Phasenübergänge in Logik und Kombinatorik

von Andreas Weiermann

Ein Hauptziel der Beweistheorie besteht darin, die Grenzen der Beweiskraft mathematischer Theorien zu klassifizieren. Die hierbei auftretenden Phasenübergänge von Beweisbarkeit zu Unbeweisbarkeit sind sowohl aus grundlagentheoretischer als auch aus mathematischer Sicht interessant. Es ist höchst überraschend, dass bei diesen Untersuchungen Methoden aus der analytischen Zahlentheorie, der kombinatorischen Wahrscheinlichkeitstheorie, der komplexen Analysis und der Ramseytheorie zum Einsatz kommen. Wir erläutern das zugrundeliegende Forschungsprogramm, das wir auf der DMV-Tagung 2004 in zwei Vorträgen[1] vorstellten, exemplarisch an einigen Beispielen und geben einige Ausblicke.

1 Phasenübergänge und der Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Das Phänomen des Phasenübergangs ist vor allem bekannt aus der statistischen Physik [4], aber auch aus der Theorie der Perkolation [12], der Theorie der Zufallsgraphen [1] und Untersuchungen zum Erfüllbarkeitsproblem [5]. Überraschende Querverbindungen dieser Gebiete untereinander wurden kürzlich in [18] diskutiert.

In diesem Artikel behandeln wir Phasenübergänge im Kontext der Gödelschen Unvollständigkeitssätze [10] und daraus resultierende Anwendungen auf die aus der Kombinatorik bekannte [11] Ramseyfunktion.

Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz besagt vereinfacht gesagt, dass zu jedem halbwegs vernünftigen mathematischen System, dass die Peanoaxiome erweitert, eine Aussage A existiert, so dass A wahr ist, aber in dem System nicht beweisbar ist.

Für mathematisch relevante Aussagen A ist die resultierende Instanz des Gödelschen Satzes von besonderem Interesse. Herausragende Beispiele sind hier einige Resultate, die auf G. Gentzen [8], J. Paris & L. Harrington [20] und H. Friedman [24] zurückgehen. Diese wurden zum Teil von Gina Kolata in ihrem Science-Beitrag „Does Gödel's theorem matter to mathematics" [15] ausführlich besprochen und wir werden in der Folge noch ausführlicher auf diese zurückkommen.

Um den Kontext zu fixieren, wollen wir die Peanoaxiome PA kurz erläutern. Die Axiome von PA sind so gewählt, dass möglichst jede in den natürlichen Zahlen wahre Aussage aus den Axiomen von PA folgen sollte. Die Sprache von PA enthält eine Konstante 0 für die natürliche Zahl Null, ein Funktionszeichen S für die Nachfolgerfunktion, und die Funktionssymbole $+, \cdot$ für Addition und Multiplikation, sowie ein Relationszeichen P, das zur impliziten Quantifikation über beliebige Teilmengen von natürlichen Zahlen verwendet wird. (Das Relationszeichen P spielt zunächst keine Rolle und wird lediglich in Abschnitt 3 zur Formulierung der transfiniten Induktion verwendet.) Die mathematischen Axiome von PA beschreiben elementare Eigenschaften von $0, S, +, \cdot$. Wesentlich ist, dass PA auch das Schema der vollständigen Induktion für jede Formel φ in der Sprache von PA enthält:

$$\varphi(0)\&(\forall x)[\varphi(x) \to \varphi(x+1)] \to (\forall x)\varphi(x)$$

Wir sagen, dass eine Aussage A aus PA folgt, bzw. in PA beweisbar ist, wenn A in allen Modellen von PA gilt. (Dies ist völlig analog zur üblichen Mathematik. Eine Aussage A folgt aus den Axiomen der Gruppentheorie, wenn A in allen Gruppen gilt.) Das Axiomensystem PA ist relativ stark und es wurde gezeigt, dass sich große Teile der abzählbaren Mathematik in PA entwickeln lassen [25].

