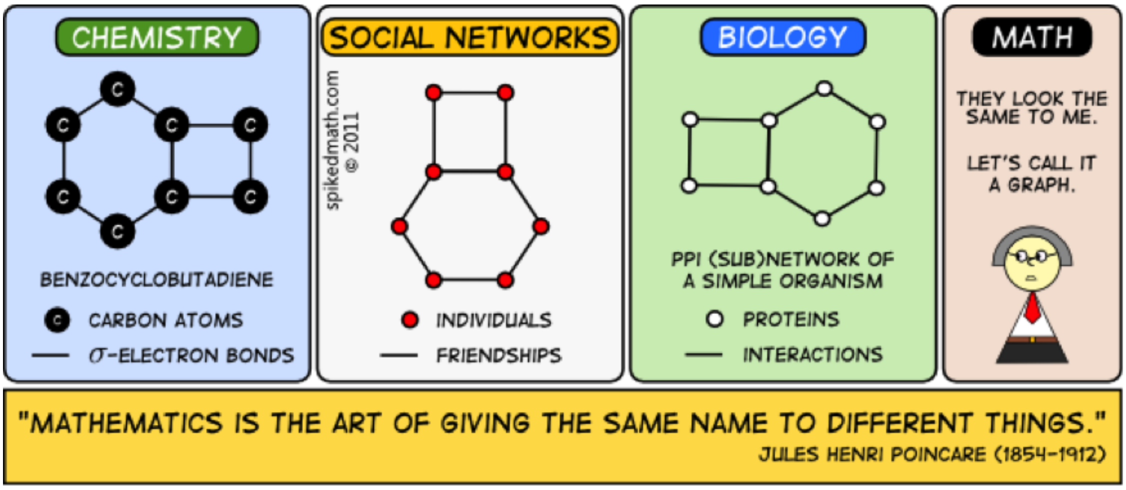
Diverse didactische perspectieven op grafen



Lins Denaux *(lins.denaux@ugent.be)*
Gommaar Maes *gommaar.maes@ugent.be*
Tania Van Damme *(tania.vandamme@ugent.be)*

Academie Levenslang Leren Faculteit Wetenschappen UGent

14 december 2022

Inleiding en eindtermen grafen

Wie zijn wij?

Wij zijn collega's aan UGent, afkomstig uit verschillende domeinen. We werken samen voor deze nascholing om je een didactisch onderbouwde nascholing met aandacht voor wiskundige correctheid aan te bieden.

- Lins Denaux is assistent en doctoraatsstudent aan de vakgroep Wiskunde (WE16) aan de UGent. Hij doet onderzoek in gebieden verwant aan grafentheorie en geeft praktijklessen aan studenten uit de bachelor en master Wiskunde.
- Gommaar Maes en Tania Van Damme zijn leerkrachten wiskunde in 4de, 5de en 6de jaar aan het GO!Atheneum Mariakerke. Daarnaast werken zij deeltijds als onderwijsbegeleiders en -didactici voor de EDUMA wiskunde aan de UGent.

Waarom grafen?

De nieuwe eindtermen voor de 2de graad doorstroomfinaliteit omvatten een stukje grafentheorie. Er zijn meerdere goede redenen om leerlingen in contact te brengen met grafen.
Enerzijds zijn er de vele **toepassingsmogelijkheden**, anderzijds illustreren grafen de **abstraherende kracht van wiskunde**. Grafen laten toe om probleemstellingen, die op het eerste zicht niets met elkaar te maken hebben, op eenzelfde manier op te lossen los van hun context. Hierbij komt het kunnen **modelleren en mathematiseren** van verschillende situaties aan bod.
Bovendien is grafentheorie een geschikte context om leerlingen te **leren redeneren en bewijzen**. Grafen bestuderen vraagt geen voorkennis uit andere domeinen (meetkunde, analyse, algebra). Met weinig algebraïsche vaardigheid komt men al een heel eind.
Grafentheorie is daarnaast geschikt om het **algoritmisch denken** te bevorderen. Door een gevonden oplossing voor een kleinschalig probleem in een algoritme te gieten, kan de oplossingsmethode geprogrammeerd worden. Computers lossen analoge problemen toegepast op reusachtige grafen op.

Inhoud van de nascholing

We starten met het interpreteren van de eindtermen en de implementatie ervan in de leerplannen van het KOV en van het GO!.
We kijken naar grafen vanuit verschillende didactische perspectieven.
Eerst laten we je kennismaken met of frissen we je kennis op van grafen. We geven dit deel zoals je ook via onderwijsleergesprekken de leerstof aan leerlingen kan geven. Je krijgt van ons een syllabus met bijhorend oefenmateriaal.
Erna tonen we hoe via andere didactische werkvormen de leerstof kan worden gegeven. De focus wordt verschoven van klassikaal onderzoekend leren naar zelfstandig begeleid onderzoekend leren. We bieden onderzoeksopdrachten in verschillende vormen aan: literatuurstudie, open onderzoeksvragen, meer gestuurde onderzoeksvragen via werkbladen, gebruik van tastbaar materiaal en van ICT bij het ontdekkend en probleemoplossend leren.

