Parels van studenten tijdens een examen

Parel 1

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k x^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k}(-a)^k} = \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{c_k x^k}{\binom{n+1}{k} x^{n+1-k}(-a)^k} \right) - c_{n+1}x^{n+1}$$

□

Parel 2

Vraag: Zij $n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C}$ voor $k = 1, \ldots, n$, $c_n \neq 0$. Toon aan dat de functie

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$$

maximaal n verschillende wortels heeft, d.w.z. oplossingen van $f(z) = 0$.
Antwoord: per aspera ad astra
7 jaar geen wiskunde en plots Analyse 1
hehe □

Parel 3

$\vdots$

In het uitzonderlijke geval dat de omgeving enkel rationale getallen bevat kan men ineens verder gaan naar deel 2.

$\vdots$ □

Parel 4

Vraag: Formuleer en bewijs de stelling over de relatie tussen de convexiteit van de functie f en haar ??? afgeleide.
Antwoord: f is een convexe functie en continu in $[a, b]$ dan zegt men dat de k-de afgeleide van f ook convex is. □

Parel 5

Vraag: Formuleer het orde-axioma voor reële getallen.
Antwoord: In de verzameling van de reële getallen bestaat er een absolute ordening, die ervoor zorgt dat de reële getallen ten opzichte van elkaar vergeleken kunnen worden met als referentie "0". Dit kan worden voorgesteld door een reële as. □

Parel 6

Vraag: Formuleer de stelling over de convergentie van de wisselreeksen.
Antwoord: Een wisselreeks is nooit convergent want ze wisselt voortdurend van teken. □

Parel 7
VRAAG: Formuleer en bewijs de stelling van Cauchy-Hadamard over de convergentie van een PMR.
ANTWOORD: pfff ... "zucht"
Deze ochtend op de radio:
"De Opel-saloncondities, enkel die blijven in je hoofd zitten!"
Ik zou het nog gaan geloven. $\square$

Parel 8
VRAAG: Formuleer en bewijs de formule van Taylor.
ANTWOORD: Beste,
van Taylor kan ik mij nu helaas niets voor geest halen. Dus, om u niet in de kou laten staan, hier de stelling + bewijs van Archimedes. $\square$

Parel 9 Ik vind het spijtig dat u niets gevraagd heeft over de convexe eigenschappen of uniforme continuïteit over interval. Dit en nog veel andere waren zeer mooie bewijzen die ik net iets beter beheerste. Niettemin zijn deze bewijzen ook zeer interessant.
Ik heb geprobeerd al mijn bewijzen op 1 lijntje te krijgen, maar het verhaal ging als volgt:
Mijn lijntje was te lang en mijn blad te kort.
Tot wederziens!
(My parachute mal-functioned. I'm going to try and save what's left to save.) $\square$

Parel 10 Wegens niet genoeg kennis en inzicht te hebben in het bewijs, zal ik in plaats de kettingregel bewijzen. $\square$

Parel 11
VRAAG: Formuleer en bewijs de stelling over de afleidbaarheid van de limietfunctie $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.
ANTWOORD: De limietfunctie $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ is afleidbaar als en slechts als voor alle $n \in \mathbb{N}$ de functies f_n afleidbaar zijn.
Bewijs :

nodige voorwaarde: triviaal

voldoende voorwaarde: uit het ongerijmde.

$\square$

Parel 12
VRAAG: Formuleer de zgn. M-test van Weierstraß.
ANTWOORD: De M-test van Weierstraß gaat over integralen en zegt dat als $M > 0$ is, we iets kunnen besluiten uit een bepaalde vgl., en dat als $M < 0$, we iets anders kunnen besluiten uit bepaalde vgl. $\square$

Parel 13 Zij a en b reële getallen. Dan

$$a < b \Longleftrightarrow a \leq b - 1.$$

$\square$

Parel 14

...

