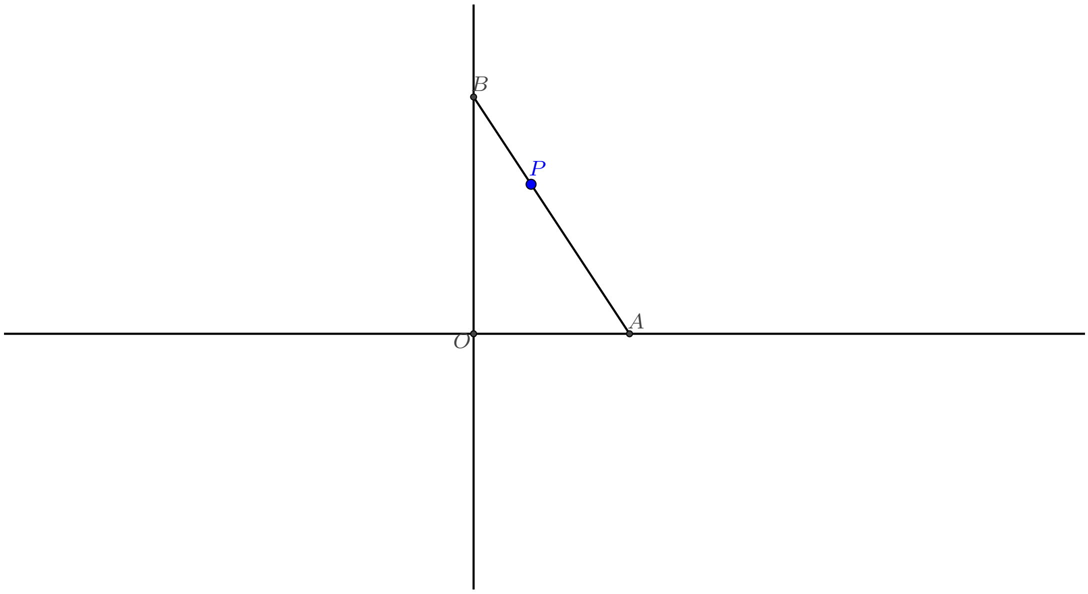
Baan van een punt van een glijdende staaf

versie voor de leerkracht

1 Probleemstelling

Beschouw een lijnstuk $[AB]$ met vaste lengte l waarvan de uiteinden A en B glijden langs twee loodrechte assen. Kies op dit lijnstuk een vast punt P. We zoeken de baan van dit punt P als de staaf $[AB]$ beweegt langs de twee loodrechte glijders.



2 Constructie van het bijbehorend tekeninstrument

2.1 Papier

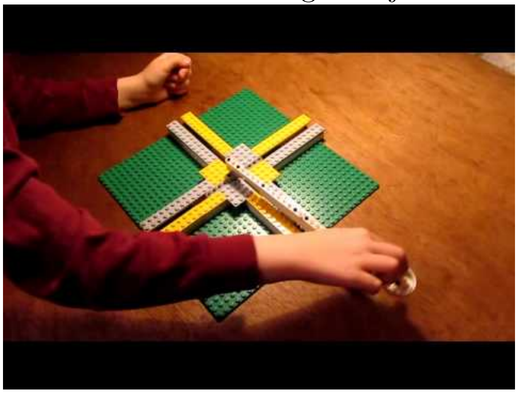
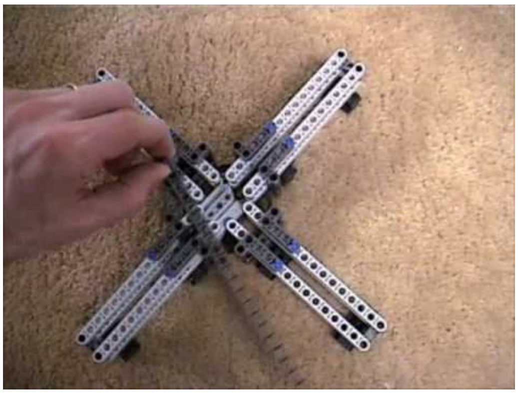
Leerlingen kunnen de opdrachten op papier onderzoeken door meerdere posities van de glijdende staaf en het vast punt P te tekenen.