Eindtermen

Op de website van de Vlaamse overheid `https://onderwijsdoelen.be/` lees je de eindterm omtrent grafen in de 2de graad, doorstroomfinaliteit.

6.17 De leerlingen gebruiken grafen om problemen op te lossen

Met inbegrip van kennis

- Feitenkennis
  - Graaf, knoop, boog
  - Samenhangende graaf
- Conceptuele kennis
  - Graaf als model van een concrete situatie
  - Graaf, knoop, boog
  - Aantal knopen en aantal bogen van de graaf
  - Samenhangende graaf
  - Aantal buren van een knoop
  - Wandeling, pad in een graaf
  - Afhankelijk van de context, concepten zoals eulergraaf, graafkleuringen, hamiltongraaf, gewogen graaf, gerichte graaf
- Procedurele kennis

  - Opstellen en interpreteren van een graaf als model van een concrete situatie
  - Opsporen van wandelingen en paden in grafen
  - Uitvoeren van algoritmes die op grafen toepasbaar zijn zoals het kortstepad-algoritme, het Kruskal-algoritme voor een opspannende boom

Met inbegrip van context

- De eindterm wordt met context gerealiseerd zoals reisroutes, sociale netwerken, de zeven bruggen van Königsberg, transportnetwerken, planningsproblemen, het vierkleurenprobleem, het handelsreizigersprobleem.

Met inbegrip van dimensies eindterm
Cognitieve dimensie: beheersingsniveau toepassen

Aangezien grafen zich uitstekend lenen tot het leren abstraheren, redeneren, problemen oplossen, mathematiseren en modelleren, wordt er via grafen ook gewerkt aan het behalen van algemene eindtermen over deze vaardigheden.

Binnen de bouwsteen 'Redeneringen opbouwen en abstraheren rekening houdend met de samenhang en structuur van wiskunde':
6.21 De leerlingen beargumenteren wiskundige redeneringen en uitspraken.

Binnen de bouwsteen 'Modelleren en problemen oplossen door analyseren, (de)mathematiseren en aanwenden van heuristieken:
6.22 De leerlingen lossen problemen op door te mathematiseren en demathematiseren en door gebruik te maken van heuristieken.

Grafen kunnen als wiskundig model ook bijdragen aan het STEM-doel:
6.52 De leerlingen ontwikkelen natuurwetenschappelijke, technologische, en wiskundige modellen in disciplinespecifieke en STEM-contexten om te visualiseren, te onderzoeken, op te lossen en te verklaren.

Leerplan KOV

Er zijn 5 leerplannen voor de verschillende studierichtingen binnen de doorstroomfinaliteit. In elk van die leerplannen wordt de eindterm over grafen vertaald in twee leerplandoelen.
Bv. in het leerplan II-C doorstroom:

LPD 54 De leerlingen interpreteren een graaf als een model van een concrete situatie

Knopen en bogen van een graaf
Buren van een knoop
Samenhangende graaf

- Grafen worden gebruikt als model of schematische voorstelling voor bv. sociale netwerken, transportnetwerken, stambomen, boom- en wegendiagrammen ...
- In een concrete situatie die door een graaf beschreven wordt kan je leerlingen de betekenis van de knopen en de bogen, de buren of het aantal buren (vaak de graad genoemd) van een knoop en het al of niet samenhangend zijn laten uitleggen.
- Je kan de graaf horend bij een concrete situatie ook laten opstellen.

LPD 55 De leerlingen gebruiken grafen om problemen op te lossen

- Als het probleem te maken heeft met wandelingen op grafen kan je de terminologie van spoor, circuit, pad en cykel gebruiken voor de soorten wandelingen. Bij sporen en circuits worden de bogen maximaal één keer doorlopen; bij paden en cykels worden de knopen maximaal één keer doorlopen.
- Je beperkt best het aantal types problemen die je aan bod laat komen. Een aantal mogelijkheden waaruit gekozen kan worden:
  - Problemen i.v.m. (aantal) buren en eigenschappen zoals 'aantal knopen met oneven graad is even'
  - Het bestaan en opsporen van wandelingen die alle bogen juist één keer doorlopen en de 7 bruggen van Königsberg (terminologie: Eulerspoor, -circuit en -graaf)
  - Minimaal opspannende bomen op gewogen grafen en de algoritmes van Kruskal of Prim
  - Kortste pad bepalen op gewogen grafen en algoritme van Dijkstra
  - Kleuringen van landkaarten, knoopkleuringen van (vlakke) grafen en de vierkleurenstelling
  - Het bestaan en opsporen van wandelingen die alle knopen juist één keer doorlopen en eventueel link met Handelsreizigersprobleem (terminologie: Hamiltonpad, -cykel en -graaf)
  - Problemen over speciale types van grafen zoals bomen en tweedelingsgrafen

GO! Navigator

De GO! Navigator vermeldt dezelfde tekst als op `https://onderwijsdoelen.be/`.

