Nederlandstalige samenvatting:

Zij f een veelterm in de veranderlijken $x=(x_1,\dots,x_n)$, met coëfficiënten in de ring van gehele getallen Z. Igusa's Monodromieconjectuur voorspelt een intrigerend verband tussen de getaltheoretische eigenschappen van f, en de meetkunde van het complexe hyperoppervlak X_0 gedefinieerd door f. Ze stelt dat het asymptotisch gedrag van het aantal oplossingen van de congruentie f = 0 over $Z/(p^n)$, wanneer n naar oneindig streeft, nauw gerelateerd is aan de topologie van de singulariteiten op X_0, voor bijna alle priemgetallen p. De getaltheoretische eigenschappen van f worden versleuteld door de polen van de p-adische lokale zetafunctie, de topologische door de eigenwaarden van de monodromie op de singuliere cohomologie van de Milnorvezel.

Wat de Monodromieconjectuur moeilijk hanteerbaar maakt, is het feit dat ze een brug postuleert tussen twee erg verschillende werelden. We geloven dat deze brug gedragen kan worden door een wezen dat in beide werelden leeft: de ring C[[t]] van formele machtreeksen over het veld van complexe getallen C. Enerzijds toont de theorie van motivische integratie aan dat deze ring voldoende lijkt op de ring van p-adische gehelen, om de relevante getaltheoretische aspecten van de polynoom f te vatten – je zou kunnen zeggen dat C[[t]] fungeert als universeel, motivisch model voor de ringen van p-adische gehelen. Anderzijds weerspiegelt de ruimte van boogjes, i.e. C[[t]]-rationale punten, op X_0, de singuliere structuur.

Dit proefschrift bestaat uit drie delen. Deel 1 handelt over archimedische lokale zetafuncties, i.e. lokale zetafuncties over het lokale veld van reële getallen R, of van complexe getallen C. Hoofddoel is het onderzoeken van de grootste niet-triviale pool van de zetafunctie. Deel 2 gaat over p-adische zetafuncties in meerdere veranderlijken, en de veralgemening van de Monodromieconjectuur naar dit kader. In deel 3, tenslotte, bestuderen we de motivische theorie: het verband tussen motivische Poincaréreeksen en resolutie van singulariteiten, en de definitie van motivische Poincaréreeksen voor families van variëteiten.

<u>Engelstalige samenvatting:</u>

Let f be a polynomial in the variables $x=(x_1,\ldots,x_n)$, with coefficients in the ring of integers Z. Igusa's Monodromy Conjecture predicts an intriguing relationship between the arithmetic properties of f, and the topology of the complex hypersurface X_0 defined by f. More specifically, the conjecture links the asymptotic behaviour of the number of solutions of $f \equiv 0 \bmod p^n$, as n tends to infinity, to the topology of the singularities of X_0, for almost all prime numbers p. The arithmetic properties of f are encrypted by the poles of the p-adic local zeta function, the topological ones by the eigenvalues of the monodromy transformation on the cohomology of the Milnor fiber.

One of the aspects of this conjecture that make it hard to handle, is that the objects in the statement seem to live in different worlds. We believe that they can be linked by a being that lives in both worlds at once: the ring C[[t]] of formal power series over the field of complex numbers C. On the one hand, the theory of motivic integration shows that C[[t]] captures the relevant arithmetic properties of f - one could say that C[[t]] serves as an arithmetic "universal, i.e. motivic, model" for the rings of p-adic integers. At the same time, the behaviour of f over C[[t]] reflects fundamental properties of the singularities of the complex hypersurface defined by f.

This dissertation consists of three parts. Part 1 deals with archimedean local zeta functions, i.e. zeta functions over the local field of real numbers R, or complex numbers C. The main purpose is a study of the largest non-trivial pole of the local zeta function. The second part of this thesis concerns p-adic zeta functions in several variables, and the generalization of the Monodromy Conjecture to this setting. In part 3, we study the motivic theory: the relations between motivic Poincaré series and resolution of singularities, and the definition of the motivic Poincaré series for families of algebraic varieties.