Zur Einführung des Phasenübergangs für Instanzen des Gödelschen Satzes angewendet auf die Peanoaxiome PA nehmen wir an, dass wir eine Aussage A aus der Sprache von PA vorliegen haben, die von einem Parameter $r \in \mathbb{Q}$ (auf den man in PA via Kodierung ohne weiteres Bezug nehmen kann) abhängt, so dass $A(r)$ für kleine r in PA beweisbar und für große r in PA unbeweisbar ist. Zudem sei A in dieser Hinsicht monoton, d. h. falls $A(r)$ beweisbar ist und $s < r$ so ist auch $A(s)$ beweisbar. Daraus folgt auch, dass $A(s)$ unbeweisbar ist, falls $s > r$ und $A(r)$ unbeweisbar ist. Eine Klassifikation des Phasenübergangs besteht in der Berechnung des Infimums der Menge aller $r \in \mathbb{Q}$ mit PA beweist $A(r)$. Falls diese Berechnung nicht möglich ist, versucht man Zahlen a, b zu finden, so dass $A(r)$ für $r < a$ beweisbar und für $r > b$ unbeweisbar ist und a, b geringen Abstand haben. Hier heiße $]a, b[$ dann Übergangsintervall.

Wir werden später ein Beispiel angeben, wo der Phasenübergang exakt klassifizierbar ist. Ohne ins Detail zu gehen, wollen wir anmerken, dass es möglich ist, Aussagen A zu finden bei denen das Übergangsintervall von zahlentheoretischen Hypothesen, wie etwa der *abc*-Vermutung und der Riemannschen Vermutung abhängen. In diesem Falle gibt es relle Zahlen

1 Überraschende Zusammenhänge zwischen den Gödelschen Sätzen und analytischer Zahlentheorie, Sektion Zahlentheorie; sowie: Analytische Kombinatorik des Transfiniten, Sektion Logik und Theoretische Informatik

$a < a' < b' < b$, so dass $]a, b[$ ohne weitere Hypothesen das Übergangsintervall für A ist und so dass etwa unter der Riemannschen Vermutung $]a', b'[$ in nichttrivialer Weise das Übergangsintervall für A ist. Resultate dieser Art können verwendet werden, um mit Mitteln der Logik unbewiesene Vermutungen aus der Zahlentheorie zu widerlegen. Vielleicht ergibt sich hiermit ein Zugang zu Vermutungen wie der Cramerschen Vermutung über die Primzahldichte. Diese Vermutung, die im Gegensatz zur Riemannschen Vermutung vielfach bezweifelt wird, besagt, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{(\log(p_n))^2} = 1.$$

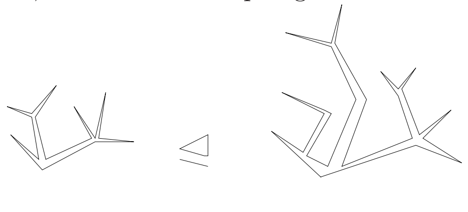
Etwas allgemeiner kann man den Phasenübergang für Aussagen A studieren, die von einem Funktionsparameter abhängen. Dabei geht man von der Situation aus, dass für sehr langsam wachsende F die Aussage $A(F)$ beweisbar und für schneller wachsende F die Aussage $A(F)$ unbeweisbar ist. Hier besteht das Klassifikationsproblem in dem Auffinden einer Schwellenwertfunktion für die Beweisbarkeit von $A(F)$. Wie vorher nehmen wir an, dass $A(F)$ in geeigneter Weise monoton in F ist.

In Analogie zur statistischen Mechanik stellt sich hier die Frage nach Universalität und Renormalisation. Es zeigt sich, dass in vielen Beispielen die Schwellenwertfunktion einer recht simpel definierten Skala entstammt und dass die Schwellenwertfunktion oft stabil unter Reskalierungen ist.

Wir halten es ferner für ein interessantes Problem, Beziehungen zwischen den von uns betrachteten Phasenübergängen und dem Kohlenbachschen *proof mining* [14] herzustellen. Hier erwarten wir weitere interessante Anwendungen der Logik in der Mathematik.

2 Phasenübergänge für Kruskals Satz

Um den Kruskalschen Satz zu diskutieren, legen wir zunächst den Kontext fest. Ein endlicher Baum $\mathcal{B}$ ist eine endliche partielle Ordnung $\langle B, \leq_B \rangle$, so dass für jedes $b \in B$ die Menge $\{b' \in B : b' \leq_B b\}$ durch $\leq_B$ linear (total) geordnet ist und so dass $\mathcal{B}$ ein Minimum, die Wurzel, besitzt. Zu zwei Knoten $b, b' \in B$ existiert dann ein Infimum, das wir mit $b \wedge_{\mathcal{B}} b'$ bezeichnen. Wir sagen, dass ein Baum $\mathcal{B}$ in einen Baum $\mathcal{B}'$ einbettbar ist und schreiben $\mathcal{B} \trianglelefteq \mathcal{B}'$, falls es eine injektive Funktion $h : B \to B'$ gibt mit $h(b \wedge_{\mathcal{B}} b') = h(b) \wedge_{\mathcal{B}'} h(b')$ für alle $b, b' \in B$. Zum Beispiel gilt:



Kruskals Satz besagt, dass für jede unendliche Folge $(\mathcal{B}_i)_{i=0}^{\infty}$ von endlichen Bäumen zwei natürliche Zahlen i, j existieren mit $i < j$ und $\mathcal{B}_i \trianglelefteq \mathcal{B}_j$.

Wir bezeichnen die Kardinalität eines endlichen Baumes, d. h. die Anzahl seiner Knoten, mit $|\mathcal{B}|$. Mittels eines Kompaktheitsarguments erhält man aus Kruskals Satz eine Aussage über endliche Folgen natürlicher Bäume. Für $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei $\mathrm{FKT}(F)$ die Aussage: Zu jedem $K \in \mathbb{N}$ existiert $M \in \mathbb{N}$, so dass für jede Folge $(\mathcal{B}_i)_{i=0}^{M}$ von endlichen Bäumen mit $(\forall i \leq M)[|\mathcal{B}_i| \leq K + F(i)]$ Indizes $i, j \in \mathbb{N}$ existieren mit $i < j$ und $\mathcal{B}_i \trianglelefteq \mathcal{B}_j$.

Friedman zeigte, dass $\mathrm{FKT}(id)$ nicht aus PA folgt. (id bezeichne hierbei die Identität.) Andererseits zeigt ein Zählargument, dass für konstante Funktionen F mit Wert c die Aussage $\mathrm{FKT}(F)$ sehr wohl aus PA folgt. Für die Schwellenwertfunktion S zu FKT gilt daher $c \leq S(i) \leq i$ für alle bis auf endlich viele $i \in \mathbb{N}$. (Hierbei gehen wir stillschweigend davon aus, dass wir lediglich schwach wachsende Schwellenwertfunktionen betrachten wollen.)

Dieses Resultat konnte in der Folge durch ein Ergebnis von Jiří Matoušek und Martin Loebl deutlich verbessert verbessert werden. Mit $|i|$ bezeichnen wir die binäre Länge von i und wir setzen $F_\alpha(i) := \alpha \cdot |i|$. Matoušek und Loebl [17] zeigten, dass für $\alpha \leq \frac{1}{2}$ die Aussage $\mathrm{FKT}(F_\alpha)$ aus PA folgt, aber dass für $\alpha \geq 4$ die Aussage $\mathrm{FKT}(F_\alpha)$ in PA unbeweisbar ist.

Es ist in dieser Situation naheliegend, nach der Schwellenwertfunktion (bzw. dem Schwellenwert für α) zu fragen. Völlig überraschend ergibt sich folgendes Resultat [27]. Es sei

$$T(z) := \sum_{n=0}^{\infty} t_n \cdot z^n$$

die Potenzreihe, für die

$$T(z) = z \cdot \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{T(z^i)}{i}\Big)$$

gilt.

Sei ρ der Konvergenzradius von T, mit $1 > \rho > 0$. Setze

$$c := -\frac{1}{\log_2(\rho)}.$$

Ist $\alpha \leq c$, so folgt $\mathrm{FKT}(F_\alpha)$ aus PA und ist $\alpha > c$, so ist $\mathrm{FKT}(F_\alpha)$ in PA unbeweisbar.

Anscheinend ist damit eine vollständige Klassifikation gelungen. Man kann aber ohne weiteres versuchen, den Phasenübergang noch genauer zu skalieren. Setzt man etwa $G_\delta(i) := c \cdot |i| + \delta \cdot ||i||$, so könnte man den Übergang in Abhängigkeit von δ untersuchen. Es ist leicht zu sehen, dass für $\delta < c \cdot \frac{3}{2}$ die Aussage $\mathrm{FKT}(G_\delta)$ in PA beweisbar ist. Es gibt gewisse

Anhaltspunkte dafür, dass für $\delta > c \cdot \frac{5}{2}$ die Aussage $\mathrm{FKT}(G_\delta)$ in PA unbeweisbar ist.

