Au-dessous de $Spec\,\mathbb{Z}$

Bertrand Toën et Michel Vaquié
Laboratoire Emile Picard
UMR CNRS 5580
Université Paul Sabatier, Toulouse
France

Octobre 2007

Résumé

Dans ce travail nous utilisons les théories de géométrie algébrique relative et de géométrie algébrique homotopique (voir [HAGII]) afin de construire plusieurs catégories de schémas définis *au-dessous de* $Spec\,\mathbb{Z}$. Nous définissons ainsi les catégories de $\mathbb{N}$-schémas, $\mathbb{F}_1$-schémas, $\mathbb{S}$-schémas, $\mathbb{S}_+$-schémas, et $\mathbb{S}_1$-schémas, où (d'un point de vue très intuitif) $\mathbb{N}$ est le semi-anneau des entiers naturels, $\mathbb{F}_1$ est le corps à un élément, $\mathbb{S}$ est l'anneau en spectres des entiers, $\mathbb{S}_+$ est le semi-anneau en spectres des entiers naturels et $\mathbb{S}_1$ est l'anneau en spectres à un élément. Ces catégories de schémas sont reliées entre elles à l'aide de foncteurs de changement de bases, et possèdent toutes un foncteur de changement de bases vers les $\mathbb{Z}$-schémas. Nous montrons comment les groupes linéaires Gl_n et les variétés toriques peuvent-être définis comme certains objets de ces catégories.

Table des matières

1 Introduction

Le but de ce travail est de construire plusieurs catégories de *schémas* qui sont définis sur des bases se trouvant *au-dessous de* $Spec\,\mathbb{Z}$. Bien entendu, comme $\mathbb{Z}$ est l'anneau commutatif initial, il est indispensable de sortir du cadre usuel des anneaux et de s'autoriser à utiliser des objets plus généraux mais qui ressemblent suffisamment à des anneaux commutatifs afin que la notion de schéma puisse être définie. Notre approche à cette question est basée sur la théorie de la géométrie algébrique relative, largement insipirée de [Ha]. Elle consiste à remarquer qu'un anneau commutatif n'est rien d'autre qu'un monoïde commutatif dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{Z}$-modules, et qu'en général pour une catégorie monoïdale symétrique $(C, \otimes, \mathbf{1})$ les monoïdes commutatifs dans C peuvent être pensés comme des modèles pour les *schémas affines relatifs à* C. Il est remarquable qu'une approche si générale (voire simpliste) permette effectivement de définir une notion de schéma, et de plus de façon fonctorielle en C. Ainsi, en choisissant C munie d'un foncteur monoïdal symétrique $C \longrightarrow \mathbb{Z}-Mod$ raisonnable, on trouve une notion de schéma relatif à C et un foncteur de changement de bases vers les $\mathbb{Z}$-schémas, et donc une notion de schéma au-dessous de $Spec\,\mathbb{Z}$. Dans cet article nous montrerons comment cette approche, ainsi que sa généralisation homotopique où C est de plus munie d'une structure de catégorie de modèles de Quillen, permettent de définir cinq catégories de schémas se trouvant en dessous de $Spec\,\mathbb{Z}$.

Géométrie algébrique relative

Les idées générales de la géométrie algébrique relative remontent à [Ha], où des schémas relatifs au-dessus d'un topos annelé sont définis. Dans [D] le cas des schémas au-dessus d'une catégorie Tannakienne est aussi considéré. La théorie de géométrie algébrique relative que nous allons présenter est largement inspirée de ses deux références, bien que considérer des catégories de bases qui ne sont pas abéliennes, ni même additives, semble une nouveauté.

Donnons-nous une catégorie monoïdale symétrique $(C, \otimes, \mathbf{1})$ que l'on supposera complète, cocomplète et fermée (i.e. possède des Hom internes relatifs à la structure monoïdale $\otimes$). Il est bien connu que l'on dispose dans C d'une notion de monoïde, pour un tel monoïde A d'une notion de module et pour un morphisme de monoïdes $A \longrightarrow B$ d'un foncteur $- \otimes_A B$ de changement de bases des A-modules vers les B-modules (voir par exemple [Sa]). En particulier il existe une notion de monoïde commutatif (associatif et unitaire) dans C, et ils forment une catégorie que l'on note $Comm(C)$. On définit formellement la catégorie des schémas affines relatifs à C par $Aff_C := Comm(C)^{op}$. Tout ceci est pour le moment très formel, mais il se produit alors plusieurs miracles.

- Il existe une topologie de Grothendieck naturelle sur Aff_C appelée la *topologie plate*. Les familles couvrantes $\{X_i \longrightarrow X\}$ pour cette topologie correspondent aux familles finies de morphismes $\{A \longrightarrow A_i\}$ dans $Comm(C)$ telles que le foncteur de changement de bases sur les catégories de modules

$$\prod_i - \otimes_A A_i : A - Mod \longrightarrow \prod_i A_i - Mod$$

  soit exact et conservatif.

- La topologie plate sur Aff_C ainsi définie est sous-canonique (i.e. les préfaisceaux représentables sont des faisceaux).

- Il existe une notion d'ouvert de Zariski dans Aff_C, qui par définition sont les morphismes $f : X \longrightarrow Y$ dont le morphisme $A \longrightarrow B$ correspondant dans $Comm(C)$ satisfait aux trois conditions suivantes.

  1. (*f est un monomorphisme*) Pour tout $A' \in Comm(C)$ le morphisme induit $Hom(B, A') \longrightarrow Hom(A, A')$ est injectif.
  2. (*f est plat*) Le foncteur de changement de bases

  $$- \otimes_A B : A - Mod \longrightarrow B - Mod$$

     est exact.
  3. (*f est de présentation finie*) Pour tout diagramme filtrant d'objets $C_i \in A/Comm(C)$, le morphisme naturel

  $$ColimHom_{A/Comm(C)}(B, C_i) \longrightarrow Hom_{A/Comm(C)}(B, ColimC_i)$$

     est bijectif.

- La notion d'ouvert de Zariski s'étend de façon naturelle aux morphismes entre faisceaux quelconques (voir définition 2.12).

- Les ouverts de Zariski sont stables par compositions, isomorphismes et changements de bases.

- Les ouverts de Zariski donnent lieu à une notion de topologie de Zariski, et celle-ci est encore sous-canonique.

Les propriétés ci-dessus sont tout ce dont on a besoin pour définir une catégorie de schémas relatifs à $(C, \otimes, \mathbf{1})$. En effet, un schéma relatif est par définition un faisceau sur le site Aff_C muni de la topologie de Zariski, et qui possède un recouvrement Zariski par des schémas affines (voir définition 2.15). La catégorie des schémas ainsi obtenue est notée $Sch(C)$. C'est une sous-catégorie pleine, stable par produits fibrés et sommes disjointes, de la catégorie des faisceaux sur

Aff_C. De plus, elle contient une sous-catégorie pleine de schémas affines, qui sont exactement les faisceaux représentables, et qui est naturellement équivalente à la catégorie $Comm(C)^{op}$, opposée de la catégorie des monoïdes commutatifs dans C (voir §2.2). Enfin, la nature purement catégorique de la construction rend la catégorie $Sch(C)$ fonctorielle en C, tout au moins pour des adjoints à gauches symétriques monoïdaux $(C, \otimes, \mathbf{1}) \longrightarrow (D, \otimes, \mathbf{1})$ satisfaisant à quelques conditions faciles à vérifier dans la pratique (voir §2.3).

Trois exemples de géométries algébriques relatives

Nous considèrerons trois exemples de géométries algébriques relatives, correspondant à trois choix pour $(C, \otimes, \mathbf{1})$. Tout d'abord on posera $(C, \otimes, \mathbf{1}) = (\mathbb{Z}-Mod, \otimes, \mathbb{Z})$, la catégorie monoïdale symétrique des groupes abéliens (pour le produit tensoriel). La catégorie des schémas ainsi obtenue $\mathbb{Z} - Sch$ se trouve être équivalente à la catégorie des schémas au sens usuel. Ce fait justifie notre terminologie de *schémas relatifs*.

Notre deuxième exemple sera $(C, \otimes, \mathbf{1}) = (\mathbb{N} - Mod, \otimes, \mathbb{N})$ la catégorie des monoïdes commutatifs, ou encore des semi-groupes abéliens (pour la notion naturelle de produit tensoriel), que l'on pourrait aussi appeler des $\mathbb{N}$-*modules*. La catégorie des schémas sera dans ce cas notée $\mathbb{N} - Sch$, et la sous-catégorie des schémas affines est équivalente à la catégorie opposée de celle des semi-anneaux commutatifs. Elle est munie d'une adjonction

$$i : \mathbb{Z} - Sch \longrightarrow \mathbb{N} - Sch \qquad \mathbb{Z} - Sch \longleftarrow \mathbb{N} - Sch : - \otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{Z},$$

et l'adjoint à gauche i est pleinement fidèle. Le foncteur $- \otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ quant à lui est une globalisation du foncteur de complétion en groupes des semi-anneaux commutatifs vers les anneaux commutatifs.

Enfin, notre troisième exemple est $(C, \otimes, \mathbf{1}) = (Ens, \times, *)$, la catégorie monoïdale symétrique des ensembles (pour le produit direct). La catégorie des schémas relatifs sera notée $\mathbb{F}_1 - Sch$, et l'on y pense comme des modèles pour des *variétés définies sur le corps à un élément*, au sens où cette notion apparait dans [So]. Par définition la sous-catégorie des $\mathbb{F}_1$-schémas affines est équivalente à l'opposée de la catégorie des monoïdes commutatifs. On dispose d'un foncteur de changement de bases

$$- \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{N} : \mathbb{F}_1 - Sch \longrightarrow \mathbb{N} - Sch,$$

qui est une globalisation du foncteur qui envoit un monoïde commutatif M sur son semi-anneau en monoïdes $\mathbb{N}[M]$, analogue *semi* des anneaux en groupes. En composant avec le changement de base précédent, on obtient deux foncteurs

$$\mathbb{F}_1 - Sch \xrightarrow{-\otimes_{\mathbb{F}_1}\mathbb{N}} \mathbb{N} - Sch \xrightarrow{-\otimes_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}} \mathbb{Z} - Sch,$$

que l'on peut représenter schématiquement par le diagramme

$$Spec\,\mathbb{Z} \longrightarrow Spec\,\mathbb{N} \longrightarrow Spec\,\mathbb{F}_1.$$

Comme exemple de schémas relatifs, nous montrerons que les variétés toriques sont naturellement définies sur $\mathbb{F}_1$ (voir §4.2). Ceci est très naturel car elles sont obtenues par recollements formels de monoïdes commutatifs. Nous montrons aussi qu'il existe des schémas $Gl_{n,\mathbb{N}} \in \mathbb{N}-Sch$

et $Gl_{n,\mathbb{F}_1} \in \mathbb{F}_1 - Sch$ qui sont des versions du schéma en groupes linéaires. Cependant, bien que $Gl_{n,\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \simeq Gl_{n,\mathbb{Z}}$, il n'est pas vrai que $Gl_{n,\mathbb{F}_1} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$ soit isomorphe à $Gl_{n,\mathbb{Z}}$ (contrairement à ce que l'on pourrait attendre). Les schémas $Gl_{n,\mathbb{F}_1}$ et $Gl_{n,\mathbb{N}}$ ont ceci de remarquable que

$$Gl_{n,\mathbb{F}_1}(\mathbb{F}_1) \simeq Gl_{n,\mathbb{N}}(\mathbb{N}) \simeq \Sigma_n,$$

ce qui montre que $Gl_{n,\mathbb{N}}(\mathbb{N})$ est une extension non-triviale de $Gl_{n,\mathbb{Z}}$ au-dessus de $Spec\,\mathbb{N}$ (i.e. $i(Gl_{n,\mathbb{Z}}) \not\simeq Gl_{n,\mathbb{N}}$). Cet exemple montre que la propriété *d'être défini sur* n'est pas très pertinente (car tout $\mathbb{Z}$-schéma est défini sur $\mathbb{N}$), et le fait intéressant est en réalité que certains $\mathbb{Z}$-schémas possèdent des modèles naturels définis sur $\mathbb{N}$ ou sur $\mathbb{F}_1$. La situation est donc tout à fait comparable avec ce qu'il se passe en géométrie algébrique dérivée dont la pertinence réside dans le fait que les espaces de modules possèdent des extensions naturelles et non-triviales en des espaces de modules dérivés (voir [HAGDAG]).

Géométrie algébrique relative homotopique

Dans une dernière section nous introduirons trois nouvelles catégories de schémas définies à l'aide du formalisme de la géométrie algébrique homotopique de [HAGII]. L'idée générale est que l'on peut généraliser la géométrie algébrique relative en supposant de plus que la catégorie C est munie d'une structure de modèles compatible avec sa structure monoïdale (le cas particulier de la géométrie algébrique relative non-homotopique se retrouve en prenant la structure de modèles triviale pour laquelle les équivalences sont les isomorphismes). Il se trouve que les notions de topologie plate et d'ouverts de Zariski gardent un sens, bien que dans le cas général nous ne savons pas montrer que la topologie plate est sous-canonique (nous le montrerons cependant pour les exemples qui nous intéressent). On dispose donc d'une notion de schémas relatifs à C, dont la catégorie sera notée $Sch(C)$ (voir §5 pour plus de détails).

Ceci nous permettra de trouver trois nouvelles notions de schémas au-dessous de $Spec\,\mathbb{Z}$ en trouvant trois exemples de catégories de modèles monoïdales symétriques C munies de foncteurs de Quillen à gauche monoïdaux $C \longrightarrow \mathbb{Z} - Mod$. Le premier de ces exemples est lorsque l'on pose $(C, \otimes, \mathbf{1}) = (\mathcal{GS}, \wedge, \mathbb{S})$, la catégorie de modèles monoïdale des Γ-espaces très spéciaux. Cette catégorie de modèles est un modèle pour la théorie homotopique des spectres connectifs (i.e. sans homotopie négative), que l'on peut voir comme des analogues homotopiques des groupes abéliens. On dispose ainsi d'une catégorie de schémas relatifs à $\mathcal{GS}$, que l'on notera $\mathbb{S} - Sch$, où la notation $\mathbb{S}$ rappelle le spectre en sphère. Les $\mathbb{S}$-schémas affines sont en correspondance avec les E_∞-anneaux en spectres connectifs (i.e. sans homotopie négative), qui souvent portent le nom de *(commutative) brave new rings* dans la littérature. Les objets de $\mathbb{S} - Sch$ peuvent donc s'appeler *brave new schemes*, ou encore d'après une suggestion amusante de J. Tapia des *nouveaux schémas courageux*.

Notre second exemple est $(C, \otimes, \mathbf{1}) = (SEns, \times, *)$, la catégorie de modèles des ensembles simpliciaux munie de son produit direct. Les schémas que l'on obtient sont des versions homotopiques des $\mathbb{F}_1$-schémas, et seront appelés des $\mathbb{S}_1$-schémas, la notation $\mathbb{S}_1$ signifiant intuitivement *l'anneau en spectres à un élément*, bien que $\mathbb{S}_1$ ne soit ni un anneau ni un spectre (mais ceci est compatible avec la terminologie de *corps à un élément* qui ne désigne pas un corps).

Enfin, notre dernier exemple est $(C, \otimes, \mathbf{1}) = (\mathcal{MS}, \wedge, \mathbb{S}_+)$, la catégorie de modèles des Γ-espaces spéciaux. La catégorie de modèles $\mathcal{MS}$ est un modèle pour la théorie homotopique des E_∞-monoïdes simpliciaux. La catégorie des schémas relatifs sera notée $\mathbb{S}_+ - Sch$, et ses objets affines sont en correspondance avec les *semi-anneaux en spectres commutatifs* (bien que ceux-ci ne soient pas des spectres), ou encore des *brave new commutative semi-rings*, analogues homotopiques des semi-anneaux commutatifs. La notation $\mathbb{S}_+$ signifie intuitivement *le semi-anneau en spectres des entiers positifs*, et est une version homotopique du semi-anneau $\mathbb{N}$.

Pour terminer, on dispose de foncteurs de changement de bases naturels entre toutes ces notions, et d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}_1 - Sch \arrow[r, "-\otimes_{\mathbb{S}_1}\mathbb{S}_+"] \arrow[d, "-\otimes_{\mathbb{S}_1}\mathbb{F}_1"'] & \mathbb{S}_+ - Sch \arrow[r, "-\otimes_{\mathbb{S}_+}\mathbb{S}"] \arrow[d, "-\otimes_{\mathbb{S}_+}\mathbb{N}"] & \mathbb{S} - Sch \arrow[d, "-\otimes_{\mathbb{S}}\mathbb{Z}"] \\
\mathbb{F}_1 - Sch \arrow[r, "-\otimes_{\mathbb{F}_1}\mathbb{N}"'] & \mathbb{N} - Sch \arrow[r, "-\otimes_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}"'] & \mathbb{Z} - Sch.
\end{tikzcd}$$

Schématiquement on représente ce diagramme par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
Spec\,\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & Spec\,\mathbb{N} \arrow[r] \arrow[d] & Spec\,\mathbb{F}_1 \arrow[d] \\
Spec\,\mathbb{S} \arrow[r] & Spec\,\mathbb{S}_+ \arrow[r] & Spec\,\mathbb{S}_1.
\end{tikzcd}$$

On montrera que Gl_n peut être défini sur $\mathbb{S}_+$, et que les variétés toriques le sont sur $\mathbb{S}_1$, et donc par changement de bases sur $\mathbb{S}_+$ et $\mathbb{S}$.

Ce que nous n'avons pas fait

Notre but principal dans ce travail était d'amorcer une étude systématique de la notion de schémas définis au-dessous de $Spec\,\mathbb{Z}$, et de montrer que les techniques de géométrie algébrique relative et de géométrie algébrique homotopique semblent bien adaptées pour aborder cette question. Cependant, nous convenons que ce texte ne contient que quelques prémisses de géométrie algébrique au-dessous de $Spec\,\mathbb{Z}$, et nécessiterait de nombreux compléments afin d'aboutir à une théorie riche et intéressante. Dans cet ordre d'idées, signalons quelques questions que nous pensons importantes et qui ne sont pas traitées dans ce travail.

Pour commencer, nous ne nous sommes pas attaqués à la recherche d'une description plus explicite de la topologie de Zariski d'un schéma relatif (tel que présentée à la fin du paragraphe §2.2). Il devrait toute fois être possible de décrire l'espace topologique $|Spec\,A|$, sous-jacent à un schéma relatif affine, en des termes plus standards utilisant par exemple une notion d'idéal dans A (i.e. des sous-objets du A-module A), tout au moins si la catégorie de base C satisfait à quelques hypothèses supplémentaires (mais raisonables). Dans le cadre de la géométrie algébrique homotopique cette question semble reliée de très près à la notion de topologie enrichie de [Ve]. Une telle description ne nous semble pas vraiment indispensable, mais elle permettrait de comparer plus facilement notre notion de schémas à celles déjà existantes, comme par exemple la notion de $\mathbb{F}_1$-schémas de [De].

De nombreux espaces de modules ne sont pas des schémas, mais des espaces algébriques voire des champs algébriques. Il nous semble donc capital de développer aussi une notion de *champs algébriques relatifs* afin de pouvoir constuire de nouveaux exemples d'objets géométriques définis au-dessous de $Spec\,\mathbb{Z}$. Ceci nécessite bien évidemment une notion de morphismes étales et de morphismes lisses. Dans le cas où la catégorie de modèles C est additive (ou même additive à homotopie près), de telles notions ont été introduites et étudiées dans [HAGII], et dans ce cas on arrive à définir une notion intéressante de champs géométriques relatifs (voir [HAGII] pour des exemples de tels objets). Les deux seuls modèles présentés dans ce travail dont les catégories de bases sont additives sont les $\mathbb{Z}$-schémas et les $\mathbb{S}$-schémas. Ainsi, on dispose d'une notion raisonable de $\mathbb{S}$-*champs géométriques*, et on peut montrer par exemple que les champs de modules de représentations de carquois possèdent des modèles naturels qui sont des $\mathbb{S}$-champs géométriques. Plus généralement, on peut démontrer un théorème de représentabilité analogue à celui démontré dans [To-Va] qui fournit des exemples de $\mathbb{S}$-champs géométriques associés à des *catégories spectrales* (catégories enrichies dans les spectres).