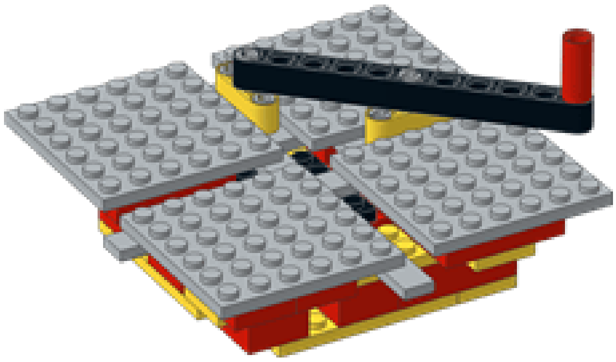
2.2 Geogebra

Leerlingen kunnen gebruik maken van het Geogebrabestand *glijdende staaf.ggb* waarin een staaf $[AB]$ beweegt in eerste en tweede kwadrant of van het Geogebrabestand *ellipspasser.ggb* waarin er tegelijk ook een staaf in derde en vierde kwadrant beweegt.
Het kan een extra opdracht zijn om leerlingen zelf een Geogebrabestand te laten maken waarmee ze de onderzoeksopdrachten kunnen uitvoeren.

2.3 Bouwdoos

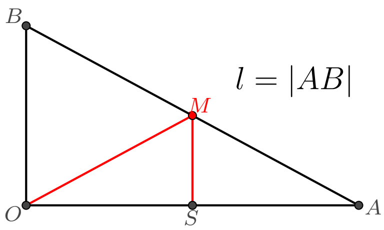
Leerlingen kunnen met behulp van een bouwdoos een dergelijk tekeninstrument maken, bv. met Lego: https://www.youtube.com/watch?v=UCtijEtzSRM of
https://www.youtube.com/watch?v=IcZBkecJBeI of
http://jkbrickworks.com/lego/customs/1520/1520trammel.pdf?x84406.
Bestellen van losse Legoblokjes kan via www.bricklink.com.

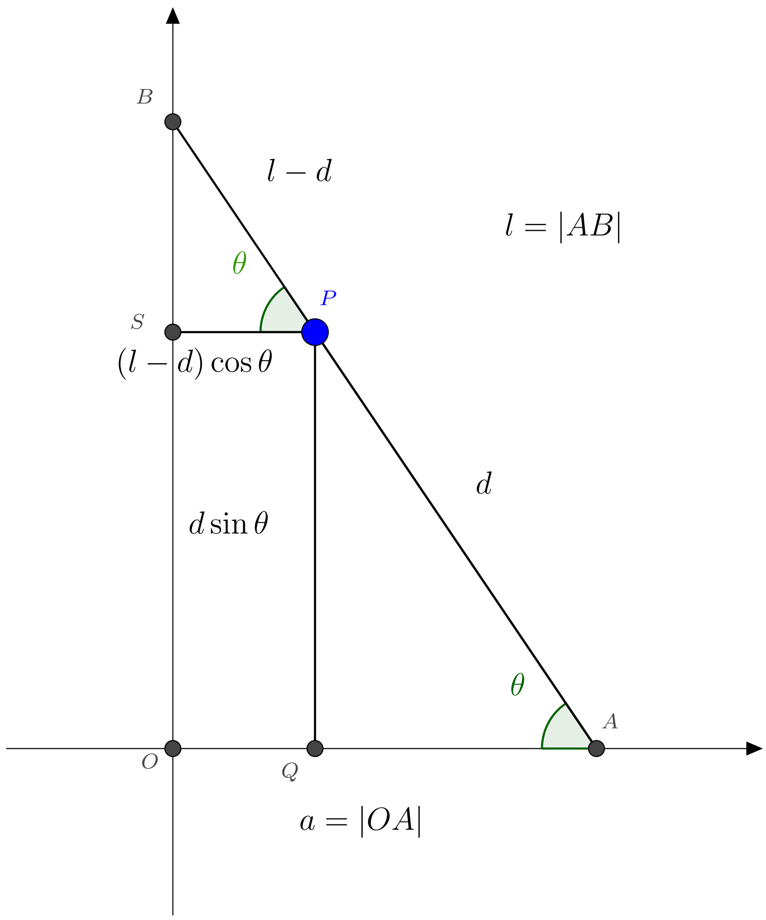


3 Onderzoeksopdrachten

1. Welke kromme wordt door het midden M van het lijnstuk $[AB]$ beschreven?
   antwoord: cirkel, of als gebruik wordt gemaakt van het Geogebrabestand 'glijdende staaf.ggb': halve cirkel
2. Bewijs dat je antwoord op de vorige vraag correct is.
   antwoord:

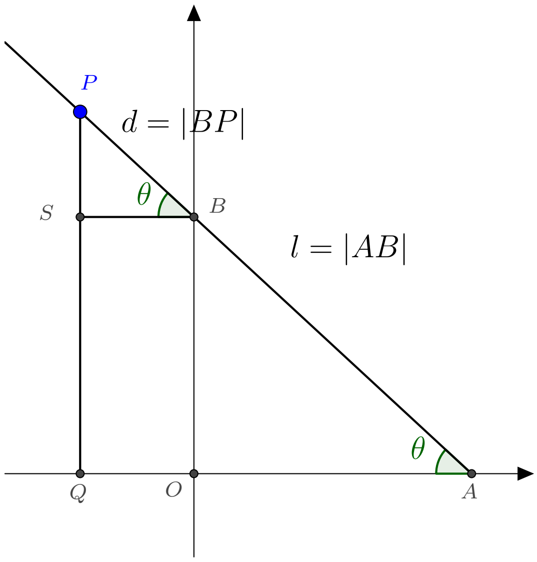
   

   Beschouw $MS \perp OA$, dan geldt: $\triangle OMS \cong \triangle AMS$ waardoor $|OM| = |MA| = \dfrac{l}{2}$, m.a.w. M beschrijft een cirkel met middelpunt O en straal $\dfrac{l}{2}$.
3. Welke kromme wordt door P beschreven? Onderzoek dit voor staven van verschillende lengtes, alsook voor verschillende posities van het punt P. Beschrijf hoe de kromme van vorm verandert naargelang de positie van het punt P verandert.
   antwoord: ellips, of als gebruik wordt gemaakt van het Geogebrabestand glijdende staaf.ggb: halve ellips, als $P \in [AM]$ dan ligt de hoofdas van de ellips op de horizontale glijder, als $P \in [MB]$ dan ligt de hoofdas van de ellips op de verticale glijder.
4. Bewijs dat je antwoord op de vorige vraag correct is.
   antwoord:



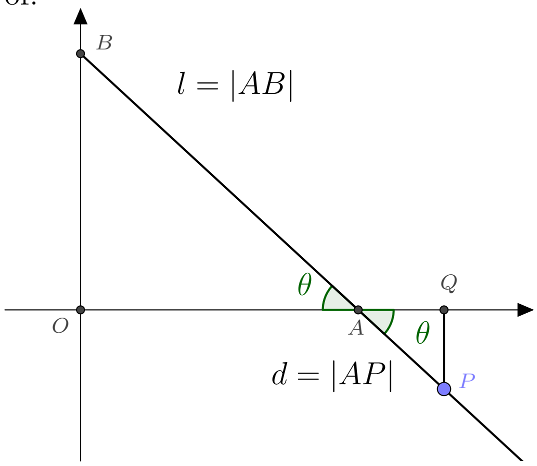
P heeft coördinaat $((l-d)\cos\theta, d\sin\theta)$ en voldoet aan de vergelijking van de ellips: $\dfrac{x^2}{(l-d)^2}+\dfrac{y^2}{d^2}=1$

5. Onderzoek of je eenzelfde kromme krijgt als P zich op de drager van het lijnstuk $[AB]$ ligt, maar niet meer tussen A en B. Bewijs.
antwoord: ook hier krijgen we telkens een ellips



P heeft coördinaat $(-d\cos\theta, (l+d)\sin\theta)$ en voldoet aan de vergelijking van de ellips: $\dfrac{x^2}{d^2} + \dfrac{y^2}{(l+d)^2} = 1$

of:



P heeft coördinaat $((l+d)\cos\theta, -d\sin\theta)$ en voldoet aan de vergelijking van de ellips: $\dfrac{x^2}{(l+d)^2} + \dfrac{y^2}{d^2} = 1$

Het gebruikte tekeninstrument wordt een **Ellipspasser** genoemd, of in het Engels '**Trammel of Archimedes**'.

Referenties

SpiroSporen, Zebrareeks deel 38, Epsilon Uitgaven
http://jkbrickworks.com/skating-penguin/