3 Phasenübergänge für ε_0

In der naiven Mengenlehre benutzt man Ordinalzahlen zum Zählen ins Transfinite. Die Ordinalzahlen beginnen mit $0, 1, 2, 3, \ldots$. Nach unendlich vielen Schritten erreicht man den ersten Limespunkt ω und man fährt fort mit $\omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots$. Wir gelangen zu $\omega^2, \omega^3, \omega^4, \ldots$ und schließlich zu ω^ω. Mit mehr und mehr Aufwand gelangt man schliesslich zu $\omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots$. Schliesslich erreicht man ε_0 als Limes der Folge $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega} \ldots$.

Je weiter man auf diese Weise fortschreitet, desto obskurer wird der zugrundeliegende Zählprozess. Daher erscheint es sinnvoll, den Prozess neu aufzurollen und die Ordinalzahlen bis ε_0 mathematisch präziser zu fassen, ohne auf Mengenlehre zurückzugreifen. Die gewünschte Beschreibung gelingt mit Hardys Ordnungen des Transfiniten. Sie ist elementar und sollte sogar Gymnasiasten einsichtig sein.

Sei $\mathcal{E}$ die kleinste Menge von Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass

1. $x \mapsto 0 \in \mathcal{E}$,
2. Mit $f, g \in \mathcal{E}$ ist auch $x \mapsto x^{f(x)} + g(x)$ in $\mathcal{E}$.

Zu $f, g \in \mathcal{E}$ definieren wir $f \prec g$ falls es ein $K \in \mathbb{N}$ gibt mit $f(m) < g(m)$ für alle $m \geq K$, d.h. falls f schließlich durch g majorisiert wird.

Sei k_n die Funktion $x \mapsto n$ und sei ω die Funktion $x \mapsto x$. Ferner seien $+$, $\cdot$ und Exponentiation auf $\mathcal{E}$ durch punktweise Operation erklärt. Wir beobachten: $k_0 \prec k_1 \prec k_2 \prec \ldots \prec \omega \prec \omega + k_1 \prec \omega + k_2 \prec \ldots \prec \omega + \omega \prec \ldots \prec \omega + \omega + \omega \prec \ldots \prec \omega^{k_2} \prec \ldots \prec \omega^{k_3} \prec \ldots \prec \omega^\omega \prec \ldots \prec \omega^{\omega^\omega} \prec \ldots$ und man kann zeigen, dass der Ordnungstypus von $\mathcal{E}$ bezüglich $\prec$ exakt ε_0 ist. Daher können wir ε_0, oder damit äquivalent den Ordinalzahlabschnitt bis ε_0 mit der Ordnung $\langle \mathcal{E}, \prec \rangle$ identifizieren.

Problemlos verifiziert man, dass $\langle \mathcal{E}, \prec \rangle$ eine lineare Ordnung ist. Zudem existieren zu $f \in \mathcal{E}$ mit $f \neq k_0$ eindeutig bestimmte $f_1, \ldots, f_n$ mit $f = \omega^{f_1} + \ldots + \omega^{f_n}$ und $f_n \preceq \ldots \preceq f_1$. Wir schreiben in diesem Fall $f =_{NF} \omega^{f_1} + \ldots + \omega^{f_n}$ und sprechen von einer Normalform für f. Diesen Normalformsatz kann man benutzen, um die Funktionen aus $\mathcal{E}$ mit ihren Termdarstellungen zu identifizieren.

Die Ordnung $\langle \mathcal{E}, \prec \rangle$ ist eine Wohlordnung, d. h. zu jedem nichtleeren $X \subseteq \mathcal{E}$ existiert $f \in X$, so dass $\neg\, g \prec f$ für alle $g \in X$, oder äquivalent: Zu jeder Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathcal{E}$ existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $F(i) \preceq F(i+1)$. Das folgt direkt aus dem Kruskalschen Satz oder einem Kompaktheitsargument (Königs Lemma).

Die Ordinalzahl ε_0, oder die Struktur $\langle \mathcal{E}, \prec \rangle$, ist die sogenannte beweistheoretische Ordinalzahl (für mehr Hintergrundinformation siehe z. B. [23, 26, 22]) der Peanoaxiome PA, die von Gentzen [8] ermittelt wurde.