En dehors des deux modèles $Spec\,\mathbb{Z}$ et $Spec\,\mathbb{S}$, les notions de morphismes étales et de morphismes lisses développées dans [HAGII] ne sont plus disponibles. Il nous semble crucial de chercher à développer de telles notions dans le cas non-additif, ce qui permettrait d'avoir accès à la notion de champs géométriques relatifs, et par exemple de montrer que les champs de modules de représentations de carquois sont en fait définis sur $Spec\,\mathbb{S}_+$. D'autres part, la notion de lissité semble aussi très importante si l'on souhaite définir une notion de motifs pour les schémas relatifs, qui comme il est expliqué dans [So] est largement souhaitée pour les $\mathbb{F}_1$-schémas.

Nous n'avons pas étudié les notions de faisceaux quasi-cohérents et cohérents sur les schémas relatifs. La notion de faisceau quasi-cohérent est claire et facile à deviner. En contre partie, la notion de cohérence semble plus délicate car elle fait intervenir des conditions de finitudes qui ne parraissent pas évidentes à généraliser au cadre des schémas relatifs. Ces conditions de finitudes, et la notion de faisceaux cohérents qui en découle sont importantes par exemple pour pouvoir définir des groupes de K-théorie de schémas relatifs. Il serait par exemple intéressant de montrer que les calculs faits dans [Hu] donnent effectivement une description de la K-théorie de nos $\mathbb{S}$-variétés toriques $X_{\mathbb{S}}(\Delta)$ (voir §5.3), comme il est suggéré par l'auteur que cela est la cas si l'on sait définir ce qu'est un modèle sur $\mathbb{S}$ des variétés toriques.

Notre notion de $\mathbb{N}$-schémas n'est peut-être pas sans relations avec la géométrie tropicale (voir par exemple [R-S-T]), qui elle aussi utilise de façon essentielle des semi-anneaux commutatifs. Il serait intéressant de trouver des relations précises entre la géométrie des $\mathbb{N}$-schémas de type fini sur le semi-anneau tropical $\mathbb{R}_{trop}$ et les variétés tropicales que l'on rencontre dans la littérature.

Remerciements: Nous remercions G. Vezzosi pour plusieurs conversations sur des sujets connexes au cours de ces dernières années. Nous remercions aussi J. Kock pour de ses remarques nombreuses, précises et utiles. Un grand merci enfin à M. Anel pour son intéret constant aux dessous en général et plus particulièrement à ceux de $Spec\,\mathbb{Z}$.

Convention: Tous les monoïdes considérés seront unitaires et associatifs. Tous les modules sur des monoïdes seront alors unitaires. De même toutes les catégories monoïdales seront munies de contraintes d'unité et d'associativité.

Nous négligerons les probèmes ensemblistes liés aux choix d'univers. Le lecteur pourra consulter [HAGI, HAGII] où il trouvera une façon de les résoudre.

2 Géométrie algébrique relative

Le but de cette première partie est de présenter la notion de schéma relatif à une catégorie symétrique monoïdale de base C. Nous commencerons par un procédé général de construction de topologies de Grothendieck à partir de préchamps en catégories vérifiant certaines conditions. Cela nous permettra par la suite de définir la *topologie fidèlement plate et quasi-compacte*, ainsi que la *topologie de Zariksi* dans des contextes très généraux. Nous définirons alors la notion de schéma relatif en recollant des objets affines à l'aide de la topologie de Zariski.

2.1 Construction de topologies de Grothendieck

Nous nous donnons une catégorie T qui possède des limites finies et un pseudo foncteur

$$\begin{array}{rccc} M: & T^{op} & \longrightarrow & Cat \\ & X & \longmapsto & M(X) \end{array}$$

qui vérifie les conditions suivantes.

Hypothèse 2.1

1. *Pour tout X dans T la catégorie $M(X)$ possède des limites et des colimites arbitraires.*

2. *Pour tout $p : X' \to X$ dans T le foncteur $M(p) = p^* : M(X) \to M(X')$ possède un adjoint à droite $p_* : M(X') \to M(X)$ qui est conservatif (i.e. un morphisme $u : x \to y$ dans $M(X')$ est un isomorphisme si et seulement si le morphisme induit $p_*(u) : p_*(x) \to p_*(y)$ est un isomorphisme dans $M(X)$).*

3. *Pour tout diagramme cartésien dans T*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "q'"] & Y \arrow[d, "q"] \\ X' \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

la transformation naturelle de changement de base

$$p^*q_* \Rightarrow q'_*p'^*$$

est un isomorphisme.

Un mot sur la condition (3) ci-dessus. La transformation naturelle en question est construite de la façon suivante: on dispose d'isomorphismes naturels

$$(q')^*p^* \simeq (pq')^* = (qp')^* \simeq (p')^*q^*$$

provenant de la structure de pseudo-foncteur de M. Cela nous donne en composant à droite par q_* un isomorphisme naturel $(q')^*p^*q_* \simeq (p')^*q^*q_*$. En composant ce dernier avec la co-unité d'adjonction $q^*q_* \Rightarrow id$ on trouve une transformation naturelle

$$(q')^*p^*q_* \Rightarrow (p')^*,$$

qui par adjonction nous donne la transformation naturelle de changement de base

$$p^*q_* \Rightarrow q'_*(p')^*.$$

Remarque 2.2 L'exemple fondamental que nous avons en tête est le suivant: T est la catégorie des schémas affines, et pour X un tel schéma $M(X)$ est la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur X.

Nous pouvons alors définir les notions de platitude et de fidèle platitude sur la catégorie T associées au pseudo foncteur M.

Définition 2.3 *Soit $\{p_i : X_i \to X\}_{i\in I}$ une famille de morphismes dans T.*

1. *La famille $\{p_i : X_i \to X\}_{i\in I}$ est* M-couvrante *s'il existe un ensemble fini $J \subset I$ telle que la famille de foncteurs*

$$\{p_i^* : M(X) \to M(X_i)\}_{i\in J}$$

   soit conservative.

2. *La famille $\{p_i : X_i \to X\}_{i\in I}$ est* M-plate *si tous les foncteurs $p_i^* : M(X) \to M(X_i)$ sont exacts à gauche (i.e. commutent aux limites finies).*

3. *La famille $\{p_i : X_i \to X\}_{i\in I}$ est* M-fidèlement plate *si elle est à la fois M-couvrante et M-plate.*

Dans la suite, nous utiliserons aussi la terminologie de *morphisme M-plat*, qui, comme le lecteur peut le deviner, est un morphisme qui forme une famille (à un unique élément) M-plate au sens précédent. En d'autre termes, $p : X' \to X$ est M-plat si le foncteur p^* est exact. Remarquons par ailleurs que pour un morphisme M-plat $p : X' \to X$ le foncteur p^* est en réalité exact. En effet l'existence de l'adjoint à droite implique que p^* commute aux colimites arbitraires.

Comme la catégorie $M(X)$ a des limites finies, un foncteur p^* qui est à la fois exact à gauche et conservatif est fidèle, ce qui justifie la notion de *M-fidèlement plat*.

Proposition 2.4 *Les familles M-fidèlement plates définissent une prétopologie sur T.*

Preuve: Il est immédiat que tout isomorphisme est M-fidèlement plat. De plus, de part l'existence des isomorphismes naturels $(pq)^* \simeq q^*p^*$ on voit que si $\{X_i \to X\}_i$ est une famille M-couvrante, et si pour tout $i \in I$, $\{Y_{i,j} \to X_i\}_j$ est une famille M-couvrante, alors la famille totale $\{Y_{i,j} \to X\}_{i,j}$ est encore M-couvrante.

Il nous reste à démontrer la stabilité des familles M-couvrantes par changements de bases. Soit $\{p_i : X_i \to X\}_i$ une famille M-couvrante et $f : Y \to X$ un morphisme. Notons $\{q_i : Y_i :=$

$Y \times_X X_i \to Y\}$ la famille obtenue par changement de base. Pour montrer que cette famille est M-couvrante, nous considérons le foncteur

$$\prod_i q_i^* : M(Y) \longrightarrow \prod_i M(Y_i)$$

dont nous cherchons à prouver le caractère conservatif. D'après l'hypothèse (2) 2.1 faite sur M il suffit pour cela de montrer que le foncteur

$$\prod_i (f_i)_* q_i^* : M(Y) \longrightarrow \prod_i M(X_i)$$

est conservatif (où $f_i : Y_i \longrightarrow X_i$ est la seconde projection). D'après 2.1 (3) ce morphisme est isomorphe au morphisme

$$(\prod_i p_i^*) f_* : M(Y) \longrightarrow \prod_i M(X_i).$$

Comme f_* est conservatif (d'après 2.1 (2)) et que $\prod_i p_i^*$ est conservatif par hypothèse, il en est de même du foncteur composé $(\prod_i p_i^*) f_*$. Ce la termine la preuve de la proposition. $\square$

La topologie définie par la prétopologie précédente est appelée la topologie *M-fidèlement plate* sur T.

Le résultat principal de cette section est que M est toujours un champ pour la topologie M-fidèlement plate. Avant d'énoncer ce résultat rappelons qu'ici M est un pseudo foncteur en catégories et non en groupoïdes et que la notion de champ est la suivante. On peut considérer M^{iso}, le sous pseudo foncteur (non plein) de M qui possède les même objets et formé de tous les isomorphismes. Ce sous pseudo foncteur est un pseudo foncteur en groupoïdes. De plus, pour deux objets x et y dans $M(X)$, on dispose d'un préfaisceau de morphisme $\underline{Hom}(x, y)$: il s'agit du préfaisceau sur T/X qui à $u : Y \to X$ associe l'ensemble $Hom(u^*(x), u^*(y))$. Par définition, M est un champ si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1. Le pseudo foncteur en groupoïdes M^{iso} est un champ au sens de [La-Mo].
2. Pour tout $X \in T$ et tout x, y des objets de $M(X)$, le préfaisceau $\underline{Hom}(x, y)$ est un faisceau sur T/X.

On peut aussi combiner ces deux conditions en une: pour un recouvrement $\{U_i \to X\}_i$ dans T on dispose d'une catégorie de données de descente $Desc(U/X, M)$. Rappelons que les objets de cette catégorie sont les données de descentes $\{x_i, \phi_{i,j}\}_{i,j}$, où les x_i sont des objets $x_i \in M(U_i)$ et les $\phi_{i,j} : (x_i)_{|U_{i,j}} \simeq (x_j)_{|U_{i,j}}$ sont des isomorphismes dans $M(U_{i,j})$ satisfaisant à la condition de cocycle usuelle $\phi_{j,k} \circ \phi_{i,j} = \phi_{i,k}$ dans $M(U_{i,j,k})$. Un morphisme $\{x_i, \phi_{i,j}\}_{i,j} \to \{y_i, \psi_{i,j}\}_{i,j}$ entre de telles données de descente est une famille de morphismes $f_i : x_i \to y_i$ dans $M(U_i)$, compatible aux $\phi_{i,j}$ et aux $\psi_{i,j}$ au sens où $\psi_{i,j} f_i = f_j \phi_{i,j}$ dans $M(U_{i,j})$. Avec ces notations, les deux conditions précédentes pour que M soit un champ expriment alors que le foncteur naturel

$$M(X) \longrightarrow Desc(U/X, M)$$

est une équivalence pour tout recouvrement $\{U_i \to X\}_i$.

Théorème 2.5 *Le pseudo foncteur M est un champ pour la topologie M-fidèlement plate.*

Preuve: Pour commencer, le pseudo foncteur M peut-être strictifié, par le procédé standard qui consiste à lui associer le préfaisceau en catégories qui envoie $X \in T$ sur la catégorie des pseudo transformations naturelles de $Hom(-,X)$ vers M (voir par exemple [Hol, §3.3]). Les conditions 2.1 sont bien entendues préservées par ce procédé de strictification. Nous allons donc supposer que M est un préfaisceau en catégories.

On considère alors $Gpd(T)$ la catégorie des préfaisceaux en groupoïdes sur T, ainsi que $SPr(T)$ la catégorie des préfaisceaux simpliciaux sur T. Rappelons qu'il existe une paire de foncteurs adjoints

$$\Pi_1 : SEns \longrightarrow Gpd \qquad Gpd \longleftarrow SEns : N,$$

où N est le foncteur nerf et Π_1 est son adjoint à gauche qui envoie un ensemble simplicial sur son groupoïde fondamental. Cette adjonction identifie de plus Gpd à une sous-catégorie reflexive de $SEns$. Pour un ensemble simplicial K et une catégorie C, les foncteurs $\Pi_1(K) \to C$ sont en bijection naturelle avec les données suivantes:

1. une application $f : K_0 \to Ob(C)$ de l'ensemble des 0-simplexes de K vers l'ensemble des objets de C.

2. une application $m : K_1 \to Iso(C)$ de l'ensemble des 1-simplexes de K vers l'ensemble des isomorphismes de C telle que la source de $m(k)$ soit $d_0(k)$ et le but de $m(k)$ soit $d_1(k)$ et avec $m(s_0(x)) = id_{f(x)}$ pour $x \in K_0$.

3. on demande de plus que pour tout $l \in K_2$ on ait
$$m(d_1(l)) = m(d_0(l)d_2(l)).$$

En d'autres termes, $\Pi_1(K)$ est le groupoïde librement engendré par le graphe unitaire $K_1 \rightrightarrows K_0$ avec les relations induites par le morphisme de bord $K_2 \longrightarrow K_1 \times K_1 \times K_1$.

En passant aux préfaisceaux on trouve une paire de foncteurs adjoints

$$\Pi_1 : SPr(T) \longrightarrow Gpd(T) \qquad Gpd(T) \longleftarrow SPr(T) : N.$$

Le foncteur Π_1 commute aux produits finis et envoie l'ensemble simplicial Δ^1 sur le groupoïde ayant deux objets et un unique isomorphisme entre eux. Cela implique en particulier que le foncteur Π_1 envoie équivalences d'homotopie sur équivalences catégoriques. En passant aux préfaisceaux on voit de plus que Π_1 envoie équivalence d'homotopie de préfaisceaux simpliciaux sur une équivalence de préfaisceaux en groupoïdes possédant un quasi-inverse *global* (ce détail nous sera essentiel).

Soit maintenant $\{U_i \to X\}_i$ un recouvrement dans T. On considère le préfaisceau d'ensembles $U := \coprod_i U_i$ (cette somme est prise dans les préfaisceaux et non dans T), qui est muni d'une augmentation naturelle $U \to X$. On définit $N(U/X) \in SPr(T)$ qui est le nerf du morphisme $U \longrightarrow X$:

$$\begin{array}{cccc} N(U/X)_* : & \Delta^{op} & \longrightarrow & Pr(T) \\ & [n] & \longmapsto & \underbrace{U \times_X U \times_X \cdots \times_X U}_{n+1\ fois}, \end{array}$$

où les faces et dégénérescences sont données par les différentes projections et diagonales. On pose

$$\mathcal{U}/X := \Pi_1 N(U/X),$$

qui est encore muni d'une augmentation naturelle $p : \mathcal{U}/X \to X$ dans $Gpd(T)$. Le préfaisceau en groupoïdes $\mathcal{U}/X$ est construit de sorte à ce que la catégorie des morphismes de préfaisceaux (au sens strict) $\underline{Hom}(\mathcal{U}/X, M)$, s'identifie naturellement à la catégorie $Desc(U/X, M)$ des données de descentes de M pour le recouvrement $\{U_i \to X\}_i$ (nous laissons le soin au lecteur de vérifier cela en utilisant la description des morphismes $\Pi_1(K) \to C$ donnée plus haut). Pour démontrer le théorème 2.5 il s'agit donc de montrer que le foncteur naturel

$$p^* : M(X) \simeq \underline{Hom}(X, M) \longrightarrow \underline{Hom}(\mathcal{U}/X, M) \simeq Desc(U/X, M)$$

est une équivalence.

En utilisant l'hypothèse 2.1 (1) et (2) on voit facilement que le foncteur

$$p^* : M(X) \longrightarrow Desc(U/X, M)$$

possède un adjoint à droite p_*. Ce foncteur envoie une donnée de descente $\{x_i, \phi_{i,j}\}$ sur l'objet

$$p_*(\{x_i, \phi_{i,j}\}) = Lim\left(\prod_i (p_i)_*(x_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} (p_{i,j})_*((x_i)_{|U_{i,j}})\right).$$

Dans cette expression $p_{i,j} : U_{i,j} \to X$ désigne la projection naturelle, et les deux morphismes proviennent d'une part des morphismes naturels $(p_i)_*(x_i) \to (p_{i,j})_*((x_i)_{|U_{i,j}}) \simeq (p_i)_*((q_{i,j})_* q_{i,j}^*(x_i))$ (avec $q_{i,j} : U_{i,j} \longrightarrow U_i$ la première projection), et d'autre par le morphisme

$$(p_i)_*(x_i) \to (p_{i,j})_*((x_j)_{|U_{i,j}}) \simeq (p_j)_*((q_{i,j})_* q_{i,j}^*(x_i))$$

obtenu en composant $(p_i)_*(x_i) \to (p_{i,j})_*((x_i)_{|U_{i,j}})$ avec l'isomorphisme $\phi_{i,j}$.

Comme le foncteur p^* est conservatif (d'après la définition des familles M-couvrantes) il suffit de montrer la co-unité de l'adjonction $p^* p_* \Rightarrow id$ est un isomorphisme. Pour cela, on considère le carré cartésien dans $Gpd(T)$ suivant

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U}/X \arrow[d] \\
U \arrow[r] & X.
\end{tikzcd}$$

Comme $U = \coprod_i U_i$, on peut écrire $Y = \coprod_i Y_i$ avec des diagrammes cartésiens

$$\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U}/X \arrow[d] \\
U_i \arrow[r] & U \arrow[r] & X.
\end{tikzcd}$$

Par construction on voit que $Y_i \to U_i$ est lui-même isomorphe au morphisme $q_i : V_i/U_i \to U_i$, où V_i désigne le recouvrement $\{U_{i,j} \to U_i\}_i$ obtenu à partir de $\{U_i \to X\}_i$ par changement de bases le long de $U_i \to X$. Ces carrés cartésiens induit des diagrammes commutatifs de catégories

$$\begin{tikzcd} M(X) \arrow[r] \arrow[d, "p^*"'] & M(U_i) \arrow[d, "q_i^*"] \\ M(U/X) \arrow[r] & M(V_i/U_i), \end{tikzcd}$$

(où l'on note $M(F)$ pour $\underline{Hom}(F, M)$ pour tout préfaisceau en groupoïdes F). Par définition de la topologie M-fidèlement plate les deux familles de foncteurs

$$M(X) \longrightarrow M(U_i) \qquad M(U/X) \longrightarrow M(V_i/U_i)$$

sont conservatives. De plus, on dispose aussi de diagrammes commutatifs à isomorphisme prés

$$\begin{tikzcd} M(X) \arrow[r] & M(U_i) \\ M(U/X) \arrow[r] \arrow[u, "p_*"] & M(V_i/U_i) \arrow[u, "(q_i)_*"'] \end{tikzcd}$$

(on utilisera ici l'hypothèse 2.1 (3), la description explicite des adjoints p_* et $(q_i)_*$ en termes de limites finies, et la M-platitude des morphismes $U_i \to X$). Ainsi, pour montrer que la co-unité d'adjonction $p^*p_* \Rightarrow id$ est un isomorphisme il suffit de montrer que pour tout i la co-unité d'adjonction $q_i^*(q_i)_* \Rightarrow id$ est un isomorphisme. En d'autres termes, on peut supposer qu'il existe un indice i avec $X = U_i$ (et le morphisme $U_i \to X$ égal à l'identité).

