

Hamiltongraaf via onderzoeksoopdrachten

Voorkennis

Deze onderzoeksoopdrachten vormen een alternatief voor de start van module 3 uit de syllabus. Er wordt gesteund op volgende kennis en vaardigheden:

- definitie graaf, knoop, boog (module 1 blz. 5)
- definitie planaire graaf (module 2 blz. 32)
- modelleren van verschillende situaties m.b.v. grafen (module 2)

Definities

Een **graaf** bestaat uit punten die wel of niet met elkaar verbonden zijn. De punten noemen we **knopen** (of toppen). De verbindingen tussen knopen worden **bogen** genoemd.

Een graaf noemen we **planair** als ze visueel voorgesteld kan worden zonder dat bogen elkaar snijden (behalve in een knoop)

Die voorstelling noemen we de **vlakke voorstelling** van de graaf.

Opdracht 1

Een reis rond de wereld

Sir William Rowan Hamilton was een Ierse wiskundige uit de 19^{de} eeuw. Hij was professor astronomie aan de *Trinity College* te Dublin, en zelfs 'Royaal Astronoom van Ierland'. Ondanks diverse academische verwezelijkingen binnen de fysica, is zijn naam binnen de wiskunde vooral blijven hangen vanwege... een spelletje.



Het spelletje heette '*Traveller's dodecahedron: A voyage around the world*' (dodecaëder van de reiziger: een reis rond de wereld) en bestond uit een houten object in de vorm van een paddenstoel, met daarop 20 spelden. Elke speld stelt een wereldstad voor, die jij als reiziger wil bezoeken. Aan de hand van een zijden draad moest de speler erin slagen, vertrekkend vanuit één speld, een pad te vormen langs alle 20 spelden – zónder tweemaal langs dezelfde speld te passeren – om opnieuw uit te komen bij de speld waar men vertrok. Zoals de naam van het spel verradt, is de vorm van de paddenstoel afgeleid van een dodecaëder, met op elk hoekpunt een speld.

1. Zoek op welk soort ruimtelichaam een dodecaëder is. Hoe zien de zijvlakken er uit?
2. Hoeveel hoekpunten en hoeveel ribben telt een dodecaëder?
3. Op bijgevoegd blad (*eventueel afdrukken op A3-formaat*) zie je een ontvorming van een dodecaëder. Vouw een dodecaëder en kleef de flapjes vast, zodat een tamelijk stevig ruimtelichaam ontstaat.

4. Neem een dikke stift. Vertrek vanuit eender welk hoekpunt en markeer dit hoekpunt met een andere kleur.
Probeer alle hoekpunten te verbinden via de ribben. Zorg ervoor dat je elk hoekpunt precies eenmaal passeert. Je moet bovendien eindigen in het hoekpunt waar je bent gestart.
5. Misschien slaag je in de laatste opdracht, misschien niet. Doordat je de opdracht moet uitvoeren op een ruimtelichaam is het moeilijk om het overzicht te bewaren over welke hoekpunten je wel of niet bent gepasseerd.

Als we elk hoekpunt van een dodecaëder associëren met een knoop en elke ribbe met een boog, en vervolgens deze graaf projecteren op een vlak, dan bekomen we een vlakke voorstelling van een dodecaëder met behulp van een planaire graaf.

Teken hieronder deze planaire graaf zonder dat de bogen elkaar snijden. Hou rekening met aantal hoekpunten (knoopen) en aantal ribben (bogen) van de dodecaëder om de graaf te tekenen. Bekijk aandachtig hoeveel ribben samenkomen in elk hoekpunt. Wat betekent dit voor de graden van de knopen?

6. Deze voorstelling van een dodecaëder was zelfs de oorspronkelijke vorm van het spel. Neem een stuk isomo/kurken plankje/prikbordje, voldoende kospelden/pinnetjes en een touwtje. De kospelden/pinnetjes stellen de knopen voor. Je prikt ze overeenkomstig de planaire graaf die je tekende.

Maak het touwtje vast aan één van de kospelden. Verbind met het touwtje alle kospelden waarbij je

- elke kospeld precies eenmaal passeert (maak een lusje rond elke kospeld),
- ervoor zorgt dat de draden elkaar niet snijden,
- eindigt in de kospeld/het pinnetje waar je gestart bent met het touwtje.

Je zal merken dat het probleem makkelijker kan worden opgelost m.b.v. de vlakke voorstelling dan door gebruik te maken van de dodecaëder.

Deze vlakke variant van het spel 'een reis rond de wereld' sloeg dan ook niet aan bij haar kopers, omdat het simpelweg te gemakkelijk is en je relatief snel een cyclische route bedenkt die geen enkele knoop meerdere keren bezoekt. Daarom bedacht Hamilton de paddenstoelvariant.

Dergelijke route zal echter niet in elke graaf aanwezig is (denk maar aan een graaf met een knoop van graad 1). Vandaar komt de naam **hamiltongraaf**, speciaal voor grafen waar zo'n route wel mogelijk is. Om dit soort problemen, waarbij elke knoop precies eenmaal moet worden bereikt, te herformuleren m.b.v. grafen voeren we enkelen nieuwe begrippen in.

Theorie 1

Paden, cykels en hamiltongrafen

Definities

Een **pad** is een wandeling waarbij geen knopen meer dan eenmaal worden doorlopen.

Een **hamiltoniaans pad** is een pad dat alle knopen doorloopt.

Een gesloten pad of **cykel** is een pad dat vertrekt en eindigt in dezelfde knoop.

Een **hamiltoniaanse cykel** is een cykel dat alle knopen doorloopt.

Een **hamiltoniaanse graaf** of **hamiltonograaf** is een graaf die een hamiltoniaanse cykel bevat.

Hamiltoniaanse grafen zijn een typevoorbeeld waarbij een concreet planningsprobleem (of in dit geval: een spelletje) geleid heeft tot de definitie van een abstracte, graaftheoretische eigenschap.

Opdracht 2

Herformuleer aan de hand van deze definities het doel van het spel 'een reis rond de wereld'.

Dodecahedron