Sei

$$TI(\prec, P) := (\forall f (\forall g \prec f P(g)) \to P(f)) \to \forall f P(f).$$

Diese Aussage ist nach geeigneter Kodierung der Funktionsterme aus $\mathcal{E}$ in den natürlichen Zahlen eine Aussage aus der Sprache von PA. Gentzen zeigte: Die Aussage $TI(\prec, P)$ ist wahr aber unbeweisbar in PA. Präziser definieren wir eine Arithmetisierung von $\mathcal{E}$ wie folgt: Es sei p_i die i-te Primzahl für $i \geq 1$. Sei $\mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei $\lceil k_0 \rceil := 1$ und $\lceil f \rceil := p_{\lceil f_1 \rceil} \cdot \ldots \cdot p_{\lceil f_n \rceil}$, falls $f =_{NF} \omega^{f_1} + \ldots + \omega^{f_n}$. Dann ist die Abbildung $\lceil \cdot \rceil$ eine Bijektion zwischen $\mathcal{E}$ und $\mathbb{N}^+$ und wir dürfen eine Ordnung, diese sei wieder mit $\prec$ bezeichnet, auf $\mathbb{N}^+$ induzieren. Das Schema $TI(\prec, P)$ liest sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} TI(\prec, P) := (\forall n \in \mathbb{N}^+)[(\forall m \prec n P(m)) \to P(n))] \\ \to \forall n \in \mathbb{N}^+ P(n). \end{aligned}$$

Die Ordinalzahl ε_0 beschreibt einen ordinalzahltheoretischen Phasenübergang für PA insofern, als PA für jeden Anfangsabschnitt von ε_0 die transfinite Induktion beweist. Genauer beweist PA für jedes $k \in \mathbb{N}^+$ die Aussage:

$$\forall m \prec k[(\forall n \prec m P(n)) \to P(m)] \to \forall m \prec k P(m)\,.$$

Wendet man auf $TI(\prec, P)$ ein Kompaktheitsargument an so erhält man für jede Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die folgende wahre Aussage $\mathrm{FWO}(F)$:

$$\begin{aligned} (\forall K)(\exists M)(\forall m_1, \ldots, m_M \in \mathbb{N}^+)\big[(\forall i \leq M) \\ \lceil m_i \rceil \leq K + F(i) \to (\exists i < M) m_i \prec m_{i+1}\big]\,. \end{aligned}$$

Ein tiefliegendes Resultat, das im wesentlichen auf Friedman [24] zurückgeht, besagt, dass für $F(i) = 2^i$ die Aussage $\mathrm{FWO}(F)$ in PA unbeweisbar ist.

Es ist wiederum sehr natürlich, nach dem Phasenübergang für die Aussage $\mathrm{FWO}(F)$ zu fragen. Bei der Lösung des Problems zeigte es sich, dass man nahezu zwingend auf Probleme der analytischen Zahlentheorie stößt. Speziell benötigten wir asymptotische Abschätzungen für die Funktion

$$C_m(n) := \#\{l \prec m : \lceil l \rceil \leq n\}\,.$$

Sei $o_1 := 3 = \lceil \omega \rceil$ und $o_{k+1} := p_{o_k}$, so dass der Ordnungstyp von o_k ein Exponentialturm von ωs einer Höhe k ist. Speziell gilt $5 = \lceil \omega^\omega \rceil$. Man erhält die folgenden Grobabschätzungen für die analytische Kombinatorik des Transfiniten. (Für Hintergrundiformation hierzu verweisen wir auf [7, 16, 19, 21, 28, 30].)

1. $\ln(C_5(n)) \sim \pi\sqrt{\frac{2\ln(n)}{3\ln(2)}}$
2. $\ln(C_{o_{k+2}}(n)) = \Theta(\frac{\ln(n)}{\underbrace{\ln(\ldots(\ln}_{k \text{ mal}}(\ln(n)))\ldots)})$ falls $k \geq 1$.

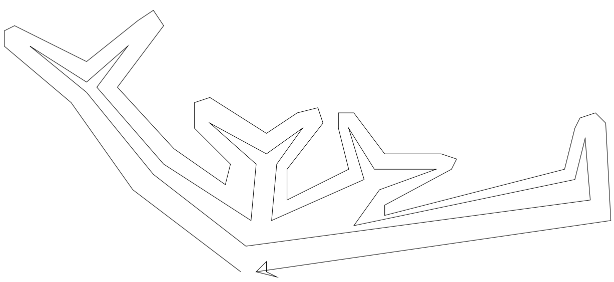
Ein in diesem Kontext naheliegendes Problem besteht darin, eine etwaige Konstante für schwache Asymptotik von $\ln(C_{o_{k+2}})$ zu bestimmen: Es gibt gewisse Anhaltspunkte für folgende Abschätzung:

$$\ln(C_{o_{k+2}}(n)) \sim \frac{\pi^2}{6\ln(2)} \frac{\ln(n)}{\underbrace{\ln(\ldots(\ln}_{k \text{ mal}}(\ln(n)))\ldots)},$$

wobei $k \geq 1$.