Nous supposons donc qu'il existe i tel que $U_i = X$. Dans ce cas le morphisme $U \to X$ possède une section, et il est bien connu que cette section induit un inverse à homotopie près de la projection $N(U/X) \to X$. Plus précisément, on construit une contraction de $N(U/X)$ sur X

$$c : \Delta^1 \times N(U/X) \longrightarrow N(U/X)$$

de la façon suivante: pour $m \in \Delta^{op}$ le morphisme

$$c_m : \Delta^1(m) \times N(U/X)_m \longrightarrow N(U/X)_m$$

envoie symboliquement un morphisme $u : [m] \to [1]$ dans Δ et un point $(x_0, \ldots, x_m)$ dans $N(U/X)_m$ sur le point $(x_0, \ldots, x_{i-1}, sp(x_i), \ldots, sp(x_m))$, où i est tel que $u(j) = 0 \Leftrightarrow j < i$. En appliquant le foncteur Π_1 on voit que la projection $p : U/X \to X$ possède un quasi-inverse global. Cela implique en particulier que pour tout préfaisceau en catégories M' le foncteur induit sur les catégories de morphismes

$$\underline{Hom}(X, M') \longrightarrow \underline{Hom}(U/X, M')$$

possède un quasi-inverse et est donc une équivalence. En prenant $M' = M$ on trouve bien que le foncteur

$$M(X) \simeq \underline{Hom}(X, M') \longrightarrow \underline{Hom}(U/X, M) \simeq Desc(U/X, M)$$

est une équivalence de catégories. Ceci termine la preuve du théorème 2.5. $\square$

2.2 La topologie fidèlement plate

Dans cette section nous allons utiliser le théorème général 2.5 pour construire la topologie fièlement plate et quasi-compacte sur la catégorie opposée des monoïdes commutatifs dans une catégorie monoïdale symétrique quelconque. Cette topologie sera pour nous auxiliaire et nous la rafinerons en définissant la topologie de Zariski à la section suivante. C'est cette dernière qui sera utilisée pour la définition de schémas.

Tout au long de cette section $(C, \otimes, \mathbf{1})$ désignera une catégorie monoïdale symétrique avec $\mathbf{1}$ comme objet unité. Nous supposerons de plus que C satisfait aux conditions suivantes.

Hypothèse 2.6 *1. La catégorie C possède des limites et des colimites.*

2. La structure monoïdale $\otimes$ est fermée. En d'autres termes pour toute paire d'objets X et Y dans C, le foncteur

$$\begin{array}{ccc} C^{op} & \longrightarrow & Ens \\ Z & \mapsto & Hom(Z \otimes X, Y) \end{array}$$

est représentable par un objet $\underline{Hom}(X, Y) \in C$.

L'hypothèse (2) entraine que le produit tensoriel commute avec les colimites en chacune de ses variables. C'est ce que nous utiliserons implicitement tout au long de ce travail, et nous n'utiliserons pas les objets $\underline{Hom}(X, Y)$.

Nous noterons tout au long de ce chapitre $Comm(C)$ la catégorie des monoïdes associatifs, unitaires et commutatifs dans $(C, \otimes, \mathbf{1})$. Nous noterons aussi $Aff_C := Comm(C)^{op}$ la catégorie opposée de $Comm(C)$. Pour un objet $A \in Comm(C)$, nous noterons symboliquement $Spec\, A$ l'objet correspondant dans Aff_C.

Définition 2.7 *La* catégorie des schémas affines sur *C est Aff_C.*

Comme C possède tout type de limites et de colimites il en est de même de $Comm(C)$, et donc de Aff_C. De plus, le foncteur d'oubli $Comm(C) \longrightarrow C$ possède un adjoint à gauche

$$L : C \longrightarrow Comm(C)$$

qui envoit un objet M de C sur le monoïde commutatif libre $L(M)$ engendré par M.

Pour $A \in Comm(C)$, on dispose d'une notion de A-module dans C, qui forme une catégorie notée $A - Mod$. Cette catégorie possède aussi des limites et des colimites, et de plus le foncteur d'oubli $A - Mod \longrightarrow C$ y commute. Plus généralement, pour un morphisme $A \longrightarrow B$ dans $Comm(C)$, on dispose d'une adjonction

$$- \otimes_A B : A - Mod \longrightarrow B - Mod \qquad A - Mod \longleftarrow B - Mod,$$

dont l'adjoint $B - Mod \longrightarrow A - Mod$ est le foncteur d'oubli évident. Ce foncteur possède aussi un adjoint à droite, et donc commute avec les limites et les colimites. Les morphismes dans $A - Mod$ entre deux objets M et N seront notés $Hom_A(M, N)$.

Pour un diagramme de morphismes $A' \longleftarrow A \longrightarrow B$ dans $Comm(C)$, il existe un isomorphisme naturel dans $B-Mod$

$$A' \coprod_A B \longrightarrow A' \otimes_A B,$$

où $A' \coprod_A B$ est la somme calculée dans $Comm(C)$, et $A' \otimes_A B$ est le changement de base du A-module A' par le morphisme $A \longrightarrow B$. Lorsque $A = \mathbf{1}$ on trouve que la somme directe dans la catégorie $Comm(C)$ est donnée par le produit tensoriel de monoïdes commutatifs.

Enfin, pour $A \in Comm(C)$, la catégorie $A - Mod$ est munie d'une structure monoïdale symétrique $\otimes_A$, qui fait de $A - Mod$ une catégorie monoïdale fermée. Les monoïdes commutatifs dans $A - Mod$ forment une catégorie équivalente à la catégorie $A/Comm(C)$, des objets de $Comm(C)$ en dessous de A. Les objets de $A/Comm(C)$ seront appelés des A-algèbres commutatives.

Nous appliquons maintenant les résultats de la section précédente au cas où $T := Aff_C$, et M est le pseudo foncteur qui envoie $A \in Comm(C)$ sur la catégorie $A - Mod$, et un morphisme $Spec\, A \to Spec\, B$ sur le foncteur $- \otimes_A B : A - Mod \to B - Mod$. Les conditions de l'hypothèse 2.1 sont alors satisfaites. Noter que le point (3) provient précisément du fait que la somme amalgammée d'un diagramme $B \longleftarrow A \longrightarrow C$ dans $Comm(C)$ est $B \otimes_A C$.

Définition 2.8 *Avec les notations ci-dessus, la topologie M -fidèlement plate sur Aff_C sera appelée la* topologie fidèlement plate et quasi-compacte *(ou simplement* fpqc*).*

On déduite directement du thèorème 2.5 que $Spec\, A \to A - Mod$ est un champ pour la topologie fpqc.

2.3 La topologie de Zariski

Nous continuons avec une catégorie monoïdale symétrique $(C, \otimes, \mathbf{1})$ qui satisfait aux conditions de la section précédente. Dans ce paragraphe nous allons définir la topologie de Zariski sur la catégorie Aff_C. Nous profiterons de l'occasion pour redonner de manière plus explicite la topologie fpqc définie dans la section précédente. Pour cela nous commençons par les définitions suivantes.

Définition 2.9 *Soit $f : Y = Spec\, B \longrightarrow X = Spec\, A$ un morphisme dans Aff_C.*

1. *Le morphisme f est* plat *si le foncteur*

$$- \otimes_A B : A - Mod \longrightarrow B - Mod$$

est exact (i.e. commute aux limites finies).

2. *Le morphisme f est un* épimorphisme *si pour tout $A' \in Comm(C)$, le morphisme*

$$f^* : Hom(B, A') \longrightarrow Hom(A, A')$$

est injectif.

3. *Le morphisme f est* de présentation finie*, si pour tout diagramme filtrant d'objets $A'_i \in A/Comm(C)$, le morphisme naturel*

$$Colim_i Hom_{A/Comm(C)}(B, A'_i) \longrightarrow Hom_{A/Comm(C)}(B, Colim_i A'_i)$$

est un isomorphisme.

4. *Le morphisme f est* un ouvert de Zariski *(ou encore* une immersion Zariski ouverte*) si le morphisme correspondant $A \longrightarrow B$ dans $Comm(C)$ est un épimorphisme plat et de présentation finie.*

A l'aide des définitions précédentes nous définissons les recouvrements fpqc et Zariski de la façon suivante.

Définition 2.10 1. *Une famille de morphismes*

$$\{X_i = Spec\, A_i \longrightarrow X = Spec\, A\}_{i \in I}$$

dans Aff_C est un recouvrement fpqc *(ou plus simplement* recouvrement plat*) si les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

   (a) *Pour tout $i \in I$ le morphisme $X_i \longrightarrow X$ est plat.*

   (b) *Il existe un sous ensemble fini $J \subset I$, tel que le foncteur*

$$\prod_{j \in J} - \otimes_A A_j : A - Mod \longrightarrow \prod_{j \in J} A_j - Mod$$

   est conservatif (i.e. un morphisme $u : M \to N$ de A-modules est un isomorphisme si et seulement si pour tout $j \in J$ le morphisme induit $M \otimes_A A_j \to N \otimes_A A_j$ est un isomorphisme).

2. *Une famille de morphismes*

$$\{X_i \longrightarrow X\}_{i \in I}$$

dans Aff_C est un recouvrement de Zariski *si c'est un recouvrement plat et si tous les morphismes $X_i \longrightarrow X$ sont des ouverts de Zariski.*

Il est facile de voir que les recouvrements fpqc et Zariski définissent deux prétopologies sur la catégorie Aff_C. Les topologies de Grothendieck associées à ces deux prétopologies seront appelée respectivement la *topologie fpqc* (ou encore *topologie plate*) et la *la topologie de Zariski*. Nous nous intéresserons principalement à la topologie de Zariski, et la topologie fpqc sera utilisée que de manière auxiliaire (essentiellement pour le corollaire 2.11 ci-dessous).

On dispose donc d'une catégorie de préfaisceaux (d'ensembles) $Pr(Aff_C)$, ainsi que deux sous-catégories de faisceaux

$$Sh^{fpqc}(Aff_C) \subset Sh^{Zar}(Aff_C) \subset Pr(Aff_C).$$

Comme la catégorie qui nous intéressera principalement est $Sh^{Zar}(Aff_C)$ nous noterons simplement

$$Sh(Aff_C) := Sh^{Zar}(Aff_C).$$

De même, l'expression *faisceau*, sans plus de précision, fera toujours référence à la notion de faisceau pour la topologie de Zariski. Les objets de $Sh^{fpqc}(Aff_C)$ seront eux appelés *faisceaux fpqc*.

On dispose bien entendu du plongement de Yoneda

$$h_- : Aff_C \longrightarrow Pr(Aff_C),$$

et on identifiera toujours Aff_C avec la sous-catégorie pleine de $Pr(Aff_C)$ formée de l'image de h_-.

Corollaire 2.11 *1. Pour tout $X \in Aff_C$, le préfaisceau $h_X \in Pr(Aff_C)$ est un faisceau fpqc. Ce faisceau sera simplement noté $X \in Sh^{fpqc}(Aff_C) \subset Sh(Aff_C)$.*

2. Le pré-champ sur Aff_C, qui à un schéma affine $X = Spec\, A$ associe la catégorie $A-Mod$, et à un morphisme $Y = Spec\, B \longrightarrow X = Spec\, A$ associe le foncteur $- \otimes_A B$ est un champ pour la topologie fpqc.

Preuve: Le point (2) est une conséquence du théorème 2.5. Pour (1), il s'agit de montrer que pour tout recouvrement fpqc $\{U_i = Spec\, B_i \longrightarrow X = Spec\, B\}_{I \in I}$, avec I fini, et tout B-module $M \in B - Mod$, le diagramme

$$M \longrightarrow \prod_i M \otimes_B B_i \rightrightarrows \prod_{i,j} M \otimes_B B_i \otimes_B B_j$$

est exact dans C. Cela se déduit aussi du théorème 2.5 en utilisant l'équivalence

$$M(X) \leftrightarrows Desc(U/X, M)$$

ainsi que la forme explicite de l'adjoint à droite p_* donnée dans la section §2.1. □

La proposition précédente nous dit d'une part que la topologie fqpc est sous-canonique, et d'autre part qu'elle satisfait la condition descente pour les modules. Comme la topologie de Zariski est moins fine que la topologie plate nous en déduisons que cela reste vrai pour la topologie Zariski.

A l'aide de la proposition précédente nous identifierons la catégorie Aff_C avec son image dans $Sh^{fpqc}(Aff_C)$, et donc comme une sous-catégorie pleine de $Sh(Aff_C)$. Ainsi, un faisceau isomorphe à un objet de Aff_C sera simplement appelé un schéma affine (au dessus de C si l'on veut préciser).

2.4 Schémas

Dans ce paragraphe nous présentons la définition principale de ce travail, à savoir celle de schéma au dessus de C. Pour cela, nous commencerons par introduire la notion d'ouvert et de recouvrement de Zariski dans $Sh(Aff_C)$. Les schémas seront définis comme les faisceaux possédant un recouvrement ouvert Zariski par des schémas affines. Nous montrerons alors quelques propriétés de base des schémas (e.g. recollement, stabilité par produits fibrés et réunion disjointes).

Définition 2.12 *1. Soit X un schéma affine et $F \subset X$ un sous-faisceau de X. Nous dirons que F est un* ouvert de Zariski de X *s'il existe une famille d'ouverts de Zariski $\{X_i \longrightarrow X\}_{i\in I}$ dans Aff_C (au sens de la définition 2.9) tel que F soit l'image du morphisme de faisceaux*

$$\coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow X.$$

2. Un morphisme $f : F \longrightarrow G$ dans $Sh(Aff_C)$ est un ouvert de Zariski *(ou encore une* immersion Zariski ouverte*) si pour tout schéma affine X et tout morphisme $X \longrightarrow G$, le morphisme induit*

$$F \times_G X \longrightarrow X$$

est un monomorphisme d'image un ouvert de Zariski de X.

On remarquera que l'on ne suppose pas l'ensemble d'indices I fini dans la définition précédente. On vérifie aisémment que les ouverts de Zariski sont des monomorphismes dans $Sh(Aff_C)$.

Lemme 2.13 *Les ouverts Zariski sont stables par changements de bases et composition dans $Sh(Aff_C)$.*

Preuve: Ceci est immédiat. □

Le lemme suivant montre de plus que la notion d'ouvert Zariski précédente est compatible avec celle définie dans la définition 2.9.

Lemme 2.14 *Soit $f : Z \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas affines. Le morphisme f est un ouvert Zariski au sens de la définition 2.9 si et seulement s'il est un ouvert de Zariski au sens de la définition 2.12* (2)*.*

Preuve: Commençons par supposer que f soit un ouvert Zariski au sens de la définition 2.9. Pour tout schéma affine X et tout morphisme $X \longrightarrow Y$ on sait que le morphisme induit $X \times_Y Z \longrightarrow X$ est encore un ouvert Zariski au sens de la définition 2.9. Ceci montre que l'on peut prendre la famille réduite à un élément $\{X \times_Y Z \longrightarrow X\}$ dans la définition 2.12 (2), et donc que f est un ouvert de Zariski au sens de la définition 2.12 (2).

Inversement, si f est un ouvert de Zariski au sens de la définition 2.12 (2). On prend $X = Y$ et $X \longrightarrow Y$ l'identité. On voit alors que f est un monomorphisme et que son image est l'image d'un morphisme

$$\coprod Y_i \longrightarrow Y$$

pour un recouvrement Zariski $\{Y_i \longrightarrow Y\}$ (que l'on peut supposer fini car Z est affine et donc quasi-compact par définition de la topologie de Zariski). Ainsi, $Y_i \simeq Y_i \times_Y X$, et $\{Y_i \longrightarrow X\}$ est donc un recouvrement Zariski tel que chaque morphisme induit $Y_i \longrightarrow Y$ soit un ouvert Zariski. Tranduisant en termes de monoides commutatifs, si $f : Z = Spec\, B \longrightarrow Y = Spec\, A$, il existe une famille de morphismes $\{B \longrightarrow B_i\}$ qui forme un recouvrement Zariski et tel que chaque morphisme $A \longrightarrow B_i$ soit un ouvert Zariski. On voit facilement à l'aide des définitions que cela implique que $A \longrightarrow B$ est un morphisme plat au sens de la définition 2.9. Le morphisme f étant un monomorphisme on trouve que le morphisme $A \longrightarrow B$ est donc un épimorphisme plat. Il nous reste à voir qu'il est de présentation finie. Pour cela, soit $B'_\alpha \in A/Comm(C)$ un diagramme filtrant d'objets dans $A/Comm(C)$, et montrons que le morphisme naturel

$$Colim_\alpha Hom_{A/Comm(C)}(B, B'_\alpha) \longrightarrow Hom_{A/Comm(C)}(B, Colim_\alpha B'_\alpha)$$

est bijectif. Comme $A \longrightarrow B$ est un épimorphisme on voit que les ensembles source et but du morphisme précédent sont ou bien vides ou bien réduits à un point. Il nous suffit donc de montrer que si $Hom_{A/Comm(C)}(B, Colim_\alpha B'_\alpha)$ est non vide alors il en est de même de $Colim_\alpha Hom_{A/Comm(C)}(B, B'_\alpha)$, c'est à dire qu'il existe un α_0 tel que $Hom_{A/Comm(C)}(B, B'_{\alpha_0})$ soit non vide.

Notons $B' := Colim_\alpha B'_\alpha$ et posons

$$B'_i := B' \otimes_B B_i \qquad B'_{i,\alpha} := B'_\alpha \otimes_B B_i.$$

On pose aussi pour deux indices i et j

$$B_{ij} := B_i \otimes_B B_j \qquad B'_{ij} := B' \otimes_B B_{ij} \qquad B'_{ij,\alpha} := B'_\alpha \otimes_B B_{ij}.$$

On dispose de diagrammes dans $A/Comm(C)$ (indexés par la catégorie $\rightrightarrows$)

$$\prod_i B_i \rightrightarrows \prod_{i,j} B_{ij} \qquad \prod_i B'_i \rightrightarrows \prod_{i,j} B'_{ij},$$

et le morphisme $B \longrightarrow B'$ induit un morphisme du premier vers le second. Comme chaque B_i et chaque B_{ij} est de présentation finie dans $A/Comm(C)$, ce morphisme de diagrammes se factorise par un morphisme vers le diagramme

$$\prod_i B'_{i,\alpha_0} \rightrightarrows \prod_{i,j} B'_{ij,\alpha_0}$$

pour un certain indice α_0. En passant à la limite le long de la catégorie $\rightrightarrows$, et en appliquant le corollaire 2.11 (2) on trouve un morphisme $B \longrightarrow B_{\alpha_0}$ qui factorise le morphisme $B \longrightarrow B'$ dans $A/Comm(C)$. Ceci termine la preuve du fait que f est un ouvert Zariski au sens de la définition 2.12 (2). $\square$

Nous sommes maintenant prêts pour définir la notion de schéma relatif.

Définition 2.15 *Un faisceau $F \in Sh(Aff_C)$ est un* schéma relatif à C *(ou simplement un* schéma *si le contexte est clair) s'il existe une famille de schémas affines X_i et un morphisme*

$$p : \coprod_{i \in I} X_i \longrightarrow F$$

vérifiant les deux conditions suivantes.

1. *Le morphisme p est un épimorphisme de faisceaux.*

2. *Pour tout $i \in I$ le morphisme $X_i \longrightarrow F$ est une immersion Zariski ouverte.*

Une famille de morphismes $\{X_i \longrightarrow F\}$ *comme ci-dessus est appelé un* recouvrement Zariski affine de F.

La catégorie des schémas relatifs à C *est la sous-catégorie pleine de* $Sh(Aff_C)$ *formée des schémas au sens ci-dessus. Nous la noterons* $Sch(C)$.

Une propriété fondamentale des schémas relatifs est la propriété de recollement suivante.

Proposition 2.16 *L'application qui à* $X \in Aff_C$ *associe la catégorie* $Sch(C)/X$ *définit un sous-champ plein du champ des faisceaux sur* Aff_C *(qui à* X *associe* $Sh(Aff_C)/X$*).*

Preuve: Pour cela il nous faut vérifier les deux assertions suivantes.

1. Soit

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

   un diagramme cartésien de faisceaux avec X et Y des schémas affines. Si G est un schéma alors F est un schéma.

2. Soit X un schéma affine et $F \longrightarrow X$ un morphisme de faisceaux. S'il existe un recouvrement Zariski affine $\{X_i \longrightarrow X\}$ tel que $F \times_X X_i$ soit un schéma pour tout i, alors F est un schéma.

Si

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien comme dans (1) ci-dessus, et si $p : \coprod_{i \in I} X_i \longrightarrow G$ est un morphisme comme dans la définition 2.15, les faisceaux $Y_i := X_i \times_G F \simeq X_i \times_X Y$ sont des schémas affines, et le morphisme induit

$$\coprod_{i \in I} Y_i \longrightarrow F$$

est un épimorphisme tel que chaque morphisme $Y_i \longrightarrow F$ soit un ouvert Zariski (voir lemme 2.13).

