Eulergraaf via onderzoeksopdrachten

Voorkennis

Deze onderzoeksopdrachten vormen een alternatief voor een deel van module 1 uit de syllabus. Er wordt gesteund op volgende kennis en vaardigheden:

- definitie graaf, knoop, boog, enkelvoudige graaf, multigraaf (module 1 blz. 5)
- definitie orde en grootte van een graaf (module 1 blz. 5-6)
- modelleren van verschillende situaties m.b.v. grafen (module 2)

Definities

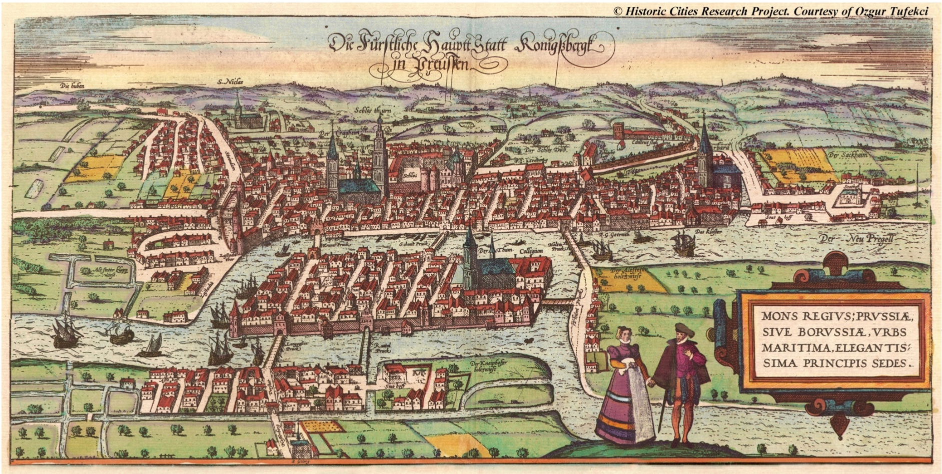
Een **graaf** bestaat uit punten die wel of niet met elkaar verbonden zijn. De punten noemen we **knopen** (of toppen). De verbindingen tussen knopen worden **bogen** genoemd.

In een **enkelvoudige graaf** worden elke twee knopen met elkaar verbonden door hoogstens één boog. Zijn er knopen die door meer dan één boog met elkaar verbonden worden, dan spreekt men van een **multigraaf**.

We noemen het aantal knopen in een graaf G of dus het aantal elementen van de verzameling V de **orde** van de graaf G.
Het aantal bogen of dus het aantal elementen van E is de **grootte** van de graaf G.

Opdracht 1

Literatuurstudie: de zeven bruggen van Königsberg



De wijze waarop Euler het probleem over de zeven bruggen van Königsberg oploste, is het historisch startpunt van de nieuwe 'meetkunde van situaties' dat nu uitgegroeid is tot de grafentheorie.

Zoek op waarover het probleem over de zeven bruggen van Königsberg gaat. Situeer het ontstaan van de grafentheorie in plaats en tijd.

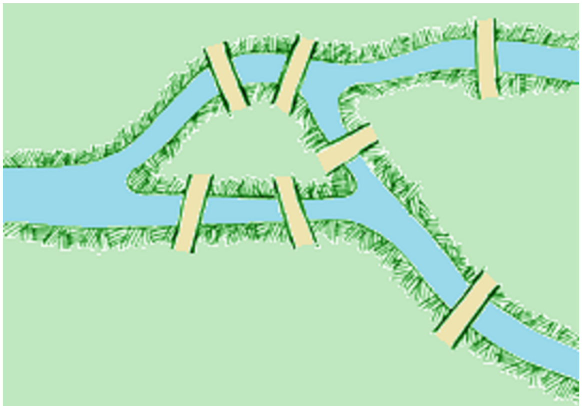
Zoek nog geen oplossing van het probleem op maar zoek zelf naar een manier om door de stad te wandelen zodat je iedere brug juist één keer volledig oversteekt (een brug half oversteken en terugkeren is verboden).

Opdracht 2

De zeven bruggen van Königsberg: een abstract model

Om het vraagstuk zo efficiënt mogelijk aan te pakken, laten we overbodige details uit de tekening weg en houden enkel de essentiële informatie, nodig om het probleem op te lossen, over. We zoeken m.a.w. een zo eenvoudig mogelijk model van het probleem. De zoektocht naar een geschikt model en in het bijzonder het weglaten van irrelevante details noemen we abstraheren. Op die manier maken we de overstap van een reële situatie naar een ideaal of abstract model. Dit is een kernactiviteit binnen de wiskunde.

Een eerste abstractie doet zich voor bij de overgang van de eerste naar de onderstaande figuur. De hoeveelheid en de vorm van de huizen is immers onbelangrijk voor ons vraagstuk. We hebben ze dus weggelaten.



