fonction zêta d'une variété algébrique sur le corps $\mathbb{F}_q$, $q > 1$, s'obtient à partir du nombre de ses points dans les corps $\mathbb{F}_{q^n}$, $n \geq 1$, il est naturel de définir $\zeta_X(s)$ à l'aide des nombres entiers $\# \underline{\underline{X}}(R_n)$. On fera l'hypothèse simplificatrice suivante :

(Z) Il existe un polynôme $N(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tel que, quel que soit l'entier $n \geq 1$,

$$\# \underline{\underline{X}}(R_n) = N(2n+1) .$$

En imitant A. Weil, introduisons alors la série formelle des variables q et T

$$Z(q,T) = \exp\left(\sum_{r\geq 1} N(q^r)\, T^r/r\right) .$$

Pour tout nombre réel s on considère alors la fonction $Z(q, q^{-s})$ au voisinage de $q = 1$.

Lemme 1. i) *Pour tout $s \in \mathbb{R}$ la fonction $Z(q,q^{-s})^{-1}$ a un zéro d'ordre $\chi = N(1)$ en $q = 1$. On a de plus*

$$\lim_{q\to 1} Z(q,q^{-s})^{-1}(q-1)^{-\chi} = \zeta_X(s) ,$$

où $\zeta_X(s)$ est la valeur en s d'un polynôme à coefficients entiers.

ii) *Si $N(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i\, x^i$ on a*

$$\zeta_X(s) = \prod_{i=0}^{d} (s-i)^{a_i} .$$

Preuve. Si $N(x)$ est la somme de deux polynômes $N'(x)$ et $N''(x)$, les fonctions $Z(q,T)$ et $\zeta_X(s)$ associées à N sont les produits de celles associées à N' et N''. Par conséquent il suffit de traiter le cas où $N(x) = x^d$. On a alors

$$Z(q,T) = \exp\left(\sum_{r\geq 1} q^{rd}\, T^r/r\right) = (1 - q^d\, T)^{-1}$$

et par conséquent

$$Z(q,q^{-s})^{-1} = 1 - q^{d-s} .$$

Quand q tend vers 1 on trouve

$$Z(q, q^{-s})^{-1} = (s-d)(q-1) + O(1)\,,$$

ce qui démontre le lemme.

6.2 Théorème 2.

i) *Si Δ est un éventail régulier, la variété $X(\Delta)$ sur $\mathbb{F}_1$ qui lui est associée (Théorème* 1*) vérifie la condition* (Z). *Le polynôme $N(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tel que*

$$\# X(\Delta)(\mathbb{F}_{1^n}) = N(2n+1)\,, \qquad n \geq 1\,,$$

vérifie aussi

$$\# \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{F}_q) = N(q)$$

pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$ d'ordre $q > 1$. De plus $N(1)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$.

ii) *Si $\overline{\Lambda} = (\Lambda, \|\cdot\|)$ est un réseau hermitien, la variété affine $X(\overline{\Lambda})$ sur $\mathbb{F}_1$ qui lui est associée (Proposition* 6*) vérifie la condition* (Z). *Le polynôme $N(x)$ correspondant vérifie $N(1) = 1$ et $N(x) - x^t$ est un polynôme de degré au plus $t-1$ (où $t = \mathrm{card}(\Phi)$, voir 5.3).*

iii) *Soit Q la quadratique d'équation (16) sur $\mathbb{Z}$ et*

$$N(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1\,.$$

On a alors

$$N(2n+1) = \# \underline{\underline{X}}(R_n)$$

où $\underline{\underline{X}}$ est le foncteur défini en 5.4, et

$$N(q) = \# Q(\mathbb{F}_q)$$

pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$, $q > 1$. De plus $N(1) = 6$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de $Q(\mathbb{C})$.