Soit $F \longrightarrow X$ tel qu'au point (2) ci-dessus. Pour tout i, on choisit des schémas affines U_{ij} et un recouvrement Zariski affine

$$\coprod_j U_{ij} \longrightarrow F \times_X X_i.$$

On voit alors que le morphisme total

$$\coprod_{i,j} U_{ij} \longrightarrow F$$

est un épimorphisme. De plus, le lemme 2.13 et la factorisation

$$U_{ij} \longrightarrow F \times_X X_i \longrightarrow F$$

montre que chaque $U_{ij} \longrightarrow F$ est un ouvert Zariski. Ceci montre que F est un schéma. $\square$

Notons aussi les deux faits suivants.

Proposition 2.17 *1. Soit F un schéma et $F_0 \subset F$ un ouvert de Zariski au sens de la définition 2.12. Alors F_0 est un schéma.*

2. Soit $f : F \longrightarrow G$ un morphisme entre schémas. Alors f est un ouvert de Zariski au sens de la définition 2.12 si et seulement si f vérifie les deux conditions suivantes.

(a) Le morphisme f est un monomorphisme.

(b) Il existe un recouvrement Zariski affine $\{X_i \longrightarrow F\}$ tel que chaque morphisme $X_i \longrightarrow G$ soit un ouvert Zariski.

Preuve: (1) Soit $\{X_i \longrightarrow F\}$ un recouvrement Zariski affine. Pour chaque i, on pose $F_{0,i} := F_0 \times_F X_i$. Il existe donc une famille d'ouverts Zariski affine $\{U_{ij} \longrightarrow X_i\}$, tel que $F_{0,i}$ soit l'image de $\coprod_j U_{ij} \longrightarrow X_i$. Les morphismes $U_{ij} \longrightarrow F_0$ sont des ouverts Zariski, et de plus

$$\coprod_{i,j} U_{ij} \longrightarrow F_0$$

est un épimorphisme. Ceci implique que F_0 est un schéma.

(2) Supposons que f soit un ouvert Zariski. Soit $\{Y_i \longrightarrow G\}$ un recouvrement Zariski affine de G. Pour tout i soit $\{X_{ij} \longrightarrow Y_i \times_G F\}$ un recouvrement ouvert Zariski affine. A l'aide du lemme 2.13 on voit que la famille totale $\{X_{ij} \longrightarrow F\}$ est un recouvrement Zariski affine et chaque morphisme $X_{ij} \longrightarrow G$ est un ouvert Zariski.

Inversement, supposons que f vérifie les deux conditions de la proposition. Soit X un schéma affine et $X \longrightarrow G$ un morphisme. On pose $F_X := F \times_G X$, qui est un sous-faisceau de X. Chaqun des morphismes $X_i \times_G X \longrightarrow X$ est un ouvert Zariski. Il existe donc pour tout i un recouvrement Zariski affine $\{U_{ij} \longrightarrow X_i \times_G X\}$. Chaqun des morphismes $U_{ij} \longrightarrow X$ est un ouvert Zariski, et de plus l'image de $\coprod_{i,j} U_{ij} \longrightarrow X$ est F_X. Ceci montre que f est un ouvert Zariski au sens de la définition 2.12. $\square$

La proposition suivante donne certaines propriétés de stabilité des schémas.

Proposition 2.18 *1. La sous-catégorie $Sch(C)$ de $Sh(Aff_C)$ est stable par réunions disjointes et par produits fibrés.*

2. Un faisceau $F \in Sh(Aff_C)$ est un schéma si et seulement s'il existe une relation d'équivalence $R \subset X \times X$ dans $Sh(C)$ vérifiant les propriétés suivantes.

(a) On a

$$X \simeq \coprod_{i \in I} U_i$$

avec U_i des schémas affines.

(b) Pour tout $(i,j) \in I^2$, considérons le sous-faisceau $R_{i,j} \subset U_i \times U_j$ défini par le carré cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} R_{i,j} \arrow[r] \arrow[d] & U_i \times U_j \arrow[d] \\ R \arrow[r] & X \times X, \end{tikzcd}$$

de sorte à ce que $R \simeq \coprod_{i,j} R_{i,j}$. Alors chacun des morphismes induits

$$R_{i,j} \longrightarrow U_i$$

est un ouvert Zariski.

(c) Pour tout $i \in I$, le sous-objet $R_{i,i} \subset U_i \times U_i$ est égal à l'image du morphisme diagonal $U_i \longrightarrow U_i \times U_i$.

(d) On a $F \simeq X/R$ (i.e. F est isomorphe au faisceau quotient de X par la relation R).

Preuve: (1) Commençons par les sommes disjointes. Si $\{F_i\}$ est une famille de schémas, et

$$\coprod_j U_{ij} \longrightarrow F_i$$

un morphisme comme dans la définition 2.15, le morphisme total

$$\coprod_{i,j} U_{ij} \longrightarrow F$$

est un épimorphisme. Pour montrer que chaque $U_{ij} \longrightarrow F$ est un ouvert Zariski on utilise la factorisation

$$U_{ij} \longrightarrow F_i \longrightarrow F.$$

On est donc ramenés à montrer que $F_i \longrightarrow F$ est un ouvert Zariski. De façon plus générale on a le lemme suivant.

Lemme 2.19 *Soit $\{F_i\}_{i \in I}$ un famille de faisceaux. Pour tout i le morphisme*

$$F_i \longrightarrow F := \coprod_{i \in I} F_i$$

est un ouvert Zariski.

Preuve: Soit X un schéma affine et $X \longrightarrow F$ un morphisme. Il existe un recouvrement Zariski $\{X_j \longrightarrow X\}_{j \in J}$, que l'on peut supposer fini, et pour $j \in J$ un élément $a(j) \in I$ et des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ F_{a(j)} \arrow[r] & F. \end{tikzcd}$$

Notons J_0 le sous-ensemble des $j \in J$ avec $a(j) = i$, alors l'image du morphisme $F_i \times_F X \longrightarrow X$ est l'image du morphisme

$$\coprod_{j \in J_0} X_j \longrightarrow X.$$

Ceci montre que $F_i \longrightarrow F$ est un ouvert Zariski et finit la preuve du lemme. $\Box$

Passons à la stabilité de $Sch(C) \subset Sh(Aff_C)$ par produits fibrés. Soit

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d] \\ G \arrow[r] & H \end{tikzcd}$$

un diagramme dans $Sch(C)$, et considérons $F \times_H G \in Sh(Aff_C)$.

Lemme 2.20 *Soit $F_1 \longrightarrow F_0$ un morphisme de faisceaux avec F_0 un schéma. S'il existe un recouvrement Zariski affine $\{X_i \longrightarrow F_0\}_{i \in I}$ tel que $F_1 \times_{F_0} X_i$ soit un schéma pour tout $i \in I$, alors F_1 est un schéma.*

Preuve: C'est comme lors de la preuve de la proposition 2.16. Si pour tout i $\{X_{ij} \longrightarrow F_1 \times_{F_0} X_i\}$ est un recouvrement Zariski affine, alors la famille totale $\{X_{ij} \longrightarrow F_1\}$ est un recouvrement Zariski affine. $\Box$

Le lemme précédent appliqué aux projections $F \times_H G \longrightarrow F$ et $F \times_H G \longrightarrow G$ permet de se ramener au cas où F et G sont des schémas affines. On peut alors trouver des recouvrements Zariski $\{X_i \longrightarrow X\}$ et $\{Y_i \longrightarrow Y\}$ et des factorisations

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r] \arrow[d] & Z_i \arrow[d] & Y_i \arrow[l] \arrow[d] \\ X \arrow[r] & H & Y, \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où chaque Z_i est un schéma affine et $Z_i \longrightarrow H$ est un ouvert Zariski. Ainsi en appliquant une fois de plus le lemme aux projections de $X \times_H Y$ sur X et Y on peut supposer qu'il existe un schéma affine Z, un ouvert Zariski $Z \longrightarrow H$ et des factorisations

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & Z \arrow[d] & Y \arrow[l] \arrow[dl] \\ & H. & \end{tikzcd}$$

Mais comme le morphisme $Z \longrightarrow H$ est un monomorphisme on a $X \times_H Y \simeq X \times_Z Y$ qui est donc un schéma affine.

(2) La nécessité se voit facilement en considérant la relation d'équivalence induite par l'épimorphisme

$$\coprod_i X_i \longrightarrow F$$

où $\{X_i \longrightarrow F\}$ est un recouvrement Zariski affine.

Supposons maintenant qu'un faisceau F s'écrive comme X/R avec X et R comme dans l'énoncé de la proposition et montrons que F est un schéma. Le fait que chaque morphisme $U_i \longrightarrow F$ soit un monomorphisme se déduit de la condition (c) sur les $R_{i,i}$. Comme le morphisme

$$X = \coprod U_i \longrightarrow F = X/R$$

est un épimorphisme il nous reste à voir que chaque morphisme $U_i \longrightarrow F$ est un ouvert Zariski.

Soit Y un schéma affine, $Y \longrightarrow F$ un morphisme et posons $Y_i := Y \times_F U_i$. On considère le morphisme $Y_i \longrightarrow Y$, et on cherche à montrer que c'est un ouvert Zariski. Il existe un recouvrement Zariski affine $\{Z_j \longrightarrow Y\}_{j \in J}$, une application $a : J \longrightarrow I$ et des factorisations

$$\begin{tikzcd} Z_j \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ U_{a(j)} \arrow[r] & F. \end{tikzcd}$$

On a donc, pour tout $j \in J$

$$Y_i \times_Y Z_j \simeq R_{i,a(j)} \times_{U_{a(j)}} Z_j.$$

Comme $R_{i,a(j)} \longrightarrow U_{a(j)}$ est un ouvert Zariski, on voit que le morphisme

$$Y_i \times_Y Z_j \longrightarrow Y$$

est un ouvert Zariski pour tout $j \in J$. Il existe donc une famille d'ouverts Zariski affine $\{W_{ijk} \longrightarrow Y\}_{k \in K}$ telle que l'image du morphisme

$$\coprod_k W_{ijk} \longrightarrow Y$$

soit égale à $Y_i \times_Y Z_j$. On voit alors que la famille d'ouverts Zariski $\{W_{ijk} \longrightarrow Y\}_{(j,k) \in J \times K}$ est telle que l'image du morphisme

$$\coprod_{j,k} W_{ijk} \longrightarrow Y$$

est égale à Y_i. Ceci montre que $Y_i \longrightarrow Y$ est un ouvert Zariski et donc que $U_i \longrightarrow F$ est un ouvert Zariski. Ceci termine la preuve du fait que F est un schéma. $\square$

Pour terminer ce paragraphe signalons un autre point de vue sur les schémas relatifs, que nous n'utiliserons pas, mais qui est plus proche de la notion usuelle de schéma en tant qu'espace annelé.

Soit X un schéma au dessus de C. On définit la catégorie $Zar(X)$ des ouverts de Zariski de X comme étant la sous catégorie pleine de $Sh(Aff_C)/X$ formée des $u : Y \to X$, avec Y un schéma et u une immersion Zariski ouverte. La catégorie $Zar(X)$ est un *lieu* (*locale* en anglais, voir [Ma-Mo]), c'est à dire que c'est la catégorie sous-jacente à un ensemble partiellement ordonné qui possède des sup ainsi que des inf finis, et tel que les inf se distribuent sur les sup. En d'autres termes, $Zar(X)$ est une catégorie qui se comporte comme la catégorie des ouverts d'un espace topologique. On dispose d'une topologie naturelle induite sur $Zar(X)$, qui n'est autre que la restriction de la topologie canonique de $Sh(Aff_C)$. Ainsi, une famille de morphismes $\{Y_i \to Y\}$ est couvrante dans $Zar(X)$ si le morphisme $\coprod Y_i \longrightarrow Y$ est un épimorphisme de faisceaux. La sous-catégorie pleine de $Zar(X)$ formée des $Y \to X$ avec Y un schéma affine sera notée $ZarAff(X)$. Elle est aussi munie de la restriction de la topologie canonique de $Sh(Aff_C)$. De plus, le foncteur d'inclusion $ZarAff(X) \longrightarrow Zar(X)$ est continu, et induit une équivalence sur les catégories de faisceaux

$$Sh(Zar(X)) \simeq Sh(ZarAff(X)).$$

Par cette équivalence, nous identifierons souvent implicitement ces deux catégories. Nous la noterons simplement $Sh(X_{Zar})$.

Nous savons que le site $Zar(X)$ est un lieu, et que sa topologie est engendrée par une prétopologie quasi-compacte (i.e. les familles couvrantes sont finies), à savoir le site $ZarAff(X)$. Ceci implique que $Zar(X)$ est naturellement équivalent au lieu $Ouv(|X|)$ des ouverts d'un espace topologique $|X|$ (voir [Ma-Mo, Cor. IX.3.4, Cor IX.11.3]). L'espace topologique $|X|$ est évidemment tel que le topos des faisceaux sur $|X|$ est équivalent au topos des faisceaux sur $Zar(X)$. Ainsi, nous verrons tout faisceau sur $Zar(X)$ comme un faisceau sur $|X|$. Ainsi, $Sh(X_{Zar})$ est équivalente à $Sh(|X|)$, la catégorie des faisceaux sur l'espace topologique $|X|$.

Soit $Y = Spec\, A \longrightarrow X$ un objet de $ZarAff(X)$. On lui associe l'objet correspondant $A \in Comm(C)$. Lorsque Y varie dans $ZarAff(X)$ ceci définit un foncteur

$$\mathcal{O}_X : ZarAff(X)^{op} \longrightarrow Comm(C)$$

que l'on voit être un faisceau par le corollaire 2.11. On dispose ainsi d'un faisceau $\mathcal{O}_X$ sur le topos $Sh(X_{Zar})$ à valeurs dans $Comm(C)$, ou de manière équivalente d'un espace $|X|$ muni d'un faisceau $\mathcal{O}_X$ à valeurs dans $Comm(C)$. Le couple $(|X|, \mathcal{O}_X)$ joue dans notre situation le rôle des espaces annelés pour les schémas au sens usuel. On pourrait développer la théorie de schémas relatifs de ce point de vue, en définissant les schémas au dessus de C somme des espaces munis de faisceaux à valeurs dans $Comm(C)$ et qui localement sont équivalents à un modèle affine. Ceci donne une version un peu plus géométrique des schémas relatifs, mais ceci dit équivalente à celle que nous donnons dans la définition 2.15. Il nous semble que ce point de vue n'apporte en réalité pas grand chose, d'autant plus que le point de vue fonctoriel nous serait indispensable par exemple pour pouvoir considérer les champs géométriques (notion que nous n'aborderons cependant pas dans ce travail).

2.5 Changements de bases

Supposons que $(C, \otimes, \mathbf{1})$ et $(D, \otimes, \mathbf{1})$ soient deux catégories monoïdales symétriques qui vérifient les conditions exposées en début de cette section. On se donne un foncteur monoïdal symétrique (unitaire et associatif)

$$f : C \longrightarrow D$$

et l'on suppose qu'il possède un adjoint à droite

$$g : D \longrightarrow C.$$

Cet adjoint à droite n'est plus monoïdal, mais on dispose de morphismes fonctoriels $g(X) \otimes g(Y) \longrightarrow g(X \otimes Y)$, qui sont associatifs, commutatifs et unitaires. Cela suffit pour que g induise des foncteurs sur les catégories de monoïdes commutatifs et de modules.

Le foncteur f induit un foncteur sur les catégories des monoïdes commutatifs, et donc sur les catégories des schémas affines

$$f : Aff_C \longrightarrow Aff_D.$$

Ce foncteur possède un adjoint à gauche

$$g : Aff_D \longrightarrow Aff_C$$

induit par la foncteur g (nous garderons les mêmes notations pour les foncteurs induits sur les schémas affines).

On dispose ainsi d'une adjonction sur les catégories de préfaisceaux

$$g_! : Pr(Aff_D) \longrightarrow Pr(Aff_C) \qquad Pr(Aff_D) \longleftarrow Pr(Aff_C) : g^* = f_!.$$

Explicitement, pour $F \in Pr(Aff_C)$, et $X \in Aff_D$ on a $f_!(F)(X) = F(g(X))$.

Rappelons qu'on dit que le foncteur $f : Aff_C \longrightarrow Aff_D$ est continu pour la topologie Zariski (resp. fpqc) si le foncteur $f^* : Pr(Aff_D) \longrightarrow Pr(Aff_C)$ préserve les sous-catégories de faisceaux Zariski (resp. fpqc). Dans ce cas, l'adjonction $(f_!, f^*)$ descend en une adjonction sur les catégories de faisceaux

$$f_!^{\sim} : Sh(Aff_C) \longrightarrow Sh(Aff_D) \qquad Sh(Aff_C) \longleftarrow Sh(Aff_D) : f^*.$$

Explicitement, le foncteur $f_!^{\sim} = a \circ f_!$ est le composé de $f_!$ sur les préfaisceaux suivi du foncteur faisceau associé. Comme le foncteur f commute aux limites finies, il en est de même de $f_!^{\sim}$, et ainsi l'adjonction

$$f_!^{\sim} : Sh(Aff_C) \longrightarrow Sh(Aff_D) \qquad Sh(Aff_C) \longleftarrow Sh(Aff_D) : f^*$$

définit un morphisme géométrique de topos.

Proposition 2.21 *On garde les notations ci-dessus.*

1. *Le foncteur $f : Aff_C \longrightarrow Aff_D$ préserve les monomorphismes et les limites finies.*

2. *Si le foncteur $f : Aff_C \longrightarrow Aff_D$ est continu pour la topologie plate, et si de plus $g : D \longrightarrow C$ commute avec les colimites filtrantes, alors le foncteur $f : Aff_C \longrightarrow Aff_D$ est aussi continue pour la topologie de Zariski.*

Preuve: (1) Le foncteur $f : C \longrightarrow D$ préserve toutes les colimites car il possède un adjoint à droite. Ainsi, il en est de même pour $f : Comm(C) \longrightarrow Comm(D)$, et donc le foncteur induit sur les catégories opposées préserve les limites et en particulier les limites finies. De ceci nous déduisons aussi que $f : Aff_C \longrightarrow Aff_D$ préserve les monomorphismes, car $X \longrightarrow Y$ est un monomorphisme si et seulement si le morphisme diagonal $X \longrightarrow X \times_Y X$ est un isomorphisme.

(2) Par le point (1) et l'hypothèse on sait déjà que $f : Comm(C) \longrightarrow Comm(D)$ préserve les épimorphismes plats. Il nous reste donc à voir qu'il préserve aussi les morphismes de présentation finie. Mais ceci se voit immédiatement par adjonction. $\square$

Corollaire 2.22 *On suppose que le foncteur $g : D \longrightarrow C$ est conservatif et qu'il commute aux colimites filtrantes. On suppose de plus que pour tout morphisme plat $A \longrightarrow B$ dans $Comm(C)$, et tout $N \in f(A) - Mod$, le morphisme naturel*

$$g(N) \otimes_A B \longrightarrow g(N \otimes_{f(A)} f(B))$$

est un isomorphisme dans $B - Mod$. Alors, $f : Aff_C \longrightarrow Aff_D$ est continu pour la topologie de Zariski, et le foncteur

$$f_!^{\sim} : Sh(Aff_C) \longrightarrow Sh(Aff_D)$$

préserve les sous-catégories des schémas et induit un foncteur

$$\begin{array}{ccc} Sch(C) & \longrightarrow & Sch(D) \\ X & \mapsto & X \times_C D := f_!^{\sim}(X). \end{array}$$

Pour tout schéma affine X au dessus de C $f_!^{\sim}(X)$ est isomorphe au schéma affine $f(X) \in Aff_D$.

Preuve: Commençons par montrer que le foncteur $f : Aff_C \longrightarrow Aff_D$ est continu pour la topologie plate. Pour cela, montrons tout d'abord que pour un morphisme $A \longrightarrow B$ plat dans $Comm(C)$ le morphisme induit $f(A) \longrightarrow f(B)$ est plat dans $Comm(D)$. Par hypothèse, on dispose d'un diagramme commutatif (à isomorphisme près)

$$\begin{tikzcd} f(A) - Mod \arrow[r, "g"] \arrow[d] & A - Mod \arrow[d] \\ f(B) - Mod \arrow[r, "g"'] & B - Mod, \end{tikzcd}$$

où les foncteurs verticaux sont les changements de bases. Comme le foncteur g est conservatif et que $A \longrightarrow B$ est plat, on voit facilement que cela implique que $f(A) \longrightarrow f(B)$ est plat. Le même argument montre que si $\{X_i \longrightarrow X\}$ est un recouvrement plat dans Aff_C alors $\{f(X_i) \longrightarrow f(X)\}$ est un recouvrement plat dans Aff_D. Ceci fini de montrer que $f : Aff_C \longrightarrow Aff_D$ est continu pour la topologie plate. Par la proposition 2.21 (2) on voit que f est continu pour la topologie de Zariski.