Sei $|i|$ wie zuvor die binäre Länge von i. Sei $|i|_1 := |i|$ und $|i|_{k+1} := ||i|_d|$ und schliesslich $\log^*(i) := \min\{d : |i|_d \leq 2\}$. Kombiniert man logische Untersuchungen mit den genannten zahlentheoretischen Abschätzungen, so erhält man folgendes Resultat über den Phasenübergänge für FWO. Ist $F(i) = 2^{|i|\cdot|i|_d}$, so ist die Aussage $\mathrm{FWO}(F)$ in PA nicht beweisbar. Ist hingegen $F(i) = 2^{|i|\cdot\log^*(i)}$, so beweist PA die Aussage $\mathrm{FWO}(F)$.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch ein weiteres Problem schildern, auf das wir bei unseren Untersuchungen gestoßen sind, und dass wir für sehr natürlich halten. Es ist bekannt, dass der Konturprozess für geordnete Bäume auf die Brownsche Exkursion führt [9]. Wir würden gerne wissen, von welcher Art der Konturprozess für $\mathcal{E}$ ist. Dieser hat aller Voraussicht nach nicht die Markoveigenschaft und ist vermutlich recht komplex.



Die Kontur zu $\omega^{\omega^2} + \omega^2 + \omega$

4 Phasenübergänge in der Ramseytheorie

Zur Diskussion von Ramseysätzen verwenden wir folgende Standardterminologie [11]. Für $m \in \mathbb{N}$ sei $[m] := \{1, \ldots, m\}$ und für eine Menge Y sei $[Y]^d$ die Menge der d-elementigen Teilmengen von Y. Wir schreiben ferner $[m]^d$ für $[[m]]^d$. Der infinitäre Satz von Ramsey besagt, dass für alle $d, c \in \mathbb{N}$ und zu jeder Partition $P : \mathbb{N}^d \to [c]$ eine unendliche Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{N}$ existiert, so dass $P \restriction [Y]^d$ konstant ist.

Mittels Kompaktheit erhält man den finiten Satz von Ramsey: Für alle $d, c, m \in \mathbb{N}$ existiert eine minimale natürliche Zahl $R =: R_c^d(m)$, so dass für alle Partitionen $P : [R]^d \to [c]$ eine Menge $Y \subseteq [R]$ existiert mit $|Y| \geq m$ und so dass $P \restriction [Y]^d$ konstant ist. Die Asymptotik der Funktion R_c^d ist in vielen Fällen noch ungeklärt. Man weiss etwa, dass für die Funktion R_3^3 folgende Abschätzungen gelten.

$$2^{m^2(\log(m))^2\cdot \text{ const}} \leq R_3^3(m) \leq 2^{2^{\text{const}\cdot m}} \qquad (1)$$

Es ist ein klassisches Erdős Problem (unseres Wissens wurden 500$ für eine Lösung ausgelobt), ob R_3^3 eine doppeltexponentielle untere Schranke besitzt.

Im Kontext der Ramseysätze ist es naheliegend zu fragen, ob man die Beweisstärke des infinitären Satzes von Ramsey aus dem finiten irgendwie (etwa durch Iteration) zurückerhalten kann, ob der infinitäre bzw. finite Satz von Ramsey zu Unabhängigkeitsresultaten führt und ob diese Untersuchungen vielleicht etwas zum Studium der Funktion R_c^d beitragen können.

Zur Untersuchung dieser Fragen betrachten wir die folgende Aussage $\mathrm{PH}(F)$: Für alle d, c, m existiert eine Zahl $R =: R_c^d(F)(m)$, so dass für alle Partitionen $P : [R]^d \to [c]$ ein $Y \subseteq [R]$ existiert mit $P \restriction [Y]^d$ ist konstant und $|Y| \geq \max\{m, F(\min(Y)\}$.