Preuve. Pour prouver i) il suffit de traiter le cas d'une variété torique affine de la forme U_τ. En effet, il en résultera en général que les nombres $\# X(\Delta)(\mathbb{F}_{1^n})$ et $\# \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{F}_q)$ sont données par les valeurs (en $2n+1$ et q) du même polynôme, car $\underline{\underline{X(\Delta)}}(R_n)$ (resp. $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{F}_q)$) est la réunion des ensembles $\underline{X}_\tau(R_n)$ (resp. $U_\tau(\mathbb{F}_q)$), amalgamés le long des sous-ensembles $\underline{X}_{\tau\cap\tau'}(R_n)$ (resp. $U_{\tau\cap\tau'}(\mathbb{F}_q)$).

Soit dont τ un cône ouvert régulier de dimension r et $\{m_1, \ldots, m_d\}$ une base de M telle que $\{m_1, \ldots, m_r\}$ soit une famille génératrice de $\mathcal{S}_\tau$. Comme dans la preuve du Théorème 1 i), si $\tau' = \mathbb{R}_+ m_1 + \ldots + \mathbb{R}_+ m_d$, la carte $U_{\tau'} \to \mathbb{A}^d_{\mathbb{Z}}$ donnée par la famille des χ^{m_i}, $1 \leq i \leq d$, identifie $\underline{X}_\tau(R)$ à l'ensemble fini $(\mu(R) \cup \{0\})^{d-r} \times \mu(R)^r$. Cette même carte identifie $U_\tau(\mathbb{F}_q)$ à l'ensemble $\mathbb{F}_q^{d-r} \times (\mathbb{F}_q^*)^r$. Par conséquent le premier énoncé du théorème est vérifié avec

$$N(x) = x^{d-r}(x-1)^r\,.$$

Par ailleurs, $U_\tau(\mathbb{C})$ a le type d'homotopie de $(S^1)^r$. Sa caractéristique d'Euler-Poincaré est donc nulle si $r > 0$ est égale à 1 si $r = 0$. On a donc bien $N(1) = \chi(U_\tau(\mathbb{C}))$.

Dans le cas ii) l'ensemble $\underline{X}(R_n)$ est celui des éléments de $\Lambda \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R_n$ de la forme

$$x = \sum_{v\in\Phi} v \otimes \zeta_v \, ,$$

où $\zeta_v \in \mu(R_n) \cup \{0\}$ (voir (15)). L'ensemble $\mu(R_n)$ est formé des polynômes $\pm T^i$, $i = 1, \ldots, n$, et la famille (T^i), $i = 1, \ldots, n$ est une base de R_n sur $\mathbb{Z}$, donc tout élément de $\Lambda \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R_n$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes T^i$$

avec $x_i \in \Lambda$. Ceci conduit à décrire $\underline{X}(R_n)$ de la façon suivante. Si $\Phi' \subset \Phi$ est une partie de Φ, appelons $V(\Phi')$ l'ensemble des vecteurs non nuls de Λ de la forme

$$\sum_{v\in\Phi'} \varepsilon_v \, v \, , \quad \text{avec } \varepsilon_v \pm 1 \, .$$

Si $k \geq 1$ est un entier on note $V(k)$ l'ensemble des collections $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de k vecteurs de Λ telles qu'il existe une famille finie $(\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$ de sous-ensembles disjoints de Φ tels que $v_j \in V(\Phi_j), 1 \leq j \leq k$. On note $X(k,n)$ l'ensemble des éléments de $\underline{X}(R_n)$ de la forme

$$x = \sum_{j=1}^{k} v_j \otimes T^{n_j} \, ,$$

où $\{v_1, \cdots, v_k\} \in V(k)$ et $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k \leq n$. L'ensemble $\underline{X}(R_n)$ est la réunion disjointe de $\{0\}$ et des sous-ensembles $X(k,n)$. Par ailleurs,