Soit maintenant X un schéma au dessus de C. On sait d'après la proposition 2.18 que l'on peut l'écrire comme un quotient Y/R, où Y est une réunion disjointe de schémas affines et $R \subset Y \times Y$ une relation d'équivalence vérifiant les conditions de la proposition 2.21. Comme $f_!^{\sim}$ est un adjoint à gauche on trouve que $f_!^{\sim}(X)$ est isomorphe au quotient $f_!^{\sim}(Y)/f_!^{\sim}(R)$. Comme le foncteur $f_!^{\sim}$ préserve clairement les schémas affines, on a bien que $f_!^{\sim}(Y)$ est une réunion disjointe de schémas affines. De plus, comme $f_!^{\sim}$ préserve les épimorphismes (car il commute aux colimites et aux limites finies) et les ouverts Zariski (voir proprosition 2.21), on voit que la relation déquivalence $f_!^{\sim}(R) \longrightarrow f_!^{\sim}(Y) \times f_!^{\sim}(Y)$ vérifie les conditions de la proposition 2.18 et donc que $f_!^{\sim}(X)$ est un schéma. $\square$

Pour un monoïde commutatif $A \in Comm(C)$, on a un isomorphisme naturel

$$f_!^{\sim}(Spec\, A) \simeq Spec\, f(A).$$

En effet, par définition le foncteur $f_!^{\sim}$ est le composé de $f_!$, défini sur les préfaisceaux, et du foncteur faisceau associé. Il est facile de voir que $f_!(Spec\,A) \simeq Spec\,f(A)$, en tant que préfaisceau. Comme les préfaisceaux représentables par des schémas affines sont des faisceaux, ceci montre bien que $f_!^{\sim}(Spec\,A) \simeq Spec\,f(A)$. De ceci on tire que pour tout schéma affine $X = Spec\,A \in Aff_C$, le foncteur $f_!^{\sim}(X)$ est donné par

$$\begin{array}{ccc} Comm(C) & \longrightarrow & Ens \\ B & \mapsto & Hom(A, g(B)). \end{array}$$

3 Trois exemples de géométries relatives

Dans cette section nous présentons nos trois premiers exemples de catégories de schémas relatifs.

3.1 $Spec\,\mathbb{Z}$

Posons $(C, \otimes, \mathbf{1}) = (\mathbb{Z} - Mod, \otimes, \mathbb{Z})$, la catégorie monoïdale symétrique des groupes abéliens. Elle vérifie les conditions de la section précédente, donc on dispose d'une catégorie $Sch(\mathbb{Z} - Mod)$ des schémas au dessus de $\mathbb{Z} - Mod$. On voit facilement en décanulant les définitions que les notions de topologie plate et d'ouverts de Zariski coincident avec les notions usuelles (il suffit de remarquer qu'un morphisme de schémas est une immersion ouverte si et seulement si c'est un monomorphisme plat et localement de présentation finie). Ainsi, on voit facilement que la catégorie $Sch(\mathbb{Z} - Mod)$ est naturellement équivalente à la catégorie des schémas au sens usuel.

Définition 3.1 *La* catégorie des $\mathbb{Z}$-schémas *est $Sch(\mathbb{Z} - Mod)$. Elle sera notée $\mathbb{Z} - Sch$.*

3.2 $Spec\,\mathbb{N}$

Posons maintenant $(C, \otimes, \mathbf{1}) := (\mathbb{N} - Mod, \otimes, \mathbb{N})$, la catégorie des monoïdes commutatifs (unitaires et associatifs), munie de son produit tensoriel usuel. Nous appellerons les objets de $\mathbb{N} - Mod$ aussi des $\mathbb{N}$-modules, pour des raisons évidentes. Les conditions de la section précédente sont bien entendues vérifiées, et on dispose donc d'une catégorie $Sch(\mathbb{N} - Mod)$ des schémas relatifs à $\mathbb{N} - Mod$.

Définition 3.2 *La* catégorie des $\mathbb{N}$-schémas *est $Sch(\mathbb{N} - Mod)$. Elle sera notée $\mathbb{N} - Sch$.*

Par définition la catégorie des $\mathbb{N}$-schémas affines est équivalente à la catégorie opposée des semi-anneaux commutatifs.

On dispose d'un adjonction

$$f : \mathbb{N} - Mod \longrightarrow \mathbb{Z} - Mod \qquad \mathbb{N} - Mod \longleftarrow \mathbb{Z} - Mod : g,$$

où g est le foncteur d'inclusion des groupes abéliens dans les monoïdes abéliens, et f est le foncteur de complétion des monoïdes abéliens vers les groupes abéliens. Le foncteur f est monoïdal symétrique.

Proposition 3.3 *Le foncteur*

$$f : \mathbb{N} - Mod \longrightarrow \mathbb{Z} - Mod$$

vérifie les conditions du corollaire 2.22.

Preuve: Le fait que g soit conservatif et commute aux colimites filtrantes est clair. Pour un semi-anneau commutatif A, le foncteur $g : f(A) - Mod \longrightarrow A - Mod$ est pleinement fidèle, et son image consiste en les A-modules N tel que le monoïde sous-jacent à N est un groupe. Il est alors immédiat de constater que pour un morphisme quelconque de semi-anneaux $A \longrightarrow B$, et tout $f(A)$-module N, le morphisme naturel

$$g(N) \otimes_A B \longrightarrow g(N \otimes_{f(A)} f(B))$$

est un isomorphisme (ceci est équivalent au fait que le monoïde sous-jacent à $g(N) \otimes_A B$ est un groupe). $\Box$

D'après le corollaire 2.22 on trouve donc un foncteur de changement de bases

$$- \otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} : \mathbb{N} - Sch \longrightarrow \mathbb{Z} - Sch.$$

Proposition 3.4 *Le foncteur*

$$- \otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} : \mathbb{N} - Sch \longrightarrow \mathbb{Z} - Sch$$

possède un adjoint à gauche qui est pleinement fidèle.

Preuve: Revenons au foncteur de complétion $f : \mathbb{N} - Mod \longrightarrow \mathbb{Z} - Mod$, et à son adjoint à droite le foncteur d'inclusion $g : \mathbb{Z} - Mod \longrightarrow \mathbb{N} - Mod$. Ils induisent une adjonction sur les catégories de schémas affines

$$g : Aff_{\mathbb{Z}} \longrightarrow Aff_{\mathbb{N}} \qquad Aff_{\mathbb{Z}} \longleftarrow Aff_{\mathbb{N}} : f$$

où f est maintenant l'adjoint à droite. On sait que f est continu pour la topologie Zariski, et que le foncteur induit

$$f_!^{\sim} : Sh(Aff_{\mathbb{N}}) \longrightarrow Sh(Aff_{\mathbb{Z}})$$

préserve les sous-catégories de schémas. Il est facile de voir que g est aussi un foncteur continu pour la topologie Zariski, et que l'on a donc

$$f_!^{\sim} \simeq g^* : Sh(Aff_{\mathbb{N}}) \longrightarrow Sh(Aff_{\mathbb{Z}}).$$

Le foncteur

$$g_!^{\sim} : Sh(Aff_{\mathbb{Z}}) \longrightarrow Sh(Aff_{\mathbb{N}})$$

est alors un adjoint à gauche de $f_!^{\sim} \simeq g^*$. De plus, g étant pleinement fidèle on voit facilement que $g_!^{\sim}$ est aussi pleinement fidèle. Il nous reste donc à montrer que $g_!^{\sim}$ préserve aussi les schémas. Pour cela il suffit d'utiliser, comme pour la preuve du corollaire 2.22, qu'il préserve la notion d'ouverts Zariski. $\Box$

D'après la proposition 3.4 nous verrons la catégorie des $\mathbb{Z}$-schémas plongée dans celle des $\mathbb{N}$-schémas. Il faut comprendre la proposition 3.4 à travers le fait que le morphisme

$$Spec\,\mathbb{Z} \longrightarrow Spec\,\mathbb{N}$$

est un monomorphisme.

3.3 $Spec\,\mathbb{F}_1$

Nous posons maintenant $(C, \otimes, \mathbf{1}) = (Ens, \times, *)$, la catégorie des ensembles munie de sa structure monoïdale symétrique donnée par le produit direct. Cette catégorie vérifie les conditions de notre premier paragraphe, et on dispose donc d'une catégorie $Sch(Ens)$ de schémas au dessus de Ens. Nous appellerons les objets de $Sch(Ens)$ des $\mathbb{F}_1$-schémas.

Définition 3.5 *La* catégorie des $\mathbb{F}_1$-schémas *est* $Sch(Ens)$. *Elle sera notée* $\mathbb{F}_1 - Sch$.

Par construction, la catégorie $Aff_{\mathbb{F}_1}$ des $\mathbb{F}_1$-schémas affines est équivalente à la catégorie opposée de la catégorie des monoïdes commutatifs (associatifs et unitaires).

On dispose d'une adjonction

$$f : \mathbb{F}_1 - Mod = Ens \longrightarrow \mathbb{N} - Mod \qquad \mathbb{F}_1 - Mod = Ens \longleftarrow \mathbb{N} - Mod : g,$$

où g est le foncteur d'oubli qui envoit un monoïde commutatif sur son ensemble sous-jacent. Le foncteur f envoit un ensemble X sur $X \otimes \mathbb{N}$ le monoïde commutatif libre engendré par X. Le foncteur f est monoïdal symétrique et induit donc un foncteur sur les schémas affines

$$Aff_{\mathbb{F}_1} \longrightarrow Aff_{\mathbb{N}}.$$

Ce foncteur est celui qui envoit un monoïde commutatif M sur le semi-anneau $\mathbb{N}[M]$, analogue *semi* des anneaux en groupes.

Proposition 3.6 *Le foncteur*

$$f : \mathbb{F}_1 - Mod \longrightarrow \mathbb{N} - Mod$$

vérifie les conditions du corollaire 2.22.

Preuve: Le fait que g soit conservatif et commute aux colimites filtrantes est clair. Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme plat dans $Comm(\mathbb{F}_1 - Mod)$. Considérons le morphisme de semi-anneaux induit $\mathbb{N}[A] \longrightarrow \mathbb{N}[B]$. On considère le diagramme de catégories et foncteurs

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}[A] - Mod \arrow[r, "g"] \arrow[d] & A - Mod \arrow[d] \\
\mathbb{N}[B] - Mod \arrow[r, "g"] & B - Mod,
\end{tikzcd}$$

dont on doit montrer qu'il commute à isomorphisme près (plus précisément que la transformation naturelle entre les deux compositions possibles est un isomorphisme). On peut remarquer que le catégorie $\mathbb{N}[A] - Mod$ s'identifie à la catégorie des monoides abéliens dans $A - Mod$. De même, le catégorie $\mathbb{N}[B] - Mod$ s'identifie à la catégorie des monoides abéliens dans $B - Mod$. Le fait que le diagramme ci-dessus commute est alors un conséquence du fait que le foncteur de changement de bases $A - Mod \longrightarrow B - Mod$ commute aux produits directs (qui lui-même est un conséquence du fait que $A \longrightarrow B$ soit plat). $\square$

D'après le corollaire 2.22 on dispose donc d'un foncteur de changement de bases

$$- \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{N} : \mathbb{F}_1 - Sch \longrightarrow \mathbb{N} - Sch.$$

En composant avec le changement de bases des $\mathbb{N}$-schémas vers les $\mathbb{Z}$-schémas on trouve un changement de bases

$$- \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} : \mathbb{F}_1 - Sch \longrightarrow \mathbb{Z} - Sch.$$

4 Quelques exemples de schémas au-dessous de $Spec\,\mathbb{Z}$

4.1 Quelques schémas en groupes

Soit M un groupe abélien, que l'on peut regarder comme un monoïde commutatif. On considère $\mathbb{D}_{\mathbb{F}_1}(M) := Spec\,M \in \mathbb{F}_1 - Sch$. On remarque immédiatement que

$$\mathbb{D}_{\mathbb{F}_1}(M) \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} \simeq Spec\,\mathbb{Z}[M] \simeq \mathbb{D}(M),$$

est le $\mathbb{Z}$-schéma en groupes diagonalisable associé à M. On voit ainsi que tous les schémas en groupes diagonalisables sont définis sur $\mathbb{F}_1$. En particulier, on pose $Spec\,\mathbb{F}_{1^n} := \mathbb{D}_{\mathbb{F}_1}(\mathbb{Z}/n)$. Ceci nous donne

$$Spec\,\mathbb{F}_{1^n} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} \simeq \mu_n,$$

comme on doit s'y attendre.

Examinons maintenant le cas du groupe linéaire Gl_n. Revenons un moment au cas général d'une catégorie monoïdale symétrique $(C, \otimes, \mathbf{1})$ qui vérifie les conditions 2.6. Posons $E_n = \{1, \dots, n\}$, l'ensemble à n éléments. On définit un foncteur

$$\begin{array}{cccc} Gl_{n,C} : & Comm(C) & \longrightarrow & Ens \\ & A & \mapsto & Aut(\coprod_{E_n} A), \end{array}$$

où $\coprod_{E_n} A$ est le A-module libre sur E_n (i.e. le A-module libre de rang n), et $Aut(\coprod_{E_n} A)$ est le groupe des automorphismes de $\coprod_{E_n} A$ dans $A - Mod$. Ce foncteur est un faisceau et sera considéré comme objet de $Sh(Aff_C)$. Nous noterons

$$Gl_{n,\mathbb{Z}} \qquad Gl_{n,\mathbb{N}} \qquad Gl_{n,\mathbb{F}_1}$$

pour les trois cas de $(C, \otimes, \mathbf{1})$ qui nous intéressent.

Proposition 4.1 *1. Le faisceau $Gl_{n,\mathbb{Z}}$ (resp. $Gl_{n,\mathbb{N}}$, resp. $Gl_{n,\mathbb{F}_1}$) est représentable par un $\mathbb{Z}$-schéma affine (resp. un $\mathbb{N}$-schéma affine, resp. un $\mathbb{F}_1$-schéma).*

2. Le morphisme naturel

$$Gl_{n,\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \longrightarrow Gl_{n,\mathbb{Z}}$$

est un isomorphisme.

3. Le $\mathbb{Z}$-schéma $Gl_{n,\mathbb{F}_1} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$ est isomorphe au produit semi direct de Σ_n par $\mathbb{G}_m^n$.

4. On a
$$Gl_{n,\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = Gl_n(\mathbb{Z}) \qquad Gl_{n,\mathbb{N}}(\mathbb{N}) = Gl_{n,\mathbb{F}_1}(\mathbb{F}_1) = \Sigma_n.$$

Preuve: (1) Commençons par noter $M_{n,C}$ le faisceau des endomorphismes de $\coprod_{E_n} A$

$$\begin{array}{cccc} M_{n,C}: & Comm(C) & \longrightarrow & Ens \\ & A & \mapsto & End(\coprod_{E_n} A). \end{array}$$

Supposons pour commencer que dans C les sommes directes sont aussi des produits directs, c'est à dire que pour deux objets X et Y de C, le morphisme naturel $X \coprod Y \longrightarrow X \times Y$ est un isomorphisme. Ceci est le cas par exemple pour $C = \mathbb{N} - Mod$ et pour $C = \mathbb{Z} - Mod$. Dans ce cas, on voit facilement que $M_{n,C}$ est isomorphe au foncteur

$$\begin{array}{cccc} M_{n,C}: & Comm(C) & \longrightarrow & Ens \\ & A & \mapsto & A^{n^2}. \end{array}$$

En d'autres termes, si l'on note $B := L(\mathbf{1}^{n^2}) \in Comm(C)$, le monoïde commutatif libre engendré par l'objet $\mathbf{1}^{n^2}$, alors on a $M_{n,C} \simeq Spec\, B$. Ainsi, le faisceau $M_{n,C}$ est représentable par un schéma affine. De plus, il existe des carrés cartésiens de faisceaux

$$\begin{tikzcd} Gl_{n,C} \arrow[r] \arrow[d] & M_{n,C} \times M_{n,C} \arrow[d, "m"] \\ \bullet \arrow[r, "e"'] & M_{n,C} \times M_{n,C}, \end{tikzcd}$$

où le morphisme m envoie symboliquement (u, v) sur (uv, vu), et où le morphisme e est le morphisme unité. Ceci montre donc que $Gl_{n,C}$ est représentable par un schéma affine, toujours sous l'hypothèse que les sommes directes sont aussi des produits directs dans C. Ceci montre donc que $Gl_{n,\mathbb{N}}$ et $Gl_{n,\mathbb{Z}}$ sont tous deux des schémas affines.

Il nous reste à traiter le cas de $Gl_{n,\mathbb{F}_1}$. Mais, pour $A \in Comm(Ens)$, on voit facilement que le groupe $Aut(\coprod_{E_n} A)$ est isomorphe au produit semi-direct du groupe symétrique Σ_n par le groupe $A^\times$ des éléments inversibles dans le monoïde A. En d'autres termes, si l'on note $\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_1} := Gl_{1,\mathbb{F}_1}$, on trouve que le faisceau en groupes $Gl_{n,\mathbb{F}_1}$ est isomorphe au produit semi-direct du faisceau constant Σ_n par le faisceau en groupes $\mathbb{G}^n_{m,\mathbb{F}_1}$. Ainsi, en tant que faisceau d'ensembles $Gl_{n,\mathbb{F}_1}$ est isomorphe à une réunion disjointe de $\mathbb{G}^n_{m,\mathbb{F}_1}$. Il nous suffit donc de montrer que $\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_1}$ est représentable par un schéma affine. Mais on voit facilement que

$$\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_1} \simeq Spec\, \mathbb{Z} \simeq \mathbb{D}(\mathbb{Z}),$$

où $\mathbb{Z}$ ici est considéré comme un monoïde pour la loi additive, et donc comme un objet de $Comm(Ens)$ (ce $Spec\, \mathbb{Z}$ est un $\mathbb{F}_1$-schéma et n'a évidemment rien à voir avec le $Spec\, \mathbb{Z}$ qui est un $\mathbb{Z}$-schéma). Ceci termine la preuve du point (1).

(2) Ceci est évident car pour $A \in Comm(\mathbb{Z} - Mod)$ un anneau commutatif, on a

$$Gl_{n,\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}(A) \simeq Gl_{n,\mathbb{N}}(A),$$

où A est aussi condidéré comme un semi-anneau (ceci est vrai car $Gl_{n,\mathbb{N}}$ est affine). Comme les A-modules dans $\mathbb{Z}-Mod$ forment une sous-catégorie pleine des A-modules dans $\mathbb{N}-Mod$, on voit bien que

$$Gl_{n,\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}(A) \simeq Gl_{n,\mathbb{N}}(A) \simeq Gl_n(A) \simeq Gl_{n,\mathbb{Z}}(A).$$

(3) Nous avons vu lors de la preuve de (1) que le faisceau en groupes $Gl_{n,\mathbb{F}_1}$ est le produit semi-direct de Σ_n par $\mathbb{G}^n_{m,\mathbb{F}_1}$. Ainsi, $Gl_{n,\mathbb{F}_1} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$ est le produit semi-direct du faisceau constant Σ_n par $(\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_1} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z})^n$. Mais nous avons vu lors de la discussion sur les groupes de type multiplicatif que

$$\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_1} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{D}_{\mathbb{F}_1}(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{G}_m.$$

(4) Les valeurs de $Gl_{n,\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ et $Gl_{n,\mathbb{F}_1}(\mathbb{F}_1)$ ont déjà été vues. Le groupe $Gl_{n,\mathbb{N}}(\mathbb{N})$ est par définition le groupe des automorphismes de $\mathbb{N}^n$ en tant que $\mathbb{N}$-module. Il s'identifie donc au sous-groupe des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ qui possèdent un inverse qui soit aussi à coefficients dans $\mathbb{N}$. Il s'agit donc du sous-groupe des matrices de permutation et donc de Σ_n. $\square$

La conclusion de la proposition 4.1 est que $Gl_{n,\mathbb{Z}}$ est défini sur $\mathbb{N}$, mais pas sur $\mathbb{F}_1$ pour $n > 1$.