Opbouw van de leerstof in de syllabus

Er komen heel wat begrippen en definities kijken bij grafen. We vertrekken in de syllabus steeds vanuit een toepassing of een probleemstelling en voeren de begrippen in die nodig zijn voor het construeren van de graaf horend bij de toepassing of voor het oplossen van het probleem. Op het einde van de syllabus volgt er een gestructureerd overzicht van alle definities, begrippen en stellingen.

We vertrekken in de eerste module vanuit het ontstaan van grafen en onderzoeken het probleem van de zeven bruggen van Königsberg.
In de tweede module leren we de leerlingen grafen opstellen bij concrete situaties.
Nadat we in de eerste module kennis gemaakt hebben met eulergrafen, waarbij elke boog precies eenmaal moet worden doorlopen, definiëren we in de derde module de hamiltongraaf, waarbij elke knoop precies eenmaal moet worden bereikt. Dit is de situatie die zich voordoet bij het handelsreizigersprobleem.
In module 4 gaan we op zoek naar het goedkoopste netwerk, of in termen van grafen, naar een minimaal opspannende boom. De algoritmes van Kruskal en Prim worden behandeld. Uiteraard hoeven ze niet allebei in klas aan bod te komen. De lesgever kan kiezen welke zal worden aangeleerd.
In module 5 zoeken we naar het kortste pad tussen twee knopen met behulp van het algoritme van Dijkstra.
De twee laatste modules (Chinees postbodeprobleem en Party problems) zijn een uitbreiding voor wie iets extra wil aanbieden aan (sommige) leerlingen. Ook het behandelen van de bewijzen die in de syllabus zijn opgenomen, kunnen worden gezien als vorm van uitbreiding of differentiatie.
Elke module is voorzien van oefeningen om definities, begrippen en algoritmes in te oefenen. Er zijn ook enkele opgaven waarvoor redeneer- en probleemoplossende vaardigheden moeten worden aangesproken. Er is ook een basisversie van de syllabus beschikbaar, waarin het meer formele deel, bewijzen en uitbreiding zijn weggelaten. Deze cursus voldoet nog steeds aan de eindtermen over grafen.

Didactische werkvormen

De syllabus kan worden gebruikt om via onderwijsleergesprekken de leerstof te geven. Hier en daar staan kleine opdrachten en onderzoeksopdrachten zodat deze werkvorm wordt afgewisseld met begeleid zelfstandig of in groepjes leren.

Een alternatieve aanpak is starten met module 2, waaraan dan de definitie van een graaf als verzameling van knopen en bogen moet worden toegevoegd. Erna onderzoeken de leerlingen via werkbladen zelfstandig of in groep het probleem over de zeven bruggen van Königsberg.
Module 3 kan worden ingeleid a.d.h.v. onderzoekend leren met tastbaar materiaal. Ook hieraan is een werkblad verbonden.
Ook bij module 4 zijn er alternatieven: Anneleen De Schepper, postdoctoraatstudent en EDUMA-student gevorderde vakdidactiek wiskunde (2021-2022), heeft werkbladen uitgewerkt om zelfstandig of in groep, en m.b.v. ICT (online software om grafen te tekenen en te onderzoeken) op zoek te gaan naar een goedkoopste netwerk (algoritmes van Kruskal en Prim). Haar medestudent, Katrien Martens, heeft een Geogebra applet ontworpen waarmee leerlingen het algoritme van Prim aanleren en toepassen. Zij heeft ook een applet gemaakt om het algoritme van Dijkstra (module 5) leerlingen zelfstandig of in groep aan te leren. De lesgever kan kiezen om met de syllabus meer gestuurd aan het werk te gaan of om via werkbladen en ICT de leerlingen meer zelfstandig te laten werken.

Ook bij de oefeningen kan er worden gekozen voor een meer of minder gestuurde aanpak. De oefeningen met een probleemoplossend karakter, komen tegemoet aan de eindtermen in de bouwsteen over modelleren en problemen oplossen. Om aan deze eindterm te voldoen moeten de leerlingen hier zelfstandig (of in groep) mee aan de slag. Hetzelfde geldt voor de onderzoeksopdrachten en oefeningen waarbij redeneervaardigheden aan bod komen (zie de eindterm in de bouwsteen over redeneren en abstraheren).