$$\# \, X(k,n) = (\# \, V(k)) n(n-1) \ldots (n-k+1) \, .$$

Si $v_j \in \Phi_j$ on a $-v_j \in \Phi_j$, donc le cardinal de chaque ensemble $V(k)$ est divisible par 2^k, et $\# \, X(k,n)$ est un polynôme entier de la variable $2n$, nul à l'origine et de degré k. Si $k = t = \mathrm{card}(\Phi)$, chaque ensemble Φ_j comporte un seul vecteur et son opposé, donc $\# \, X(t,n)$ est la somme de $(2n)^t$ et d'un polynôme de degré au plus $t-1$ en la variable $2n$. Il en résulte que $\# \, \underline{X}(R_n) = N(2n+1)$ où $N(x) \in \mathbb{Z}\,[x]$ vérifie les conditions de l'énoncé (on notera que $N(1) = 1$ est encore la caractéristique d'Euler-Poincaré de $X_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$).

Pour montrer iii) il suffit de noter que $\underline{X}(R_n)$ (resp. $Q(\mathbb{F}_q)$) est la réunion disjointe des ensembles $\underline{\underline{S}}_\alpha(R_n)$ (resp. $S_{\alpha,\mathbb{Z}}(\overline{\mathbb{F}}_q)$), $\alpha = 1, 2, 3, 4$, et d'appliquer le Théorème 2 i).

6.3 Exemples.

6.3.1

Le point $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)$ a pour fonction zêta

$$\zeta_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)}(s) = s\,.$$

6.3.2

La droite affine $\mathbb{A}^1$ est telle que $N(q) = q$ et

$$\zeta_{\mathbb{A}^1}(s) = s - 1\,.$$

6.3.3

Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ vérifie $N(q) = q - 1$ et

$$\zeta_{\mathbb{G}_m}(s) = (s-1)/s\,.$$

6.3.4

Si Δ et Δ' sont deux éventails on a

$$\zeta_{X(\Delta\times\Delta')}(s) = \zeta_{X(\Delta)}(s) \times \zeta_{X(\Delta')}(s)\,.$$

6.3.5

L'espace projectif $\mathbb{P}^d$ vérifie

$$N(q) = [d]$$

(voir 1.1) et donc

$$\zeta_{\mathbb{P}^d}(s) = s(s-1)\dots(s-d)\,.$$

Cette formule et les précédentes sont celles prévues par Manin [14] (voir (3)).

6.3.6

Soit $\Lambda = \mathbb{Z}$ et $\lambda = \|1\| > 0$ la norme des générateurs de Λ. L'entier $t \geq 0$ est la partie entière de λ et la fonction zêta de $X(\overline{\Lambda})$ ne dépend que de t, i.e. $\zeta_{X(\overline{\Lambda})}(s) = \zeta_t(s)$, avec $\zeta_0(s) = s$, $\zeta_1(s) = s-1$, $\zeta_2(s) = s(s-2)/(s-1)$,... Je ne connais pas de formule générale pour $\zeta_t(s)$.

6.4 Remarques.

6.4.1

La définition du Lemme 1 i) a peut-être un sens dans des situations où (Z) n'est pas vérifiée. On peut aussi se demander si une variété X lisse sur $\mathbb{F}_1$ vérifie la condition (Z), si $N(q)$ est le cardinal de $(X \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z})(\mathbb{F}_q)$, $q > 1$, et si $N(1)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de $(X \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z})(\mathbb{C})$. En termes de motifs :

Question 4. *Les motifs des variétés lisses sur $\mathbb{F}_1$ sont-ils des motifs de Tate mixtes ?*

6.4.2

Quand $X = \mathrm{Spec}(R)$, $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, le cardinal de $\underline{X}(R_n)$ n'a pas un comportement simple et je ne sais pas définir $\zeta_X(s)$. Mais on remarquera que X n'est jamais lisse sur $\mathbb{F}_1$ (sauf quand $R = \mathbb{Z}$).