4.2 Variétés toriques

Soit Δ un éventail au sens de [O]. Pour un élément $\sigma \in \Delta$, on dispose d'un cone dual σ^* dont les points entiers forment un monoïde commutatif noté M_σ. Pour $\sigma' \subset \sigma$ une face de σ, on dispose d'un morphisme de monoïdes $M_\sigma \longrightarrow M_{\sigma'}$. Si l'on pose $U_\sigma := Spec\, M_\sigma \in \mathbb{F}_1 - Sch$, alors le morphisme

$$U_{\sigma'} \longrightarrow U_\sigma$$

est un ouvert de Zariski. En effet, le morphisme de monoïdes $M_\sigma \longrightarrow M_{\sigma'}$ est obtenu par inversion d'un nombre fini d'éléments de M_σ (voir Proposition 1.3 [O]).

On définit des faisceaux sur $Aff_{\mathbb{F}_1}$

$$X := \coprod_{\sigma \in \Delta} U_\sigma \qquad R := \coprod_{\sigma,\sigma' \in \Delta} U_{\sigma \cap \sigma'}.$$

Les deux morphismes naturels de R dans X définissent une relation d'équivalence

$$R \subset X \times X.$$

Cette relation d'équivalence vérifie les conditions de la proposition 2.18 (2), et on obtient ainsi un $\mathbb{F}_1$-schéma

$$X_{\mathbb{F}_1}(\Delta) := X/R \in \mathbb{F}_1 - Sch.$$

On dispose aussi d'un $\mathbb{Z}$-schéma $X_{\mathbb{Z}}(\Delta)$, tel que par exemple présenté dans [O]. On voit immédiatement par construction que l'on a un isomorphisme

$$X_{\mathbb{F}_1}(\Delta) \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} \simeq X_{\mathbb{Z}}(\Delta).$$

Ainsi, les variétés toriques sont bien définies sur $\mathbb{F}_1$. Elles sont donc aussi définies sur $\mathbb{N}$, en posant $X_{\mathbb{N}}(\Delta) := X_{\mathbb{F}_1}(\Delta) \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{N}$, ou encore par une construction directe.

5 Les modèles homotopiques

Dans cette dernière section nous supposerons que $(C, \otimes, \mathbf{1})$ est une catégorie de modèles monoïdale symétrique au sens de [Ho]. Remarquer que par définition la catégorie monoïdale symétrique sous-jacente vérifie l'hypothèse 2.6. Nous supposerons de plus que les conditions suivantes sont satisfaites.

Hypothèse 5.1

La catégorie de modèles C est simpliciale et combinatoire au sens de [HAGI, Appendix A.2].

La catégorie de modèles monoïdale symétrique $(C, \otimes, \mathbf{1})$ satisfait à l'axiome du monoïde de [S-S].

L'objet $\mathbf{1}$ est cofibrant dans C.

Les sources et buts des cofibrations et cofibrations triviales génératrices sont des objets cofibrants dans C.

Sous les hypothèse ci-dessus, nous pouvons considérer la catégorie $Comm(C)$, des $\mathcal{L}$-algèbres dans C, où $\mathcal{L}$ est (l'image dans C de) l'opérade des isométries linéaires (voir par exemple [Sp]). La catégorie $Comm(C)$ est donc un modèle pour les E_∞-monoïdes dans C, et ses objets seront donc simplement appelés des *E_∞-monoïdes dans C*.

D'après l'hypothèse 5.1 et [Sp, Thm. 4.3,Cor. 9.7] on sait qu'elle est munie d'une structure de catégorie de modèles dont les fibrations et les équivalences sont définies sur les objets sous-jacents dans C. De plus, pour $A \in Comm(C)$, on peut définir $A - Mod$, une catégorie des A-modules dans C (voir [Sp]). Elle peut aussi se voir comme une catégorie de modules (à gauche) sur un monoïde $U(A)$ dans C (voir [Sp]). Ainsi, d'après nos hypothèses 5.1, et d'après [S-S], la catégorie $A - Mod$ est aussi munie d'une structure de catégorie de modèles où les fibrations et les équivalences sont définies dans C. Enfin, pour un morphisme $f : A \longrightarrow B$ entre objets dans $Comm(C)$, on dispose d'une adjonction de Quillen

$$- \otimes_A B : A - Mod \longrightarrow B - Mod \qquad A - Mod \longleftarrow B - Mod : F,$$

où F est le foncteur d'oubli naturel. Nous utiliserons la notation usuelle

$$- \otimes^{\mathbb{L}}_A B : Ho(A - Mod) \longrightarrow Ho(B - Mod)$$

pour désigner le foncteur dérivé à gauche de $- \otimes_A B$. Il est démontré dans [Sp, Prop. 9.10] que lorsque A et B sont cofibrants et que $f : A \longrightarrow B$ est une équivalence alors l'adjonction de Quillen précédente est une équivalence de Quillen. Comme ceci ne semble plus vrai lorsque A et B ne sont plus tous deux cofibrants nous nous interdirons de considérer les catégories de modules sur des E_∞-monoïdes qui ne sont pas cofibrants dans $Comm(C)$.

Pour finir ces rappels, nous noterons Map_C, ou simplement Map si C est claire, les espaces de morphismes (*mapping spaces* en anglais) de la catégorie de modèles $Comm(C)$, et Map_A ceux de $A - Mod$. Rappelons que comme les catégories de modèles $Comm(C)$ et $A - Mod$ sont simpliciales, nous pourrons prendre comme modèles pour ces espaces de morphismes les ensembles simpliciaux de morphismes entre objets cofibrants et fibrants (voir [Ho]).

Définition 5.2 *La* catégorie de modèles des schémas affines sur C *est la catégorie*

$$Aff_C := Comm(C)^{op}$$

opposée de la catégorie de modèles des E_∞-monoïdes cofibrants.

On remarquera que lorsque la structure de modèle sur C est triviale (i.e. les équivalences sont les isomorphismes), et que l'on prend alors l'enrichissement simplicial trivial (i.e. pour K un ensemble simplicial et $X \in C$ on pose $K \otimes X := \coprod_{\pi_0(K)} X$), alors la catégorie $Comm(C)$ est naturellement équivalente à la catégorie des monoïdes commutatifs dans C. Ainsi, Aff_C définie ci-dessus coincide avec Aff_C précédemment défini dans 2.7 (strictement parlant il faut supposer que C soit une catégorie localement présentable pour que la structure de modèles triviale soit combinatoire et satisfasse donc l'hypothèse 5.1, et cela sera toujours le cas pour les exemples considérés).

5.1 Rappel sur la géométrie algébrique homotopique

Nous commencerons par définir des topologies fpqc et de Zariski sur Aff_C, on sens des topologies sur les catégories de modèles de [HAGI]. Il s'agit, bien entendu, d'une généralisation de la définition 2.9 que l'on retrouvera en prenant la structure de modèles triviale sur C.

Nous noterons comme auparavant $Spec\, A \in Aff_C$ l'objet correspondant à $A \in Comm(C)$. Noter que $Spec\, B \longrightarrow Spec\, A$ est une fibration dans Aff_C si et seulement si $A \longrightarrow B$ est une cofibration dans $Comm(C)$.

Définition 5.3 *Soit $f : Y = Spec\, B \longrightarrow X = Spec\, A$ un morphisme dans Aff_C.*

1. *Nous dirons que le morphisme f est* plat *si le foncteur correspondant*

$$- \otimes^{\mathbb{L}}_{Q(A)} Q(B) : Ho(Q(A) - Mod) \longrightarrow Ho(Q(B) - Mod)$$

commute aux produits fibrés homotopiques finis (ici $Q(A)$ et $Q(B)$ sont des modèles cofibrants dans $Comm(C)$ pour A et B).

2. *Le morphisme f est un* épimorphisme *si pour tout $A' \in Comm(C)$, le morphisme*

$$f^* : Map_{Comm(C)}(B, A') \longrightarrow Map_{Comm(C)}(A, A')$$

est équivalent à une inclusion de composantes connexes (i.e induit un morphisme injectif

$$\pi_0(Map(B, A')) \hookrightarrow \pi_0(Map(A, A')),$$

et pour tout $i > 0$ et tout $u \in \pi_0(Map(B, A'))$ des isomorphismes $\pi_i(Map(B, A'), u) \simeq \pi_i(Map(A, A'), f^*(u))$.).

3. *Le morphisme f est* de présentation finie, *si pour tout diagramme filtrant d'objets $A'_i \in Q(A)/Comm(C)$, le morphisme naturel*

$$Colim_i Map_{Q(A)/Comm(C)}(B, A'_i) \longrightarrow Map_{Q(A)/Comm(C)}(B, Hocolim_i A'_i)$$

est un isomorphisme dans $Ho(SEns)$ (ici $Q(A)$ est un modèle cofibrant de A dans $Comm(C)$).

4. *Le morphisme* $f : X = Spec\, B \longrightarrow Y = Spec\, A$ *dans* Aff_C *est* un ouvert de Zariski *(ou encore* une immersion Zariski ouverte*) si le morphisme correspondant* $A \longrightarrow B$ *dans* $Comm(C)$ *est un épimorphisme plat et de présentation finie.*

A l'aide des définitions précédentes nous définissons les recouvrements fpqc et Zariski de la façon suivante.

Définition 5.4 1. *Une famille de morphismes*

$$\{X_i = Spec\, A_i \longrightarrow X = Spec\, A\}_{i \in I}$$

dans Aff_C *est* un recouvrement fpqc *(ou plus simplement* recouvrement plat*) si les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

   (a) *Pour tout* $i \in I$ *le morphisme* $X_i \longrightarrow X$ *est plat.*

   (b) *Il existe un sous ensemble fini* $J \subset I$*, tel que le foncteur*

$$\prod_{j \in J} - \otimes_{Q(A)} Q(A_j) : Ho(Q(A) - Mod) \longrightarrow \prod_{j \in J} Ho(Q(A_j) - Mod)$$

   est conservatif.

2. *Une famille de morphismes*

$$\{X_i \longrightarrow X\}_{i \in I}$$

dans Aff_C *est* un recouvrement de Zariski *si c'est un recouvrement plat et si tous les morphismes* $X_i \longrightarrow X$ *sont des ouverts de Zariski.*

Il est facile de voir que les recouvrements fpqc et Zariski définissent deux prétopologies sur la catégorie de modèles Aff_C, au sens de [HAGI, §4.3] (cela demande d'utiliser la formule du changement de base [Sp, Prop. 9.12]). Les topologies de Grothendieck associées à ces prétopologies seront appelées la *topologie fpqc*, ou plus simplement la *topologie plate*, et la *topologie de Zariski*. Comme il est démontré dans [HAGI] il s'agit de données de deux topologies de Grothendieck, au sens usuel, sur la catégorie $Ho(Aff_C)$.

Comme il est expliqué dans [HAGI, §4.3], la catégorie de modèles Aff_C munie de la topologie fpqc (resp. Zariski) forme un *site de modèles*, et on peut donc considérer la catégorie de modèles $Aff_C^{\sim,fpqc}$ (resp. $Aff_C^{\sim,Zar}$) des champs sur Aff_C. Rappelons que $Aff_C^{\sim,fpqc}$ (resp. $Aff_C^{\sim,Zar}$) est une localisation de Bousfield à gauche de la catégorie de modèles des préfaisceaux simpliciaux sur Aff_C dont les objets locaux sont les foncteurs

$$F : Aff_C^{op} = Comm(C) \longrightarrow SEns$$

vérifiant les deux conditions suivantes.

1. Pour toute équivalence $X \longrightarrow Y$ dans Aff_C, le morphisme induit

$$F(Y) \longrightarrow F(X)$$

   est un équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

2. Pour tout hyper-recouvrement plat (resp. de Zariski) $X_* \longrightarrow X$ (voir [HAGI, §4.4]), le morphisme naturel

$$F(X) \simeq Map(X, F) \longrightarrow Holim_{[n]\in\Delta} Map(X_n, F)$$

est un équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

Définition 5.5 *La* catégorie des champs au-dessus de C *pour la topologie plate (resp. de Zariski) est la catégorie homotopique* $Ho(Aff_C^{\sim,fpqc})$ *(resp.* $Ho(Aff_C^{\sim,Zar})$*). Comme précédemment nous adopterons les notations*

$$Ch^{fpqc}(Aff_C) := Ho(Aff_C^{\sim,fpqc}) \qquad Ch(Aff_C) := Ho(Aff_C^{\sim,Zar}).$$

Les objets de $Ch(Aff_C)$ *seront simplement appelés des* champs au-dessus de C *(ou simplement des* champs *si le contexte est clair).*

Comme pour le cas non homotopique présenté précédemment nous nous intéresserons principalement aux champs pour la topologie de Zariski et les champs fpqc ne seront utilisés que de manière auxiliaire.

Il faut noter que lorsque la structure de modèles est triviale sur C alors $Aff_C^{\sim,fpqc}$ est la catégorie de modèles des préfaisceaux simpliciaux au sens de [Ja] (ou plus précisément sa version projective décrite dans [Bl]). Ainsi, la catégorie $Ch(Aff_C)$ est la catégorie homotopique des préfaisceaux simpliciaux sur le site Aff_C, qui s'identifie aussi à la catégorie homotopique des objets simpliciaux dans le topos $Sh(Aff_C)$ des faisceaux sur Aff_C. La catégorie $Sh(Aff_C)$ s'identifie alors à la sous-catégorie pleine de $Ch(Aff_C)$ des préfaisceaux simpliciaux discrets (i.e. dont les valeurs sont des ensembles vus comme ensembles simpliciaux constants). Ceci nous permettra par la suite de voir les faisceaux sur Aff_C comme des champs sur Aff_C, et d'identifier la catégorie $Sh(Aff_C)$ à son image dans $Ch(Aff_C)$.

Venons-en maintenant à la définition de schémas relatifs à C. Pour cela nous aurons besoin de la généralisation suivante de la définition 2.12. Rappelons que l'on peut définir une notion de *h-monomorphisme* dans $Ch(Aff_C)$, qui sont les morphismes de champs $F \longrightarrow G$ tel que le morphisme diagonal $F \longrightarrow F \times^h_G F$ soit un isomorphisme dans $Ch(Aff_C)$. Il s'agit d'une généralisation de nature homotopique de la notion usuelle de monomorphisme. Les h-monomorphismes dans $Ch(Aff_C)$ sont aussi les morphismes qui induisent un monomorphisme sur les faisceaux π_0 et des isomorphismes sur tous les faisceaux π_i pour $i > 0$ (voir [HAGI] pour la définition des faisceaux d'homotopie). Cette notion de h-monomorphisme permet aussi de donner un sens à la notion de sous-objets d'un objet F de $Ch(Aff_C)$, appelés *sous-champs*, comme classe d'isomorphisme de h-monomorphismes de but F.

Définition 5.6 1. *Soit X un schéma affine et $F \subset X$ un sous-champ de X. Nous dirons que F est un* ouvert de Zariski de X *s'il existe une famille d'ouverts de Zariski* $\{X_i \longrightarrow X\}_{i\in I}$ *dans* Aff_C *(au sens de la définition 5.3) tel que F soit l'image du morphisme de champs*

$$\coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow X.$$

2. *Un morphisme $f : F \longrightarrow G$ dans $Ch(Aff_C)$ est un* ouvert de Zariski *(ou encore une* immersion Zariski ouverte*) si pour tout schéma affine X et tout morphisme $X \longrightarrow G$, le morphisme induit*
$$F \times_G X \longrightarrow X$$
est un h-monomorphisme d'image un ouvert de Zariski de X.

On vérifie sans peine que les ouverts de Zariski se comportent comme on s'y attend (stabilité par équivalences, compositions et produits fibrés homotopiques dans Aff_C.)

Comme il est expliqué dans [HAGI, §4.2] on dispose d'un plongement de Yoneda
$$\mathbb{R}\underline{h}_{-} : Ho(Aff_C) \longrightarrow Ho(Aff_C^{\wedge}),$$
qui permet d'identifier la catégorie $Ho(Aff_C)$ à une sous-catégorie pleine de la catégorie homotopique des pré-champs $Ho(Aff_C^{\wedge})$. Malheureusement, nous ne savons pas montrer que la topologie plate est sous-canonique en général, et ainsi nous ne savons pas si l'analogue du corollaire 2.11 reste valable (en réalité nous n'avons pas trouvé de version homotopique raisonable du théorème 2.5). En particulier nous ne pouvons pas déduire que le plongement de Yoneda ci-dessus se factorise par la sous-catégorie pleine $Ch(Aff_C) \subset Ho(Aff_C^{\wedge})$. Nous sommes donc obligés de rajouter l'hypothèse suivante.

Hypothèse 5.7 *La topologie plate sur Aff_C est sous-canonique. En d'autres termes, pour tout $X \in Aff_C$ le pré-champ $\mathbb{R}\underline{h}_X$ est un champ.*

L'hypothèse précédente implique que le plongement de Yoneda induit un foncteur pleinement fidèle
$$\mathbb{R}\underline{h}_{-} : Ho(Aff_C) \longrightarrow Ch(C).$$
Ceci permet d'identifier la catégorie homotopique $Ho(Aff_C)$ comme une sous-catégorie pleine de $Ch(Aff_C)$. Les objets dans l'image de $\mathbb{R}\underline{h}_{-}$ seront simplement appelés des *schémas affines au-dessus de C* (ou simplement *schémas affines* si C est claire).

Enfin, comme $Aff_C^{\sim,fpqc}$ est une catégorie de modèles on peut parler de limites et colimites homotopiques, et en particulier de produits fibrés homotopiques. Ces derniers seront notés $- \times^h_{-} -$. Remarquer que le produit direct dans $Aff_C^{\sim,Zar}$ ne préserve pas les équivalences en général, et donc que l'on a aussi une notion de produit homotopique noté $- \times^h -$. Il s'agit bien entendu du produit direct dans la catégorie $Ch(Aff_C)$.

On définit alors la notion de schéma relatif dans Aff_C de la façon suivante.

Définition 5.8 *Un champ F est un* schéma relatif à C *(ou simplement* schéma *si le contexte est clair) existe une famille de schémas affines $\{X_i\}_i$ et un épimorphisme*
$$\coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow F$$
tel que chaque morphisme $X_i \longrightarrow F$ soit un ouvert Zariski.

Définition 5.9 *La* catégorie des schémas relatifs à C *est la sous-catégorie pleine de $Ch(Aff_C)$ formée des schémas au sens de la définition 5.8. Nous la noterons $Sch(C)$.*

Tout comme pour le cas non homotopique on montre les propriétés de stabilité suivantes.

Proposition 5.10 *La sous-catégorie $Sch(C)$ de $Ch(Aff_C)$ est stable par réunions disjointes et par produits fibrés homotopiques.*

Preuve: C'est la même que pour la proposition 2.18. $\square$

On montre de même la proposition suivante, analogue homotopique de la proposition 2.18 (2). Pour cela on renvoit à [HAGI, HAGII] pour la notion de groupoides de Segal dans une catégorie de modèles, qui est un analogue homotopique de la notion usuelle de relation d'équivalence.

Proposition 5.11 *Un champ F est un schéma si et seulement s'il existe un groupoide de Segal X_* dans $Aff_C^{\sim,Zar}$ vérifiant les conditions suivantes.*

1. *On a*
$$X_0 \simeq \coprod_{i \in I} U_i$$
avec U_i des schémas affines.

2. *Pour tout $(i,j) \in I^2$, considérons le sous-champ $R_{i,j} \subset U_i \times^h U_j$ défini par la carré homotopiquement cartésien suivant*
$$\begin{array}{ccc} R_{i,j} & \longrightarrow & U_i \times^h U_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \longrightarrow & X_0 \times^h X_0. \end{array}$$
Alors chacun des morphismes
$$R_{i,j} \longrightarrow U_i$$
est un ouvert Zariski.