Paris und Harrington [20] zeigten, dass die Aussage $\mathrm{PH}(id)$ wahr, aber in PA unbeweisbar ist. Mit den Schranken von Paul Erdős und Richard Rado für R_c^d [6] kann man leicht einsehen, dass für konstante Funtionen F die Aussage $\mathrm{PH}(F)$ in PA beweisbar ist.

Eine genaue Beschreibung des resultierenden Phasenübergangs würde an dieser Stelle zu weit führen, und wir beschränken uns auf eine grobe Approximation.

Es gilt (siehe z. B. [29]), dass für $F(i) := \log^*(i)$ die Aussage $\mathrm{PH}(F)$ in PA beweisbar aber für jedes feste $d \in \mathbb{N}$ und die Funktion $F(i) := |i|_d$ die Aussage $\mathrm{PH}(F)$ in PA unbeweisbar ist. Entsprechende Aussagen gelten auch für die Fragmente von PA, in denen die Induktionsaxiome eingeschränkt werden. Klassifikationen der dann resultierenden Phasenübergänge basieren auf der sogenannten probabilistischen Methode [31].

Ohne ins Detail gehen zu wollen, möchten wir ferner anmerken, das man mit Methoden der Nichtstandardmodelle von PA zeigen kann [2], dass geeignete Iterationen des Paris-Harrington-Prinzips die Beweisstärke des infinitären Satzes von Ramsey erreichen. Analoge Eigenschaften und Phasenübergänge erhält man auch für den kanonischen Satz von Ramsey, den Satz von Ramsey für regressive Partitionen und und weitere Varianten [3].

Zum Schluss werfen wir noch einen Blick auf den Phasenübergang für die Funktion $R_3^3(F)$, von dem wir uns Fortschritte in der Ramseytheorie erhoffen.

Ist $\varepsilon > 0$ und $F(i) = \varepsilon \cdot \log_2(i)$, so ist die Funktion $R_3^3(F)$ nicht primitiv rekursiv beschränkt, also von gigantischem Wachstum. Ferner gibt es eine Konstante C, so dass für $F(i) := \frac{1}{C} \cdot \log_2(\log_2(i))$ gilt: $R_3^3(F)(m) \le 2^{2^{C \cdot m}}$. Bei Variation des Funktionsparameters von doppelt logarithmisch nach einfach logarithmisch findet also ein gigantischer Phasenübergang statt. Falls es gelänge, diesen exakt zu beschreiben, erhielte man Anwendungen auf die Asymptotik von R_3^3.

Zur Eingrenzung des Phasenübergangs zeigt man zunächst, dass für $F(i) := (\log_2(i))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ die Funktion $R_3^3(F)$ eine tripel-exponentielle untere Schranke besitzt. Zudem verifiziert man für $F(i) := (\log_2(i))^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ die folgende Implikation:

Falls die Abschätzung $R_3^3(F)(m) \ge 2^{m^3}$ für fast alle $m \in \mathbb{N}$ gilt, so gilt auch $R_3^3(m) \ge 2^{m^3}$ für fast alle $m \in \mathbb{N}$.

Die Konklusion würde einen Fortschritt gegenüber der bekannten unteren Schranke aus (1) bedeuten. Man kann ferner zeigen, dass sich auch Implikationen aus Phasenübergangen für die Asymptotik anderer Ramseyfunktionen – speziell R_2^2 – ergeben.

Literatur

[1] B. Bollobás: Random graphs. Second edition. Cambridge University Press, 2001.

[2] A. Bovykin and A. Weiermann: The strength of infinitary principles can be accessed by their densities. Preprint 2005.

[3] L. Carlucci, G. Lee, A. Weiermann: Classifying the phase transition for regressive Ramsey functions. Preprint 2005.

[4] D. Chandler: Introduction to modern statistical mechanics. Oxford University Press, 1987.

[5] P. Clote, E. Kranakis: Boolean functions and computation models. Springer-Verlag, 2002.

[6] P. Erdős and R. Rado: Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set. Proc. London Math. Soc. III Ser. 2., 417–439, (1952).

[7] P. Flajolet and R. Sedgewick: The average case of algorithms. `http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/publist.html`

[8] G. Gentzen: The collected papers of Gerhard Gentzen. Edited by M. E. Szabo. North-Holland Publishing Co., 1969.

[9] B. Gittenberger: On the contour of random trees. SIAM J. Discrete Math. 12 (1999), no. 4, 434–458.