Maar kunnen we nog verder gaan? Is het essentieel om te weten dat de bruggen over een rivier gelegd zijn of mag het ook een spoorweg of om het even welke andere hindernis zijn? Maakt de vorm van de brug of de vorm en de grootte van de stadsdelen uit?

Maak hieronder een tekening van een abstract model m.b.v. een graaf voor dit vraagstuk en vertaal het originele vraagstuk nu in termen van dit abstract model.

Theorie 1

Wandelingen en sporen

Om het bruggenprobleem van Königsberg beter te formuleren in de context van grafen, voeren we eerst nog enkele begrippen in.

Definities

Een **wandeling** door een graaf is een rij van aaneensluitende bogen, d.w.z. twee opeenvolgende bogen hebben steeds een uiteinde gemeen.

Een **spoor** is een wandeling waarbij geen bogen meer dan eenmaal worden doorlopen.

Een **euleriaans spoor** is een spoor die alle bogen van de graaf precies eenmaal doorloopt.

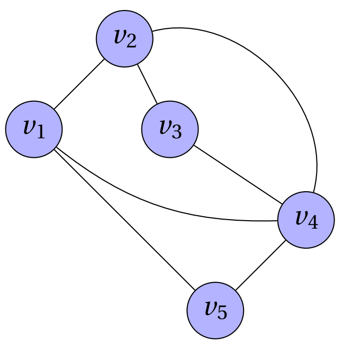
Een graaf is **samenhangend** als er voor elk paar knopen een wandeling van de ene knoop naar de andere bestaat, m.a.w. als elke knoop bereikbaar is vanuit elke andere knoop.

Notatie

Een wandeling W wordt genoteerd als een aantal geordende bogen die opeenvolgend doorlopen worden.
Bij een enkelvoudige graaf kan een wandeling ook genoteerd worden a.d.h.v. de knopen die opeenvolgend verbonden worden.

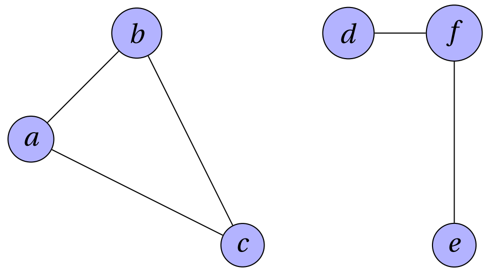
Voorbeelden

1. Beschouw de enkelvoudige graaf G met
   knopen $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ en
   bogen $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_1v_4, v_1v_5, v_4v_5\}$.
   Dus de orde van deze graaf G is 5 en de grootte is 7.



Een wandeling in deze graaf G is bv. $W_1 = (v_1, v_4, v_2, v_3, v_4, v_1, v_5)$.
Dit is geen spoor omdat boog $v_1 v_4$ tweemaal wordt doorlopen.
De wandeling $W_2 = (v_1, v_5, v_4, v_2, v_3, v_4)$ is wel een spoor omdat geen enkele boog meer dan eenmaal wordt doorlopen.

2. Onderstaande graaf K is niet samenhangend.
Er bestaat bv. geen wandeling van a naar f.



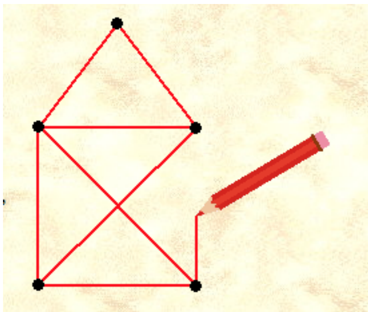
Opdracht 3

Herformuleer het bruggenprobleem van Königsberg m.b.v. grafen.

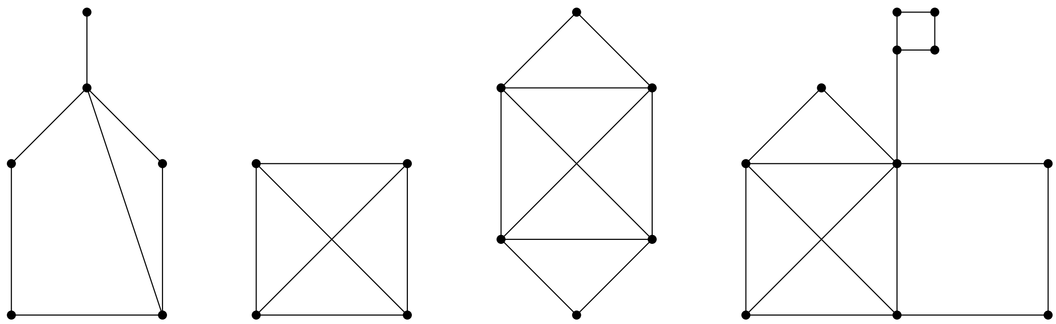
Opdracht 4

Euleriaanse sporen

Kinderen zoeken zonder het te beseffen euleriaanse sporen. Het spelletje waarbij een huisje moet worden getekend zonder het potlood op te heffen en zonder meermaals over dezelfde lijn te gaan is een poging om een euleriaans spoor te tekenen.