3. *Pour tout $i \in I$ le morphisme $R_{i,i} \longrightarrow U_i$ est un isomorphisme.*

4. *On a*
$$F \simeq |X_*| = Hocolim_{n \in \Delta^{op}} X_n.$$

Tout comme dans le cas que nous avons traité précédemment, on peut pour tout schéma X sur C au sens ci-dessus, définir un site de Grothendieck $Zar(X)$ des ouverts de Zariski de X. Ce site possède des produits fibrés, il est engendré par une prétopologie quasi-compacte, et sa catégorie sous-jacente est un lieu. On en déduit donc que le topos des champs $Ch(Zar(X))$ est équivalent aux champs sur un espace topologique bien défini $|X|$. L'espace topologique $|X|$ est appelé comme il se doit *l'espace sous-jacent à X*. Par construction, le site $Ouv(X)$ des ouverts de X est équivalent au site $Zar(X)$.

Sans entrer dans les détails signalons aussi que l'on peut construire un préfaisceau $\mathcal{O}_X$ sur $|X|$ à valeurs dans $Comm(C)$. Notre hypothèse 5.7 implique que ce préfaisceau est un champ, au sens où il satisfait à une condition de descente pour les hyper-recouvrements. Ainsi, le couple $(|X|, \mathcal{O}_X)$ joue le rôle de l'espace annelé sous-jacent au schéma X, en un sens relatif à C. Nous n'irons pas plus loin dans cette direction.

Pour terminer, signalons l'existence de foncteurs de changements de bases généralisant ceux du paragraphe §2.3. On se donne une adjonction de Quillen

$$f : (C, \otimes, \mathbf{1}) \longrightarrow (D, \otimes, \mathbf{1}) \qquad (C, \otimes, \mathbf{1}) \longleftarrow (D, \otimes, \mathbf{1}) : g$$

avec f de Quillen à gauche et symétrique monoïdal. On en déduit une adjonction de Quillen sur les catégorie de E_∞-monoïdes

$$f : Comm(C) \longrightarrow Comm(D) \qquad Comm(C) \longleftarrow Comm(D) : g.$$

Comme il est expliqué dans [HAGI, §4.8] cette adjonction de Quillen induit une adjonction sur les catégorie de pré-champs

$$\mathbb{L}f_! : Ho(Aff_C^\wedge) \longrightarrow Ho(Aff_D^\wedge) \qquad Ho(Aff_C^\wedge) \longleftarrow Ho(Aff_D^\wedge) : \mathbb{R}f^*.$$

Lorsque le foncteur f est continu (i.e. $\mathbb{R}f^*$ préserve les sous-catégorie de champs) alors on obtient une adjonction sur les catégories de champs

$$\mathbb{L}f_!^\sim : Ch(C) \longrightarrow Ch(D) \qquad Ch(C) \longleftarrow Ch(D) : \mathbb{R}f^*.$$

Enfin, pour $A \in Comm(C)$ cofibrant, on dispose d'une adjonction de Quillen

$$f : A - Mod \longrightarrow f(A) - Mod \qquad A - Mod \longleftarrow f(A) - Mod : g.$$

Cette dernière adjonction est de plus compatible aux changements de bases (voir [Sp] pour les détails).

On dispose alors de l'énoncé analogue au corollaire 2.22.

Proposition 5.12 *On suppose que le foncteur dérivé*

$$\mathbb{R}g : Ho(D) \longrightarrow Ho(C)$$

est conservatif et qu'il commute aux colimites homotopiques filtrantes. On suppose de plus que pour tout morphisme plat $A \longrightarrow B$ dans $Comm(C)$, et tout $N \in f(A) - Mod$, le morphisme naturel

$$\mathbb{R}g(N) \otimes^{\mathbb{L}}_A B \longrightarrow \mathbb{R}g(N \otimes^{\mathbb{L}}_{f(A)} f(B))$$

est un isomorphisme dans $Ho(B - Mod)$. Alors, le foncteur $f : Aff_C \longrightarrow Aff_D$ est continu pour la topologie de Zariski, et le foncteur induit sur les catégories de champs

$$\mathbb{L}f_!^\sim : Ch(Aff_C) \longrightarrow Ch(Aff_D)$$

préserve les sous-catégories des schémas et induit un foncteur

$$\begin{array}{ccc} Sch(C) & \longrightarrow & Sch(D) \\ X & \mapsto & X \times_C D := f_!^\sim(X). \end{array}$$

Preuve: C'est essentiellement la même que pour le corollaire 2.22. $\square$

5.2 $Spec\,\mathbb{S}$: La nouvelle géométrie algébrique courageuse

Dans ce paragraphe nous posons $(C, \otimes, \mathbf{1}) = (\mathcal{GS}, \wedge, \mathbb{S})$, la catégorie de modèles monoïdales des Γ-espaces telle que présentée dans [S]. Rappelons que le catégorie sous-jacente à $\mathcal{GS}$ est la catégorie des foncteurs

$$F : \Gamma \longrightarrow SEns,$$

où Γ est la catégorie des ensembles finis pointés, vérifiant $F(*) = *$. Nous noterons n^+ l'ensemble $\{0, \dots, n\}$ pointés en 0. La structure de modèles sur $\mathcal{GS}$ est une localisation de la structure de modèles niveaux par niveaux (où fibrations et équivalences sont définies termes à termes), et dont les objets locaux sont les Γ-espaces *très spéciaux*, c'est à dire qui vérifient les deux conditions suivantes

1. Pour I et J deux ensembles finis pointés, le morphisme naturel

   $$F(I \vee J) \longrightarrow F(I) \times F(J)$$

   est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux (ici $I \vee J$ désigne le coproduit de I et J dans Γ).

2. D'après la condition ci-dessus, le digramme dans $Ho(SEns)$

   $$F(1^+) \times F(1^+) \qquad F(2^+) \longrightarrow F(1^+)$$

   définit une structure de monoïde sur $F(1^+)$ dans la catégorie $Ho(SEns)$. On demande alors que le monoïde $\pi_0(F(1^+))$ soit une loi de groupes.

La catégorie Γ possède une structure monoïdale symétrique induite par le produits directs d'ensembles pointés. Par convolution ceci définit une structure monoïdale symétrique sur la catégorie $\mathcal{GS}$, notée $- \wedge -$. L'objet neutre pour cette structure monoïdale est le Γ-espace en sphère $\mathbb{S}$ coreprésenté par $1^+ \in \Gamma$ et donné par

$$\mathbb{S}(n^+) = Hom_\Gamma(1^+, n^+) = \{0, \dots, n\}.$$

On montre que $(\mathcal{GS}, \wedge, \mathbb{S})$ est une catégorie de modèles monoïdale symétrique qui vérifie les conditions 5.1 (voir [S, M-M-S-S]).

De façon générale il faut penser aux Γ-espaces trés spéciaux comme à des groupes simpliciaux commutatifs à homotopie de cohérences près. La structure monoïdale $\wedge$ est alors l'analogue du produit tensoriel de groupes abéliens. Ceci se justifie en montrant que la catégorie monoïdal symétrique $(Ho(\mathcal{GS}), \wedge^{\mathbb{L}})$ est naturellement équivalente à la catégorie homotopique des spectres symétriques connectifs (i.e. sans homotopie négative) munie du smash produit. On montre même que les théories homotopiques de monoïdes, E_∞-monoïdes et de modules associées sont équivalentes (voir [M-M-S-S] pour plus de détails). En conclusion, la théorie homotopique des Γ-espaces très spéciaux est équivalente à celle des spectres connectifs, et ce de façon compatible avec les constructions tensorielles. Ainsi, la catégorie de modèles $Comm(\mathcal{GS})$ est un modèle pour la théorie homotopique des *nouveaux anneaux commutatifs courageux* (traduction, simpliste mais amusante, de *brave new commutative rings*), d'où notre terminologie de *nouvelle géométrie algébrique courageuse*.

Pour un objet $X \in \mathcal{GS}$ on définit ses groupes d'homotopie stables par la formule

$$\pi_i(X) := \pi_i(RX(1^+)),$$

où RX est un modèle fibrant de X dans $\mathcal{GS}$, et $RX(1^+)$ est son ensemble simplicial sous-jacent. Pour tout $i \geq 0$, $\pi_i(X)$ est toujours un groupe abélien.

Pour un objet $A \in Comm(\mathcal{GS})$, les groupes d'homotopie $\pi_i(A)$ forment un anneau commutatif gradué que l'on notera $\pi_*(A)$. De même, pour A cofibrant dans $A \in Comm(\mathcal{GS})$ et $M \in A - Mod$, $\pi_*(M)$ est naturellement un $\pi_*(A)$-module gradué.

Lemme 5.13 *La catégorie de modèles monoïdale symétrique* $(\mathcal{GS}, \wedge, \mathbb{S})$ *vérifie l'hypothèse 5.7.*

Preuve: C'est essentiellement la même que pour le cas des anneaux simpliciaux commutatifs et des anneaux en spectres qui sont traités dans [HAGII, §2.2, §2.4] (on pourrait aussi utiliser essentiellement la même preuve que celle de la proposition 5.16). En deux mots, on commence par vérifier qu'un morphisme $A \longrightarrow B$ dans $Comm(\mathcal{CS})$ est est plat si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes

1. Le morphisme induit $\pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(B)$ est un morphisme plat d'anneaux commutatifs.

2. Pour tout $i > 0$, le morphisme naturel

$$\pi_i(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B) \longrightarrow \pi_i(B)$$

   est un isomorphisme.

Ensuite, si $A \longrightarrow B_*$ est un hyper-recouvrement plat, le morphisme induit $\pi_*(A) \longrightarrow \pi_*(B)_*$ est un hyper-recouvrement plat d'anneaux commutatifs gradués. Un argument de suite spectrale et la descente plate usuelle des anneaux implique alors que le morphisme

$$A \longrightarrow Holim_{[n]\in\Delta^{op}} B_n$$

est une équivalence dans $Comm(\mathcal{GS})$. $\square$

Le lemme 5.13 et les considérations générales du paragraphe précédent nous donne une notion de schémas relatifs au-dessus de $\mathcal{GS}$, dont la catégorie sera notée $\mathbb{S} - Sch$.

Définition 5.14 *La catégorie des schémas relatifs à* $\mathcal{GS}$ *sera notée* $\mathbb{S} - Sch$. *Ses objets seront appelés des* $\mathbb{S}$-schémas, *ou si l'on veut rire des* nouveaux schémas courageux.

Noter que $Ho(Comm(\mathcal{GS}))$, qui est équivalente à la catégorie des $\mathbb{S}$-schémas affines, est naturellement équivalente à la catégorie des $\mathbb{S}$-algèbres commutatives connectives de [EKMM]. Ceci justifie notre terminologie de $\mathbb{S}$-schémas, ou encore de nouveaux schémas courageux.

Il existe une adjonction de Quillen

$$\pi_0 : \mathcal{GS} \longrightarrow \mathbb{Z} - Mod \qquad \mathcal{GS} \longleftarrow \mathbb{Z} - Mod : j,$$

qui est telle que π_0 soit de plus un foncteur monoïdal symétrique. On voit facilement (par exemple à l'aide de la description des morphismes plats donnée lors de la preuve du lemme 5.13) que le foncteur induit

$$\pi_0 : Comm(C) \longrightarrow Comm(\mathbb{Z} - Mod)$$

est continu pour la topologie Zariski et que j est conservatif (il est même pleinement fidèle) et commute avec les colimites filtrantes. La proposition 5.12 nous donne alors un foncteur de changement de bases

$$- \otimes_{\mathbb{S}} \mathbb{Z} : \mathbb{S} - Sch \longrightarrow \mathbb{Z} - Sch$$

des $\mathbb{S}$-schémas vers les $\mathbb{Z}$-schémas. Ce foncteur possède en réalité un adjoint à droite

$$i : \mathbb{Z} - Sch \longrightarrow \mathbb{S} - Sch$$

qui est pleinement fidèle, et la situation est donc très proche de celle du changement de bases de $Spec\,\mathbb{Z} \longrightarrow Spec\,\mathbb{N}$. Le morphisme naturel $Spec\,\mathbb{Z} \longrightarrow Spec\,\mathbb{S}$ doit aussi être pensé comme un monomorphisme, et même comme une immersion fermée.

Nous définissons un $\mathbb{S}$-schéma $Gl_{n,\mathbb{S}}$ de la façon suivante. Pour $A \in Comm(\mathcal{GS})$ on considère QA un remplacement cofibrant de A, ainsi que $QA^n \in QA - Mod$ le QA-module libre de rang n sur QA. L'objet $QA^n \in QA - Mod$ est caratérisé par le fait qu'un morphisme de QA-modules $QA^n \longrightarrow M$ est la même chose qu'un morphisme d'ensemble simpliciaux $E_n \longrightarrow M(1^+)$, où E_n est l'ensemble fini à n éléments vu comme un ensemble simplicial discret, et $M(1^+)$ est l'ensemble simplicial sous-jacent à l'objet $M \in \mathcal{GS}$. On définit alors un préfaisceau simplicial

$$\begin{array}{cccc} Gl_{n,\mathbb{S}} : & Comm(\mathcal{GS}) & \longrightarrow & SEns \\ & A & \mapsto & Aut_{QA-Mod}(QA^n), \end{array}$$

où $Aut_{QA-Mod}(QA^n)$ est le sous-ensemble simplicial de $Map_{QA-Mod}(QA^n, QA^n)$ consistant en les morphismes qui sont des équivalences (nous laissons le soin au lecteur de rendre cette construction rigoureusement fonctorielle, voir aussi [HAGII, §1.3.7] pour plus de détails). On voit que ce préfaisceau est un champ et on le considère alors comme un objet dans $Ch(Aff_{\mathcal{GS}})$.

Proposition 5.15 *1. Le champ $Gl_{n,\mathbb{S}}$ est représentable par un $\mathbb{S}$-schéma affine.*

2. On a un isomorphisme

$$Gl_{n,\mathbb{S}} \otimes_{\mathbb{S}} \mathbb{Z} \longrightarrow Gl_{n,\mathbb{Z}}.$$

Preuve: (1) C'est essentiellement la même que pour la proposition 4.1 (1).

(2) Il suffit de constater que pour tout $A \in Comm(\mathbb{Z} - Mod)$, le foncteur de Quillen à droite

$$i : A - Mod \longrightarrow i(A) - Mod$$

induit un foncteur pleinement fidèle

$$\mathbb{R}i : Ho(A - Mod) \longrightarrow Ho(i(A) - Mod).$$

$\square$

On remarque qu'il n'est pas vrai que $i(Gl_{n,\mathbb{Z}})$ soit isomorphe à $Gl_{n,\mathbb{S}}$, où $i : \mathbb{Z}-Sch \longrightarrow \mathbb{S}-Sch$ est le foncteur d'inclusion. En effet, $Gl_{n,\mathbb{S}}(\mathbb{S})$ est un $\mathbb{S}$-schéma affine de la forme $Spec\, A$ pour un certain $A \in Comm(\mathcal{GS})$, qui vérifie que pour tout $B \in Comm(\mathcal{GS})$ il existe un isomorphisme naturel

$$\pi_0(Map_{Comm(\mathcal{GS})}(A,B)) \simeq Gl_n(\pi_0(B)).$$

On peut voir que l'anneau $\mathbb{Z}[T_{ij}, Det(T_{ij})^{-1}]$, vu comme objet de $Comm(\mathcal{GS})$ ne vérifie pas cette propriété universelle, car par exemple il n'existe pas de morphisme $\mathbb{Z}[T_{ij}, Det(T_{ij})^{-1}] \longrightarrow \mathbb{S}$ dans $Ho(Comm(\mathcal{GS}))$ (si l'on compose avec $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[T_{ij}, Det(T_{ij})^{-1}]$ on trouverait une section de la projection $\mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{Z} = \pi_0(\mathbb{S})$ que l'on sait ne pas exister).

5.3 L'anneaux en spectres à un élément $\mathbb{S}_1$

Dans ce paragraphe nous posons $(C, \otimes, \mathbf{1}) = (SEns, \times, *)$ la catégorie de modèles monoïdale symétrique des ensembles simpliciaux munis du produit direct. Elle vérifie évidemment les hypothèses de 5.1.

Proposition 5.16 *La catégorie de modèles monoïdale symétrique $(SEns, \times, *)$ vérifie l'hypothèse 5.7.*

Preuve: Soit $F_* \longrightarrow X = Spec\, A$ un hyper-recouvrement plat et pseudo-représentable dans $Aff_C^{\sim,fpqc}$, au sens de [HAGI, §4.4]. Par définition on peut écrire $F_n = \coprod_\alpha Spec\, B_{n,\alpha}$, avec tous les morphismes $A \longrightarrow B_{n,\alpha}$ plats. Posons $B_n := \prod_\alpha B_{n,\alpha}$ pour tout n. Il nous faut montrer que le morphisme naturel

$$A \longrightarrow Holim_{[n]\in\Delta} B_n$$

est un isomorphisme dans $Ho(Comm(SEns))$.

Pour démontrer cela nous allons utiliser les foncteurs de troncations $B \mapsto B_{\leq k}$ de $Comm(SEns)$ dans elle-même. Rappelons qu'un objet $B \in Comm(SEns)$ est k-tronqué si pour tout point $x \in \pi_0(B)$ on a $\pi_i(B,x) = 0$ pour $i > k$ (i.e. l'ensemble simplicial sous-jacent à B est k-tronqué). On montre facilement (par exemple à l'aide des techniques de localisation de catégories de modèles) que le foncteur d'inclusion des objets k-tronqués

$$Ho(Comm(SEns)_{\leq k}) \longrightarrow Ho(Comm(SEns))$$

posséde un adjoint à gauche

$$(-)_{\leq k} : Ho(Comm(SEns)) \longrightarrow Ho(Comm(SEns)_{\leq k}).$$

On peut même réaliser cette adjonction comme l'adjonction dérivée d'une adjonction de Quillen

$$Comm(SEns) \longrightarrow Comm(SEns)_{\leq k} \qquad Comm(SEns) \longleftarrow Comm(SEns)_{\leq k},$$

où la catégorie sous-jacente $Comm(SEns)_{\leq k}$ est la même que celle de $Comm(SEns)$, mais ses équivalences sont les k-équivalences (i.e. les morphismes induisant des isomorphismes sur les groupes d'homotopie π_i pour $i \leq k$).

On commence alors par remarquer le lemme suivant.

Lemme 5.17 *Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme plat dans $Comm(SEns)$, alors pour tout entier $k \geq 0$ le morphisme induit*

$$A_{\leq k} \longrightarrow B_{\leq k}$$

est un morphisme plat dans $Comm(SEns)$.

Preuve du lemme: Tout d'abord, par platitude on voit facilement que le foncteur de changement de bases

$$- \times_A^{\mathbb{L}} B : Ho(A - Mod) \longrightarrow Ho(B - Mod)$$

préserve les objets k-tronqués. Ainsi, si l'on forme le carré homotopiquement cocartésien dans $Ho(Comm(SEns))$ suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_{\leq k} \arrow[r] & B', \end{tikzcd}$$

on voit que B' est k-tronqué. Ceci implique facilement que le morphisme naturel $B_{\leq k} \longrightarrow B'$ est un équivalence, et donc que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_{\leq k} \arrow[r] & B_{\leq k} \end{tikzcd}$$

est homotopiquement cocartésien. En particulier on voit que $A_{\leq k} \longrightarrow B_{\leq k}$ est un morphisme plat. $\Box$

Pour tout objet $B \in Comm(SEns)$, on dispose d'un isomorphisme naturel dans $Ho(Comm(SEns))$ $B \simeq Holim_k B_{\leq k}$. Ainsi, le lemme 5.17 permet de tronquer termes à termes l'hyper-recouvrement $F_* \longrightarrow X$, et donc de se ramener au cas où il existe un entier k tel que A soit k-tronqué, ainsi que tous les $B_{n,\alpha}$, et donc tous les B_n.

Dans ce cas, la limite homotopique $Holim_{[n]\in\Delta} B_n$ se réduit en une limite homotopique finie, ce qui implique que l'on peut supposer que l'hyper-recouvrement F_* est m-borné pour un certain entier m (au sens de [HAGI]), c'est à dire équivalent à son m-ème co-squelette. Un argument standard permet alors de se ramener au cas où l'hyper-recouvrement est 0-borné, c'est à dire où il s'agit du nerf d'un recouvrement plat

$$\{X_i = Spec\, B_{0,i} \longrightarrow X\}$$

(voir la preuve du théorème [HAGI, Lem. 3.4.2]).