[10] K. Gödel: On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems. Transl. by B. Meltzer, with introduction by R. B. Braithwaite. Basic Books, 1963.

[11] R. L. Graham, B. Rothschild, J. H. Spencer: Ramsey theory. Second edition. John Wiley & Sons, 1990.

[12] G. Grimmett: Percolation. Second edition. Grundlehren 321. Springer-Verlag, 1999.

[13] S. Janson, T Łuczak, A. Rucinski. Random graphs. Wiley-Interscience, 2000.

[14] U. Kohlenbach: Some logical metatheorems with applications in functional analysis. Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), 89–128.

[15] G. Kolata: Does Gödel's theorem matter to mathematics? Science Vol 218, No. 4574 (Nov. 19, 1982), 779–780.

[16] J. Korevaar: Tauberian theory. A century of developments. Grundlehren 329. Springer-Verlag, 2004.

[17] M. Loebl and J. Matoušek. On undecidability of the weakened Kruskal theorem. In *Logic and combinatorics (Arcata, Calif., 1985)*, 275–280. Amer. Math. Soc., 1987.

[18] R. Monasson, R. Zecchina, S. Kirkpatrick, B. Selman, L. Troyansky: Determining computational complexity from characteristic phase transitions. Nature 400 (1999), no. 6740, 133–137.

[19] S. Parameswaran: *Partition functions whose logarithms are slowly oscillating.* Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1961), 217–240.

[20] J. Paris and L. Harrington: A mathematical incompleteness in Peano arithmetic, Handbook of Mathematical Logic (J. Barwise, ed.), North-Holland, 1977.

[21] V.M. Petrogradsky: Growth of finitely generated polynilpotent Lie algebras and groups, generalized partitions, and functions analytic in the unit circle. Internat. J. Algebra Comput. 9 (1999), no. 2, 179–212.

[22] M. Rathjen: The realm of ordinal analysis. Sets and proofs (Leeds, 1997), 219–279, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 258, Cambridge Univ. Press, 1999.

[23] K. Schütte: Proof theory. Translated from the revised German edition by J. N. Crossley. Grundlehren 225. Springer-Verlag, 1977.

[24] S. G. Simpson: Nonprovability of certain combinatorial properties of finite trees. Harvey Friedman's research on the foundations of mathematics, 87–117, Stud. Logic Found. Math., 117, North-Holland, 1985.

[25] S. G. Simpson: Subsystems of second order arithmetic. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1999.

[26] G. Takeuti: Proof theory. Second edition. With appendix by G. Kreisel, W. Pohlers, S. G. Simpson and S. Feferman. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 81. North-Holland Publishing Co., 1987.

[27] A. Weiermann: An application of graphical enumeration to PA. The Journal of Symbolic Logic 68 (2003), no. 1, 5–16.

[28] A. Weiermann: An application of results by Hardy, Ramanujan and Karamata to Ackermannian functions. DMTCS 6 (2003), 133–141.

[29] A. Weiermann: A classification of rapidly growing Ramsey functions. Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), 553–561.

[30] A. Weiermann: Analytic combinatorics, proof-theoretic ordinals and phase transitions for independence results. Annals of Pure and Applied Logic (to appear).

[31] A. Weiermann: Classifying the phase transition for rapidly growing Ramsey functions. Preprint 2005.

Adresse des Autors

Dr. Andreas Weiermann
Mathematical Institute
P.O. Box 80010
3508 TA Utrecht
The Netherlands
`weierman@math.uu.nl`

Andreas Weiermann ist 1964 geboren, hat in Münster Mathematik mit Schwerpunkt Logik studiert, dort 1990 promoviert und 1994 habilitiert. 1994 hielt er sich als HCM-Stipendiat der EU in Nancy auf. 1997 hat die DFG ihm ein Heisenbergstipendium zuerkannt. Er betreute zwei von der DFG geförderte Dissertationen und erhielt zwei weitere DFG-Projekte und ein NWO-Projekt zuerkannt. Seit Oktober 2002 ist er Gastprofessor an der Universität Utrecht. 2003 war er Gast in Oberwolfach im Rahmen eines Research in Pairs Projektes. Andreas Weiermann ist Sektionspreisträger in der Sektion Logik und theoretische Informatik auf der DMV-Jahrestagung 2004. Dieser Beitrag ist Teil der Serie von Preisträger-Arbeiten.