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + \frac{A}{2}|x - x_0| + \frac{A}{2}|x - x_0|^2.$$

Afleiden geeft

$$|f'(x)| \leq \frac{A}{2} + A|x - x_0|.$$

... □

Parel 15

$$\int_a^b f^n(x)\ \mathrm{d}x = \frac{f^{n+1}(b) - f^{n+1}(a)}{n+1}.$$

□

Parel 16

VRAAG: Zij f en g reële continu functies op $[a, b]$ en zij g positief. Dan bestaat er een $c \in [a, b]$ met de eigenschap

$$\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Bewijs!

ANTWOORD:

$$\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

gebruik van stelling 1.8 p.92: $\exists c \in [a, b]$ c-is willekeurig

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x) = f(c) \qquad (f(c) = F'(c))$$

$$\Longrightarrow f(c) \int_a^b g(x) \qquad //.$$

□

Parel 17

VRAAG: Formuleer en bewijs de stelling over de dichtheid van $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

ANTWOORD: ...Als een getal rationaal is en afgebeeld wordt op $\frac{nx}{n+x}$, dan zijn zijn 2 dichtsbijzijnde buren irrationaal en ... □

Parel 18

VRAAG: Formuleer en bewijs de stelling over de dichtheid van $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

ANTWOORD: ...De intervallen tussen twee opeenvolgende rationale getallen ... □

Parel 19

VRAAG: Formuleer het orde-axioma voor reële getallen.

ANTWOORD: Alle reële getallen zijn van dezelfde orde. □

Parel 20
VRAAG: Formuleer de stelling van Cauchy-Kowalevskaia.
ANTWOORD:
Poor people have it,
Rich people need it
and when you eat it
you might starve to death.

What is it?

Hint: Dezelfde hoeveelheid punten die ik krijg voor deze vraag. $\square$

Parel 21
VRAAG: Formuleer en bewijs de substitutiestelling voor integralen.
ANTWOORD:

$$\int f(t)\ \mathrm{d}t = \int f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$t = x$$

$$\mathrm{d}t = \ \mathrm{d}x$$

$\square$

Parel 22
VRAAG: Formuleer een equivalente uitspraak met "de functie $f: A \to \mathbb{C}$ is niet uniform continu in A".
ANTWOORD: De functie $f: A \to \mathbb{C}$ is niet uniform continu in $A \Longrightarrow f$ kan niet uniform convergeren in A. $\square$

Parel 23
VRAAG: Formuleer en bewijs de stelling over de continuïteit van de limietfunctie van een functierij.
ANTWOORD: Als alle f_n puntsgewijs convergeren naar f in $[a, b]$ en als f continu is in $[a, b]$, dan is $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ continu in $[a, b]$. $\square$

Parel 24
VRAAG: Formuleer en bewijs de stelling over de convergentie van wisselreeksen.
ANTWOORD: De wisselreeks $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_{n+1}$ convergeert. $\square$

Parel 25 Beschouw de functierij $f(x_n)$, waarvoor $\forall n$ geldt dat $f(x_n)$ continu is. Stel dat $f(x_n)$ absoluut convergeert naar $f(x)$ dan convergeert de limietfunctie $f(x)$. $\square$

Parel 26 In een gesloten interval $[a, b]$ zal een functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ altijd uniform continu zijn! $\square$

Parel 27 Een divergente meetkundige rij heeft altijd minstens 1 subrij die convergent is. ☐

Parel 28 Een numerieke reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergeert als $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 0$. ☐

Parel 29 Als je de functie f met $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ vergelijkt dan kan je zeggen dat F van een niveau hoger is dan f. ☐

Parel 30 De functie f is convex $\iff$ f is holomorf. ☐

Parel 31 Een functie is convergent in een gesloten interval. ☐

Parel 32 Wanneer de norm van $|z - z_0| < 0$ dan is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ convergent in $\mathbb{C}$. ☐

Parel 33

$$\frac{x_n^2}{2^{n+2}} \geq 0 \Longrightarrow x_n^2 \geq 2^{n+2}$$

☐

Parel 34 Zij $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. Dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k}{\lim_{n\to\infty} n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lim_{n\to\infty} x_k}{\lim_{n\to\infty} n} = \frac{na}{\lim_{n\to\infty} n} = \lim_{n\to\infty} \frac{na}{n} = a.$$

☐