Optimale ondergrens voor de polen van Igusa's p-adische zetafunctie

Dirk Segers

7 januari 2004

Zij p een priemgetal en zij $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$. Igusa's p-adische zetafunctie $Z(s)$ van f wordt gedefinieerd door een p-adische integraal voor complexe getallen s waarvoor $\mathrm{Re}(s) \geq 0$:

$$Z(s) := \int_{\mathbb{Z}_p} |f(x)|_p^s \, |dx|_p.$$

Omdat $Z(s)$ alleen afhangt van $t := p^{-s}$ kunnen we ook $Z(t)$ bekijken. Noteer met M_i het aantal oplossingen van $f(x) \equiv 0 \bmod p^i$ in $(\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z})^n$. De Poincaré-reeks van f is de formele machtreeks

$$P(t) := \sum_{i=0}^{\infty} M_i (p^{-n} t)^i.$$

We zullen zien dat

$$Z(t) = P(t) - \frac{P(t) - 1}{t} \quad \text{en} \quad P(t) = \frac{1 - tZ(t)}{1 - t}.$$

Bijgevolg ken je $Z(t)$ als en slechts als je $P(t)$ kent. Met behulp van de p-adische stationaire faseformule zullen we enkele Igusa zetafuncties berekenen. Dit blijken rationale functies te zijn in $t = q^{-s}$, een feit dat we voor een willekeurige veelterm f zullen bewijzen door de definiërende integraal uit te rekenen op een ingebedde resolutie van f. Dit feit heeft als belangrijk gevolg dat $Z(s)$ een meromorfe continuatie heeft tot gans $\mathbb{C}$. Deze meromorfe continuatie is Igusa's p-adische zetafunctie $Z(s)$.

De polen van $Z(s)$ vormen omwille van onder andere de monodromieconjectuur een interessant studieobject. We zullen zien dat het kleinste reële deel van een pool van $Z(s)$ te maken heeft met deelbaarheid van de M_i's door machten van p. We bewijzen dat M_i deelbaar is door $p^{\lceil (n/2)(i-1) \rceil}$, en dit impliceert dat $Z(s)$ geen pool heeft met reëel deel kleiner dan $-n/2$.