6.4.3

Soit G un graphe fini. M. Kontsevich associe à G des variétés Y_G et X_G sur $\mathbb{Z}$, qui sont "souvent" des variétés polynomialement dénombrables [3], c'est-à-dire telles que leur nombre de points dans $\mathbb{F}_q$, $q > 1$, est la valeur en $x = q$ d'un polynôme $N(x)$ à coefficients entiers. Kontsevich a suggéré que ces variétés sont définies sur $\mathbb{F}_1$. Lorsquelles sont polynomialement dénombrables peut-être vérifient-elles la condition (Z) avec le même polynôme $N(x)$. De même on peut se demander si un matroïde définit une variété sur $\mathbb{F}_1$.

7 Sur l'image du J-homomorphisme

7.1

Comme l'a noté Manin [14], la formule (1) suggère que les groupes de K-théorie algébrique de $\mathbb{F}_1$ sont les groupes d'homotopie stable des sphères. En effet, rappelons que, d'après D. Quillen, la K-théorie d'un anneau A est

$$K_m(A) = \pi_m \,\mathrm{BGL}(A)^+ \,, \quad \text{si } m \geq 1 \,, \tag{17}$$

où le CW-complexe $\mathrm{BGL}(A)^+$ est obtenu en adjoignant au classifiant du groupe linéaire infini $\mathrm{GL}(A)$ des cellules de dimensions 2 et 3 (voir [12]). Si A est un corps et $m > 1$, la formule (17) vaut aussi en remplaçant le groupe linéaire par le groupe spécial linéaire.

Par ailleurs, un théorème de Barratt, Priddy et Quillen [16] affirme que si $\Sigma_\infty = \bigcup_{N \geq 1} \Sigma_N$ est le groupe symétrique infini, on a

$$\pi_m \, B \, \Sigma_\infty^+ = \pi_m^s \,, \quad m \geq 1 \,, \tag{18}$$

où π_m^s est le m-ième groupe d'homotopie stable des sphères. Il est donc logique d'écrire

$$K_m(\mathbb{F}_1) = \pi_m^s \,, \quad m \geq 1 \,. \tag{19}$$

Variante. Le groupe des unités de $\mathbb{F}_1$ est $\mathbb{F}_1^* = \mu(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$. On peut donc envisager que $\mathrm{GL_N}(\mathbb{F}_1)$ est le groupe des matrices monomiales $N \times N$ dont les entrées sont ± 1, c'est-à-dire le produit en couronnes $\Sigma_N \int (\mathbb{Z}/2)^N$. Cela conduirait [10] à remplacer (19) par la formule

$$K_m(\mathbb{F}_1) = \pi_m^s(B(\mathbb{Z}/2))\,,$$

qui n'en diffère que par un groupe fini de 2-torsion.

7.2

L'inclusion standard de Σ_N dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$ induit un morphisme

$$\alpha_m : \pi_m^s \to K_m(\mathbb{Z})\,, \quad m \geq 1\,,$$

que l'on peut voir comme celui induit en K-théorie algébrique par le morphisme d'anneaux $\mathbb{F}_1 \to \mathbb{Z}$. Ce morphisme α_m est bien compris.

Adams a introduit un morphisme

$$J : \pi_m\, O \to \pi_m^s\,,$$

dont il montre que l'image est un groupe cyclique. Le groupe $\mathrm{Im}\,(J)$ est d'ordre 2 si m est congru à 0 ou 1 modulo 8. Il est cyclique d'ordre le dénominateur w_i de $b_i/2i$ si $m = 2i-1$ avec i pair, où b_i le i-ème nombre de Bernoulli. Et il est nul sinon.

Quillen a montré que α_m est injectif sur l'image de J [17] et S.A. Mitchell [15] a montré que l'image de α_m coïncide avec celle de $\alpha_m \circ J$.