Pour montrer que $A \longrightarrow Holim_{[n]\in\Delta} B_n$ est alors un isomorphisme dans $Ho(Comm(SEns))$, on utilise le fait que $\{X_i \longrightarrow X\}$ soit un recouvrement plat, et donc le fait qu'il suffise de montrer que pour tout i, le morphisme induit par le changement de bases $- \times_A^{\mathbb{L}} B_{0,i}$

$$B_{0,i} \longrightarrow Holim_{[n]\in\Delta} B_n \times_A^{\mathbb{L}} B_{0,i}$$

est un isomorphisme dans $Ho(Comm(SEns))$ (noter que la limite homotopique est finie et donc qu'elle commute au changement de bases par platitude). On se ramène ainsi au cas où le recouvrement plat $\{X_i \longrightarrow X\}$ possède une section $X \longrightarrow X_{i_0}$. Mais dans ce cas l'hyper-recouvrement $F_* \longrightarrow X$ est le nerf d'un morphisme qui possède une section, et donc induit une équivalence de préfaisceaux simpliciaux

$$Hocolim_{[n]\in\Delta}F_n \longrightarrow X$$

est une équivalence dans la catégorie de modèles des pré-champs $Aff_C^{\wedge}$. Ceci implique que pour tout $Y \in Aff_C$, on a

$$Map_{Aff_C^{\wedge}}(X,Y) \simeq Holim_{[n]\in\Delta}Map_{Aff_C^{\wedge}}(F_n,Y),$$

ce que l'on voit, par le lemme de Yoneda, être équivalent au fait que le morphisme

$$A \longrightarrow Holim_{[n]\in\Delta}B_n$$

soit un isomorphisme dans $Ho(Comm(SEns))$. $\square$

La formalisme décrit au paragraphe §5.1 nous donne alors une notion de schéma au-dessus de $SEns$.

Définition 5.18 *La catégorie des schémas relatifs à $SEns$ sera notée $\mathbb{S}_1 - Sch$. Ses objets seront appelés des $\mathbb{S}_1$-*schémas*.*

Le foncteur

$$\pi_0 : SEns \longrightarrow Ens$$

est de Quillen à gauche et monoïdal. Il satisfait aux conditions de la proposition 5.12, et donc induit un foncteur de changements de bases

$$-\otimes_{\mathbb{S}_1}\mathbb{F}_1 : \mathbb{S}_1 - Sch \longrightarrow \mathbb{F}_1 - Sch.$$

On remarque que ce foncteur possède un adjoint à gauche pleinement fidèle

$$i : \mathbb{F}_1 - Sch \longrightarrow \mathbb{S}_1 - Sch.$$

On considère aussi le foncteur de Quillen à droite

$$\mathcal{GS} \longrightarrow SEns$$

qui envoit un objet $F \in \mathcal{GS}$ sur son ensemble simplicial sous-jacent $F(1^+) \in SEns$ (voir le paragraphe précédent pour les notations). Ce foncteur possède un adjoint à gauche

$$SEns \longrightarrow \mathcal{GS}$$

qui vérifie les conditions de la proposition 5.12. Ainsi, il définit un foncteur de changement de bases

$$-\otimes_{\mathbb{S}_1}\mathbb{S} : \mathbb{S}_1 - Sch \longrightarrow \mathbb{S} - Sch.$$

On remarquera que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}_1 - Sch \arrow[r, "-\otimes_{\mathbb{S}_1}\mathbb{S}"] \arrow[d, "-\otimes_{\mathbb{S}_1}\mathbb{F}_1"'] & \mathbb{S} - Sch \arrow[d, "-\otimes_{\mathbb{S}}\mathbb{Z}"] \\
\mathbb{F}_1 - Sch \arrow[r, "-\otimes_{\mathbb{F}_1}\mathbb{Z}"] & \mathbb{Z} - Sch
\end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme naturel près. Ceci permet en quelque sorte de comparer les $\mathbb{F}_1$-schémas et les $\mathbb{S}$-schémas. Comme les $\mathbb{F}_1$-schémas peuvent être naturellement considérés comme des $\mathbb{S}_1$-schémas, ceci donne un foncteur de changement de bases des $\mathbb{F}_1$-schémas vers les $\mathbb{S}$-schémas

$$i(-) \otimes_{\mathbb{S}_1} \mathbb{S} : \mathbb{F}_1 - Sch \longrightarrow \mathbb{S} - Sch.$$

Par exemple, les variétés toriques $X_{\mathbb{F}_1}(\Delta)$ définie en §4.2 donnent lieux à des $\mathbb{S}$-schémas

$$X_{\mathbb{S}}(\Delta) := i(X_{\mathbb{F}_1}(\Delta)) \otimes_{\mathbb{S}_1} \mathbb{S}.$$

Bien entendu, on a

$$X_{\mathbb{S}}(\Delta) \otimes_{\mathbb{S}} \mathbb{Z} \simeq X_{\mathbb{Z}}(\Delta),$$

ce qui donne des variétés toriques définies sur $\mathbb{S}$.

Prenons par exemple Δ l'éventail ne contenant qu'un unique cone $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$. Dans ce cas, $X_{\mathbb{S}}(\Delta)$ est $\mathbb{S}[\mathbb{N}]$ la $\mathbb{S}$-algèbre en groupes sur le monoïde $\mathbb{N}$. Elle n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}[\mathbb{N}]$, et ainsi les deux $\mathbb{S}$-schémas $i(X_{\mathbb{Z}}(\Delta))$ et $X_{\mathbb{S}}(\Delta)$ ne sont pas isomorphes. En règle générale $X_{\mathbb{S}}(\Delta)$ est une extension non triviale de $X_{\mathbb{Z}}(\Delta)$ sur $\mathbb{S}$.

5.4 Le semi-anneau en spectres des entiers positifs $\mathbb{S}_+$

Dans ce paragraphe nous posons $(C, \otimes, \mathbf{1}) = (\mathcal{MS}, \wedge, \mathbb{S}_+)$, la catégorie de modèles monoïdale symétrique des Γ-espaces spéciaux (et non très spéciaux comme dans §5.2) que nous allons maintenant décrire.

La catégorie $\mathcal{MS}$ est la catégorie $\mathcal{GS}$ des foncteurs $F : \Gamma \longrightarrow SEns$ vérifiant $F(*) = *$. La structure de modèles sur $\mathcal{MS}$ est une localisation de la structure de modèles niveaux par niveaux (fibrations et équivalences définies niveaux par niveaux) telle que ses objets locaux soient les foncteurs $F : \Gamma \longrightarrow SEns$ tels que pour tout I et J dans Γ le morphisme naturel

$$F(I \vee J) \longrightarrow F(I) \times F(J)$$

soit une équivalence faible d'ensembles simpliciaux. Il s'agit donc des Γ-espaces spéciaux et non très spéciaux. La catégorie de modèles $\mathcal{GS}$ est bien entendu une localisation de Bousfield à gauche de $\mathcal{MS}$. Tout comme pour $\mathcal{GS}$ le smash produit fait de $\mathcal{MS}$ une catégorie de modèles monoïdale symétrique qui vérifie les conditions 5.1. Pour des raisons qui deviendrons claires nous noterons $\mathbb{S}_+$ l'unité de la structure monoïdale $\wedge$ sur $\mathcal{MS}$.

Enfin, comme pour le cas de $\mathcal{MS}$ nous noterons pour $X \in \mathcal{MS}$

$$\pi_i(X) := \pi_i(RX(1^+), e),$$

où RX est un modèle fibrant de X, et $e \in RX(1^+)$ est le point de base naturel. Plus généralement, pour $x \in RX(1^+)$ on pose

$$\pi_0(X) := \pi_0(RX(1^+)) \qquad \pi_i(X,x) := \pi_i(RX(1^+),x).$$

Proposition 5.19 *La catégorie de modèles monoïdale symétrique* $(\mathcal{MS}, \wedge, \mathbb{S}_+)$ *vérifie l'hypothèse 5.7.*

Preuve: C'est essentiellement la même que pour la proposition 5.16. $\square$

Par le formalisme général de §5.1 nous obtenons ainsi une notion de schéma relatif à $(\mathcal{MS}, \wedge, \mathbb{S}_+)$.

Définition 5.20 *La catégorie des schémas relatifs à* $\mathcal{MS}$ *sera notée* $\mathbb{S}_+ - Sch$. *Ses objets seront appelés des* $\mathbb{S}_+$-schémas.

Les objets de $Comm(\mathcal{MS})$ peuvent être considérés comme des *semi-anneaux en spectres*. L'objet unité $\mathbb{S}_+$ doit alors être pensé comme le semi-anneau en spectres des entiers positifs. Noter qu'on a $\mathbb{S}_+ = \mathbb{S}$, mais que leurs modèles fibrants pris dans $\mathcal{MS}$ et dans $\mathcal{GS}$ ne sont pas équivalents. Nous avons déjà mentioné que le modèle fibrant de $\mathbb{S}$ dans $\mathcal{GS}$ est un modèle du spectre en sphère, et en particulier que les groupes $\pi_i(\mathbb{S})$ sont les groupes d'homotopie stables des sphères.

En contre partie, on peut montrer qu'un modèle fibrant de $\mathbb{S}_+$ dans $\mathbb{MS}$ est donné par le nerf du groupoïde des ensembles finis. Plus précisément, le groupoïde des ensembles finis ES possède une structure monoïdale symétrique donnée par la somme disjointe. On peut alors construire un pseudo-foncteur

$$ES : \Gamma \longrightarrow Cat$$

qui envoit n^+ sur ES^n et où les foncteurs de transitions sont donnés par la structure monoïdale. En appliquant le procédé de strictification usuelle on en déduit un foncteur (au sens strict)

$$ES : \Gamma \longrightarrow Cat$$

qui composé avec le foncteur nerf $N : Cat \longrightarrow SEns$ donne un foncteur

$$N(ES) : \Gamma \longrightarrow SEns,$$

qui est un Γ-espace spécial. On montre alors que ce Γ-espace est un modèle fibrant de $\mathbb{S}_+$ dans $\mathcal{MS}$. En particulier, les groupes d'homotopie de $N(ES)$, sont donnés par

$$\pi_0(\mathbb{S}_+) := \pi_0(N(ES)(1^+)) \simeq \mathbb{N} \qquad \pi_1(\mathbb{S}_+, n) \simeq \Sigma_n \qquad \pi_i(\mathbb{S}_+, n) = 0 \; \forall \; i > 1.$$

On voit ainsi que $\mathbb{S}_+$ est un semi-anneau en spectres dont un modèle est le groupoïde des ensembles finis avec ses structures monoïdales données par le somme disjointe (l'addition) et le produit direct (la multiplication), et qui est donc une version homotopique des entiers naturels. L'anneau en spectres $\mathbb{S}$ est par construction l'anneau obtenu par complétion en groupes du semi-anneau $\mathbb{S}_+$. On retrouve ici le théorème de Quillen-Priddy, affirmant que la complétion en groupes du groupoïdes des ensembles finis est équivalent au spectre en sphère. Il est bienvenu de comparer le morphisme naturel $\mathbb{S}_+ \longrightarrow \mathbb{S}$ avec le morphisme naturel $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

On dispose d'un foncteur d'inclusion

$$\mathbb{N} - Mod \longrightarrow \mathcal{MS}$$

des monoïdes commutatifs dans $\mathcal{MS}$, qui est de Quillen à droite. Son adjoint à gauche est le foncteur de troncation

$$\pi_0 : \mathcal{MS} \longrightarrow \mathbb{N} - Mod$$

qui envoit un objet F sur $\pi_0(RF(1^+)$. On vérifie que les hypothèses de la proposition 5.12 sont satisfaites et donc que l'on obtient un foncteur de changement de bases

$$- \otimes_{\mathbb{S}_+} \mathbb{N} : \mathbb{S}_+ - Sch \longrightarrow \mathbb{N} - Sch.$$

Ce foncteur possède de plus un adjoint à gauche pleinement fidèle

$$i : \mathbb{N} - Sch \longrightarrow \mathbb{S}_+ - Sch.$$

De plus, le foncteur identité

$$\mathcal{MS} \longrightarrow \mathcal{GS}$$

est monoïdal symétrique et de Quillen à gauche. Son adoint à droite induit un foncteur pleinement fidèle

$$Ho(\mathcal{GS}) \longrightarrow Ho(\mathcal{MS})$$

dont l'image est formé des Γ-espaces spéciaux. On peut vérifier que les conditions de la proposition 5.12 sont satisfaites et que l'on obtient ainsi un foncteur de changement de bases

$$\mathbb{S}_+ - Sch \longrightarrow \mathbb{S} - Sch$$

qui possède encore un adjoint à gauche pleinement fidèle

$$\mathbb{S} - Sch \longrightarrow \mathbb{S}_+ - Sch.$$

Bien entendu on dispose d'un diagramme commutatif à isomorphisme naturel près

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}_+ - Sch \arrow[r, "-\otimes_{\mathbb{S}_+}\mathbb{S}"] \arrow[d, "-\otimes_{\mathbb{S}_+}\mathbb{N}"'] & \mathbb{S} - Sch \arrow[d, "-\otimes_{\mathbb{S}}\mathbb{Z}"] \\
\mathbb{N} - Sch \arrow[r, "-\otimes_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}"'] & \mathbb{Z} - Sch,
\end{tikzcd}$$

ce qui permet de comparer les $\mathbb{N}$-schémas et les $\mathbb{S}$-schémas. Il faut noter que pour $X \in \mathbb{N} - Sch$ le morphisme naturel

$$i(X) \otimes_{\mathbb{S}_+} \mathbb{S} \longrightarrow i(X \otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{Z})$$

n'est pas un isomorphisme en général. En effet, le foncteur $- \otimes_{\mathbb{S}_+} \mathbb{S}$ est donné par une version homotopique de la construction complétion en groupes, des semi-anneaux en spectres vers les anneaux en spectres, et l'on sait bien qu'appliqué à un semi-anneaux discret on peut obtenir un anneau en spectres non discret.

Tout comme pour le cas de $\mathbb{S}$, on peut définir un $\mathbb{S}_+$-schéma affine, classifiant les auto-équivalence du $\mathbb{S}_+$-module libre de rang n. Nous le noterons $Gl_{n,\mathbb{S}_+}$. On montre facilement que l'on a les deux propriétés suivantes

- L'ensemble simplicial $Gl_{n,\mathbb{S}_+}(\mathbb{S}_+)$ est discret et équivalent à Σ_n.
- Le morphisme naturel
$$Gl_{n,\mathbb{S}_+} \otimes_{\mathbb{S}_+} \mathbb{S} \longrightarrow Gl_{n,\mathbb{S}}$$
est un isomorphisme de $\mathbb{S}$-schémas affines.

On montre aussi, tout comme pour le cas de $\mathbb{S}$ que le morphisme naturel
$$Gl_{n,\mathbb{S}_+} \longrightarrow i(Gl_{n,\mathbb{N}})$$
n'est pas un isomorphisme dans $\mathbb{S}_+$-Sch.

Enfin, le foncteur de Quillen à droite
$$\mathcal{MS} \longrightarrow SEns$$
qui envoit F sur $F(1^+)$, dont l'adjoint à gauche vérifie les conditions de la proposition 5.12 donne un foncteur de changements de base
$$\mathbb{S}_1 - Sch \longrightarrow \mathbb{S}_+ - Sch.$$
On dispose alors d'un second diagramme commutatif à homotopie près
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}_1 - Sch \arrow[r, "-\otimes_{\mathbb{S}_1}\mathbb{S}_+"] \arrow[d, "-\otimes_{\mathbb{S}_1}\mathbb{F}_1"'] & \mathbb{S}_+ - Sch \arrow[d, "-\otimes_{\mathbb{S}_+}\mathbb{N}"] \\
\mathbb{F}_1 - Sch \arrow[r, "-\otimes_{\mathbb{F}_1}\mathbb{N}"'] & \mathbb{N} - Sch.
\end{tikzcd}$$

En conclusion, on dispose d'un diagramme commutatif à isomorphisme naturel près
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}_1 - Sch \arrow[r, "-\otimes_{\mathbb{S}_1}\mathbb{S}_+"] \arrow[d, "-\otimes_{\mathbb{S}_1}\mathbb{F}_1"'] & \mathbb{S}_+ - Sch \arrow[r, "-\otimes_{\mathbb{S}_+}\mathbb{S}"] \arrow[d, "-\otimes_{\mathbb{S}_+}\mathbb{N}"] & \mathbb{S} - Sch \arrow[d, "-\otimes_{\mathbb{S}}\mathbb{Z}"] \\
\mathbb{F}_1 - Sch \arrow[r, "-\otimes_{\mathbb{F}_1}\mathbb{N}"'] & \mathbb{N} - Sch \arrow[r, "-\otimes_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}"'] & \mathbb{Z} - Sch.
\end{tikzcd}$$
Schématiquement on représente ce diagramme par le diagramme suivant
$$\begin{tikzcd}
Spec\,\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & Spec\,\mathbb{N} \arrow[r] \arrow[d] & Spec\,\mathbb{F}_1 \arrow[d] \\
Spec\,\mathbb{S} \arrow[r] & Spec\,\mathbb{S}_+ \arrow[r] & Spec\,\mathbb{S}_1.
\end{tikzcd}$$

Références

[Bl] B. Blander, *Local projective model structure on simpicial presheaves*, K-theory **24** (2001) No. 3, 283-301.

[De] Deitmar, *Schemes over F_1*, dans *Number fields and function fields—two parallel worlds*, 87–100, Progr. Math. **239**, Birkhuser Boston, Boston, MA, 2005.

[D] P. Deligne, *Catégories tannakiennes*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 111–195, Progr. Math., 87, Birkhuser Boston, Boston, MA, 1990.

[EKMM] A.D. Elmendorf, I. Kriz, M.A. Mandell, J.P. May, *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 47, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[Ha] M. Hakim, *Topos annelés et schémas relatifs*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 64. Springer-Verlag Berlin-New York, 1972.

[Hol] S. Hollander, *A homotopy theory for stacks*, pré-publication math.AT/0110247.

[Ho] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical surveys and monographs, Vol. **63**, Amer. Math. Soc., Providence 1998.

[Hu] T. Huettemann, *Algebraic K-Theory of non-linear projective toric varieties*, J. Pure Appl. Algebra **170** (2002), no. 2-3, 185–242.

[Ja] J. F. Jardine, *Simplicial presheaves*, J. Pure and Appl. Algebra **47** (1987), 35-87.

[La-Mo] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 39. Springer-Verlag Berlin, 2000.

[Ma-Mo] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994.

[M-M-S-S] M. Mandel, P. May, S. Schwede, B. Shipley, *Model categories of diagram spectra*, Proc. London Math. Soc. (3) **82** (2001), no. 2, 441–512.

[Mi] Milne, *Etale cohomology*, Princeton Mathematical Series, 33. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980. xiii+323.

[O] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 15. Springer-Verlag Berlin-New York, 1972.

[R-S-T] J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, T. Theobald, *First steps in tropical geometry*, Proc. Conference on Idempotent Mathematics and Mathematical Physics, Vienna 2003 (G.L. Litvinov and V.P. Maslov, eds.), Contemporary Mathematics, AMS.

[Sa] N. Saavedra, *Catégories Tannakiennes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **265** Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. ii+418 pp.

[S] S. Schwede, *Stable homotopical algebra and Γ-spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **126** (1999), no. 2, 329–356.

[S-S] S. Schwede, B. Shipley, *Algebras and modules in monoidal model categories*, Proc. London Math. Soc. (3) **80** (2000), 491 – 511.

[So] C. Soulé, *Les variétés sur le corps à un élément*, Mosc. Math. J. **4** (2004), no. 1, 217–244.

[Sp] M. Spitzweck, *Operads, algebras and modules in model categories and motives*, Ph.D. Thesis, Mathematisches Institüt, Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn (2001), accessible à http://www.uni-math.gwdg.de/spitz/.

[To-Va] B. Toën, M. Vaquié, *Moduli of objects in dg-categories*, à parraitre aux Annales Sci. de l'ENS, pré-publication math.AG/0503269.

[HAGDAG] B. Toën, G. Vezzosi, *From HAG to DAG: derived moduli stacks*, in Axiomatic, enriched and motivic homotopy theory, 173–216, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 131, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.

[HAGI] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry I: Topos theory*, Adv. Math. **193** (2005), no. 2, 257–372.

[HAGII] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry II: Geometric stacks and applications*, à parraitre dans Memoires of the AMS, pré-publication math.AG/0404373.

[Ve] G. Vezzosi, *A sketchy note on enriched homotopical topologies and enriched homotopical stacks*, pré-publication math.CT/0507447.