Schemische Grothendieck ringen en motivische rationaliteit

Hans Schoutens (New York City College of Technology, USA)

De klassieke Grothendieck ring over een algebrasch gesloten veld is de vrije Abelse groep over isomorfisme klassen of variteiten modulo de "knip en plak"relaties $[X] = [Y] + [X - Y]$ voor $Y \subset X$, met vermenigvuldiging via het Cartesisch product. Nadat Konsevitch zijn motivische integratie introduceerde —een veralgemening van p-adische integratie welke waarden aanneemt in de Grothendieck ring—, werd deze theorie door Denef en Loeser uitgebreid met behulp van Pas kwantoren eliminatie over gevalueerde velden, wat hun dan in staat stelde om motivische rationaliteit (= rationaliteit as een functie over de Grothendieck ring) van verscheidene voortbrengende reeksen, zoals de (meetkundige) Igusa zeta reeks, te bewijzen. Vermits zij echter ingebedde resolutie van singulariteiten gebruiken, is hun theorie enkel toepasbaar in karakteristiek nul. Ik zal een verdere veralgemening van deze theorie voorstellen, in welke de klassieke Grothendieck ring wordt vervangen door een schemische versie. In deze schemisch Grothendieck ring, kunnen we nu de klas van een willekeurig quasi-projectief schema nemen, zonder de nilpotente structuur te verliezen. Vermits schemas geen complement hebben, moet dit in een wijdere context gezet worden. Modeltheoristen zijn vertrouwd, vooral na het werk van Denef en Loeser, met de Grothendieck ring van een elementaire theorie, door formules in de plaats van definieerbare verzamelingen te gebruiken. Iets gelijkaardigs vinden we ook in algebrasche meetkunde, waar we een schema als een representeerbare functor kan beschouwd worden. Ik zal aantonen hoe beide gezichtspunten met elkaar kunnen gecombineerd word functor en, door schemas als schemische, of meer algemeen as positief primitieve, formules te beschouwen, en formele schemas als formularies, een hogere orde versie van een formule. Deze laatste zijn nodig, als ik zal uitleggen, om complementen te nemen. Zo verkrijgen we de curieuze formule $k[x] = k[x, 1/x] + k[[x]]$ waar ik voor speciaal effect, een schema door zijn coordinaatsring heb voorgesteld.

Alhoewel het gebruik van logisch jargon u misschien wat de kriebels geeft, het heeft het voordeel dat, afgezien van een eenvoudiger theorie, we er nu ook een volledig functoriele hebben. Zo kan motivische integratie vervangen worden via het begrip van een bogenschema, een veralgemening van de klassieke boogruimte. Met behulp van deze theorie ben ik nu in staat om de motivische rationaliteit over zekere hyperoppervlakken te bewijzen, in om het even welke karakteristiek. Bijvoorbeeld, elk canoniek oppervlak heeft een rationale Igusa zeta reeks. Een bijkomend voordeel van dit formalisme is dat we nu ook de motivische rationaliteit van andere voortbrengende reeksen kunnen onderzoeken, zoals de Hilbert reeks, wat in de klassieke zetting helemaal geen steek houdt.