7.3

Par ailleurs, les théorie de M. Lévine, M. Hanamura et V. Vœvodsky permettent de voir les groupes de K-théorie algébrique comme des groupes d'extensions dans une catégorie (dérivée) de motifs mixtes. Si par exemple $m = 2i-1 > 1$, on a

$$K_{2i-1}(\mathbb{Z}) = K_{2i-1}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Ext}_{\mathrm{DM}(\mathbb{Q})}(\mathbb{Z}(i), \mathbb{Z})\,. \tag{20}$$

On peut s'attendre à une formule du même type pour le corps à un élément :

$$K_{2i-1}(\mathbb{F}_1) = \mathrm{Ext}_{\mathrm{DM}(\mathbb{F}_1)}(\mathbb{Z}(i), \mathbb{Z})\,.$$

Les résultats de 7.2 signifieraient alors que la classe d'une extension de motifs de Tate sur $\mathbb{Q}$ qui provient, par extension des scalaires de $\mathbb{F}_1$ à $\mathbb{Z}$ (puis $\mathbb{Q}$), d'une extension de motifs de Tate sur $\mathbb{F}_1$ est de torsion, et annulée par w_i s'il s'agit d'une extension de $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}(i)$ (ou de $\mathbb{Z}(j)$ par $\mathbb{Z}(i+j)$, $j \in \mathbb{Z}$).

7.4

Un résultat de B. Totaro [23] est cohérent avec les réflexions précédentes. Si $\mathbb{P}(\Delta)$ est la variété torique associée à un éventail Δ de dimension d, le Théorème

5 de [23] montre que la filtration des poids de la cohomologie singulière à coefficients rationnels de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ est canoniquement scindée. La preuve consiste à considérer la filtration canonique

$$\mathbb{P}(\Delta) = Y_0 \supset Y_1 \supset \ldots \supset Y_d \supset \emptyset\,,$$

où Y_k est la réunion des orbites toriques de dimension au plus $d-k$. Chaque strate $Y_k - Y_{k-1}$ est la réunion disjointe de produits du groupe multiplicatif par la droite affine, et la multiplication par n dans $N \simeq \mathbb{Z}^d$ (cf. 5.1) induit le produit par n^j sur la partie de poids j de la cohomologie de ces strates.

Autrement dit, la filtration de $\mathbb{P}(\Delta)$ par Y_k fournit des extensions de motifs de Tate, et donc des classes dans les groupes $\mathrm{Ext}_{\mathrm{DM}(\mathbb{Q})}(\mathbb{Z}(i+j), \mathbb{Z}(j))$, qui sont annulées par le p.g.c.d. des entiers $n^{i+j} - n^j$, $n > 1$. Si j est assez grand, on sait bien que ce p.g.c.d. n'est autre que w_i. Or le Théorème 1 indique que ces extensions sont sans doute dans l'image du morphisme

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{DM}(\mathbb{F}_1)}(\mathbb{Z}(i+j), \mathbb{Z}(j)) \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{DM}(\mathbb{Q})}(\mathbb{Z}(i+j), \mathbb{Z}(j))\,,$$

ce qui va dans le sens de la discussion de 7.3.

On peut aussi se demander si le résultat de Totaro est optimal et si le groupe $\mathrm{Im}(\alpha_{2i-1})$, $i \geq 1$, est engendré par des extensions de motifs sur $\mathbb{Q}$ provenant des variétés toriques par le procédé précédent. Ceci conduit au problème suivant, que l'on pourrait aborder en étudiant la structure de Hodge mixte à coefficients entiers de $\mathbb{P}(\Delta)$ et de sa filtration canonique par les Y_k :

Question 5. *Pour tout entier $i \geq 1$, existe-t-il $j \geq 0$, une variété torique $\mathbb{P}(\Delta)$ et une extension de $\mathbb{Z}(j)$ par $\mathbb{Z}(i+j)$, déduite de la filtration canonique de $\mathbb{P}(\Delta)$, dont la classe dans $\mathrm{Ext}_{\mathrm{DM}(\mathbb{Q})}(\mathbb{Z}(j), \mathbb{Z}(i+j))$ soit d'ordre w_i ?*

References

[1] E.ARBARELLO, C. DE CONCINI ET V.C. KAC, The infinite wedge representation and the reciprocity law for algebraic curves, Theta functions, Proc. 35th Summer Res. Inst. Bowdoin Coll., Brunswick/ME 1987, *Proc. Symp. Pure Math.* **49**, Pt. 1, (1989) 171-190.