1. Ga na dat je inderdaad dit ‘kruishuisje’ kan tekenen door elke lijn precies eenmaal te doorlopen en zonder je potlood op te heffen.
2. Onderzoek welke van onderstaande figuren je kan tekenen zonder je potlood op te heffen en zonder tweemaal over dezelfde lijn te gaan.



3. Probeer de oorzaak te achterhalen waarom het bij de ene figuur lukt en bij de andere niet.

Theorie 2

Graad van een knoop en naburige knopen

Om de nodige en voldoende voorwaarde te verwoorden in termen van grafen opdat een graaf en eulerspoor bevat, voeren we nog enkele begrippen in.

Definities

Het aantal bogen dat in een knoop v vertrekt (of aankomt) noemen we de **graad** van de knoop.

Naburige (of adjacente) knopen zijn twee knopen die verbonden zijn door een boog.

Gevolg

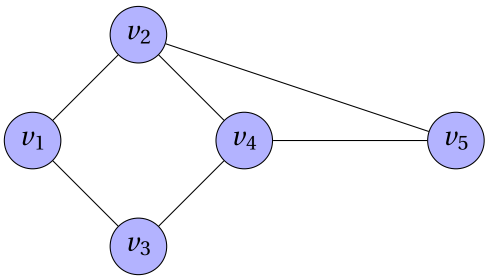
De graad van een knoop in een enkelvoudige graaf is het aantal naburige knopen.

Notatie

De graad van een knoop v wordt genoteerd als $\deg(v)$ (van het Engelse *degree*).

Opmerking: de graad van een knoop is steeds even of oneven.

Voorbeeld



De graad van v_1 is 2, of kort genoteerd: $\deg(v_1) = 2$.
Verder geldt hier: $\deg(v_2) = 3$, $\deg(v_3) = 2$, $\deg(v_4) = 3$, $\deg(v_5) = 2$.
De knopen v_1 en v_2 zijn buren of naburige knopen, v_1 en v_4 zijn geen buren.

Opdracht 5

Oplossen van het bruggenprobleem van Königsberg

1. Formuleer de stelling die de nodige en voldoende voorwaarde geeft opdat een samenhangende graaf een euleriaans spoor bevat.

2. Ga nu zelf na of een wandeling in Königsberg mogelijk is waarbij elke brug precies eenmaal wordt doorlopen.

3. Kan je door een brug bij te bouwen wel een euleriaans spoor bekomen?

4. Kan je door een brug af te breken wel een euleriaans spoor bekomen?

Theorie 3

Euleriaans circuit en eulergraaf

We kunnen aan dergelijke problemen een extra eis toevoegen: begin- en eindknoop moeten samenvallen. In dit geval zijn we op zoek naar een gesloten euleriaans spoor of euleriaans circuit.

Definities

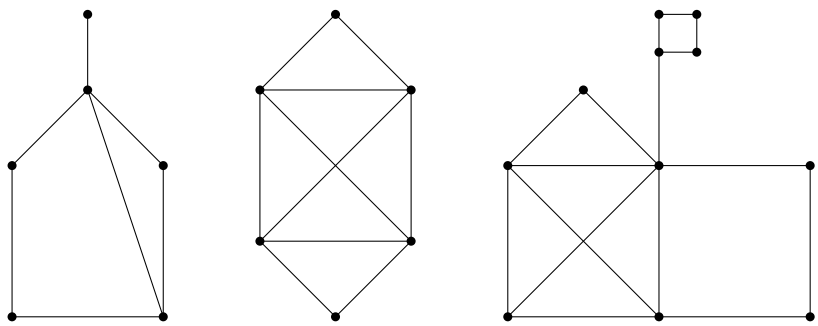
Een gesloten spoor of **circuit** is een spoor dat vertrekt en eindigt in dezelfde knoop.

Een gesloten euleriaans spoor of **euleriaans circuit** is een circuit waarbij elke boog in de graaf precies éénmaal wordt doorlopen.

Een **eulergraaf** is een graaf die een euleriaans circuit bevat.

Opdracht 6

1. We bekijken de grafen uit de eerste onderzoeksopdracht opnieuw. Welke van onderstaande grafen is een eulergraaf?



2. Pas de formulering van de stelling omtrent de nodige en voldoende voorwaarde voor een euleriaans spoor aan zodat je een euleriaans circuit bekomt.
3. Kan je door één of meerdere bruggen bij te bouwen een euleriaans circuit bekomen in Königsberg?