[2] V. BATYREV ET YU. TSCHINKEL, Height zeta functions of toric varieties, *J. Math. Sci.*, New York **82**, No.1, (1996) 3220-3239.

[3] P.BELKALE ET P.BROSNAN, Matroids, motives and a conjecture of Kontsevich, *Duke Math. J.*, **116**, No.1, (2003) 147-188.

[4] M. BROUÉ, G. MALLE ET J. MICHEL, Théorèmes de Sylow génériques pour les groupes réductifs sur les corps finis, *Math. Ann.* **292**, No.2, (1992) 241-262.

[5] M. BROUÉ, G. MALLE ET J. MICHEL, Représentations unipotentes génériques et blocs des groupes réductifs finis avec un appendice de George Lusztig, *Astérisque* **212**; Montrouge: *Société Mathématique de France* 203 p. (1993).

[6] M. BROUÉ, G. MALLE ET J. MICHEL, Towards Spetses I, *Transform. Groups* **4**, No.2-3, (1999) 157-218.

[7] A. CONNES, Symétries Galoisiennes et Renormalisation, Pré-publication IHES/M/02/79 (2002).

[8] M. DEMAZURE ET P. GABRIEL, Introduction to algebraic geometry and algebraic groups, *North-Holland Mathematics Studies* **39** Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company. XIV, 358 p. (1980).

[9] W. FULTON, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press (1993).

[10] M. KAPRANOV, Some conjectures on the absolute direct image, lettre, 26/05/1995.

[11] M. KAPRANOV ET A. SMIRNOV, Cohomology determinants and reciprocity laws: number field case, prépublication.

[12] J.-L. LODAY, K-théorie algébrique et représentations de groupes, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, IV. Sér. 9 (1976) 309-377.

[13] V. MAILLOT, Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables, *Mém. Soc. Math. Fr.* Nouv. Sér. 80, 129 p. (2000).

[14] Y. MANIN, Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa), Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992); *Astérisque* **228** (1995), 4, 121–163.

[15] S.A. MITCHELL, The Morava K-theory of algebraic K-theory spectra,*J. K-Theory* **3**, No.6, (1990) 607-626.

[16] S.B. PRIDDY, On $\Omega^\infty S^\infty$ and the infinite symmetric group, *Algebraic Topology, Proc. Sympos. Pure Math.* **22**, (1971) 217-220.

[17] D. QUILLEN, Letter from Quillen to Milnor on Im $(\pi_i 0 \to \pi_i^s \to K_i\mathbb{Z})$, Algebraic K-Theory, Proc. Conf. Evanston 1976, *Lect. Notes Math.* **551**, (1976) 182-188.

[18] W. RUDIN, Real and complex analysis, 3rd ed. New York, NY McGraw-Hill, xiv, 416 p. (1987).

[19] A. SMIRNOV, Hurwitz inequalities for number fields, *St. Petersbg. Math. J.* **4**, No.2, (1993) 357-375; translation from *Algebra Anal.* **4**, No.2, (1992) 186-209.

[20] C. SOULÉ, On the field with one element (exposé à l'Arbeitstagung, Bonn, June 1999), Preprint IHES/M/99/55 (1999).

[21] R. STEINBERG, A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field, *Trans. Am. Math. Soc.* **71**, 274-282 ,(1951)

[22] J. TITS, Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes. Colloque d'algèbre supérieure, Bruxelles, 1956, pp. 261-289. Centre Belge de Recherches Mathématiques, Gauthier-Villars (1957).

[23] B. TOTARO, Chow groups, Chow cohomology, and linear varieties, preprint (1998).

[24] A. WEIL, Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques, [1939a] in *Oeuvres Scient.* **I**, 236-240, (1980), Springer-Verlag.