De Abstracte Priemgetalstelling

Het Malliavin-vraagstuk

Jasson Vindas
jasson.vindas@UGent.be

Universiteit Gent

Professoren aan het woord
27 april, 2023

Klassieke priemgetallen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$$

- Waarom zijn ze belangrijk? Fundamentele bouwstenen van $\mathbb{N}$.
- Hoeveel zijn er? Er zijn oneindig veel (Euclides, 300 v. Chr.)
- Hoe gedragen ze zich? Dit is moeilijker te beantwoorden.

D. Zagier – *Ze groeien als onkruid tussen de natuurlijke getallen, schijnbaar willekeurig, maar ze vertonen een verbazende regelmaat, er zijn wetten die ze met bijna militaire discipline gehoorzamen.*

- Hoe verdelen ze? We bekijken de priemtelfunctie:

$$\pi(x) = \text{ aantal priemgetallen } \leq x.$$

Klassieke priemgetallen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

- Waarom zijn ze belangrijk? Fundamentele bouwstenen van $\mathbb{N}$.
- Hoeveel zijn er? Er zijn oneindig veel (Euclides, 300 v. Chr.)
- Hoe gedragen ze zich? Dit is moeilijker te beantwoorden.

  D. Zagier – *Ze groeien als onkruid tussen de natuurlijke getallen, schijnbaar willekeurig, maar ze vertonen een verbazende regelmaat, er zijn wetten die ze met bijna militaire discipline gehoorzamen.*

- Hoe verdelen ze? We bekijken de priemtelfunctie:

$$\pi(x) = \text{ aantal priemgetallen } \leq x.$$

Klassieke priemgetallen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

- Waarom zijn ze belangrijk? Fundamentele bouwstenen van $\mathbb{N}$.
- Hoeveel zijn er? Er zijn oneindig veel (Euclides, 300 v. Chr.)
- Hoe gedragen ze zich? Dit is moeilijker te beantwoorden.

  D. Zagier – *Ze groeien als onkruid tussen de natuurlijke getallen, schijnbaar willekeurig, maar ze vertonen een verbazende regelmaat, er zijn wetten die ze met bijna militaire discipline gehoorzamen.*

- Hoe verdelen ze? We bekijken de priemtelfunctie:

$$\pi(x) = \text{ aantal priemgetallen } \leq x.$$

Klassieke priemgetallen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

- Waarom zijn ze belangrijk? Fundamentele bouwstenen van $\mathbb{N}$.
- Hoeveel zijn er? Er zijn oneindig veel (Euclides, 300 v. Chr.)
- Hoe gedragen ze zich? Dit is moeilijker te beantwoorden.

  D. Zagier – *Ze groeien als onkruid tussen de natuurlijke getallen, schijnbaar willekeurig, maar ze vertonen een verbazende regelmaat, er zijn wetten die ze met bijna militaire discipline gehoorzamen.*

- Hoe verdelen ze? We bekijken de priemtelfunctie:

$$\pi(x) = \text{ aantal priemgetallen } \leq x.$$

Klassieke priemgetallen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

- Waarom zijn ze belangrijk? Fundamentele bouwstenen van $\mathbb{N}$.
- Hoeveel zijn er? Er zijn oneindig veel (Euclides, 300 v. Chr.)
- Hoe gedragen ze zich? Dit is moeilijker te beantwoorden.

  D. Zagier – *Ze groeien als onkruid tussen de natuurlijke getallen, schijnbaar willekeurig, maar ze vertonen een verbazende regelmaat, er zijn wetten die ze met bijna militaire discipline gehoorzamen.*

- Hoe verdelen ze? We bekijken de priemtelfunctie:

$$\pi(x) = \text{ aantal priemgetallen } \leq x.$$

Klassieke priemgetallen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

- Waarom zijn ze belangrijk? Fundamentele bouwstenen van $\mathbb{N}$.
- Hoeveel zijn er? Er zijn oneindig veel (Euclides, 300 v. Chr.)
- Hoe gedragen ze zich? Dit is moeilijker te beantwoorden.

D. Zagier – *Ze groeien als onkruid tussen de natuurlijke getallen, schijnbaar willekeurig, maar ze vertonen een verbazende regelmaat, er zijn wetten die ze met bijna militaire discipline gehoorzamen.*

- Hoe verdelen ze? We bekijken de priemtelfunctie:

$$\pi(x) = \text{ aantal priemgetallen } \leq x.$$

Klassieke priemgetallen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

- Waarom zijn ze belangrijk? Fundamentele bouwstenen van $\mathbb{N}$.
- Hoeveel zijn er? Er zijn oneindig veel (Euclides, 300 v. Chr.)
- Hoe gedragen ze zich? Dit is moeilijker te beantwoorden.

D. Zagier – *Ze groeien als onkruid tussen de natuurlijke getallen, schijnbaar willekeurig, maar ze vertonen een verbazende regelmaat, er zijn wetten die ze met bijna militaire discipline gehoorzamen.*

- Hoe verdelen ze? We bekijken de priemtelfunctie:

$$\pi(x) = \text{ aantal priemgetallen } \leq x.$$

Klassieke priemgetallen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

- Waarom zijn ze belangrijk? Fundamentele bouwstenen van $\mathbb{N}$.
- Hoeveel zijn er? Er zijn oneindig veel (Euclides, 300 v. Chr.)
- Hoe gedragen ze zich? Dit is moeilijker te beantwoorden.

  D. Zagier – *Ze groeien als onkruid tussen de natuurlijke getallen, schijnbaar willekeurig, maar ze vertonen een verbazende regelmaat, er zijn wetten die ze met bijna militaire discipline gehoorzamen.*

- Hoe verdelen ze? We bekijken de priemtelfunctie:

$$\pi(x) = \text{ aantal priemgetallen } \leq x.$$

Klassieke priemgetallen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

- Waarom zijn ze belangrijk? Fundamentele bouwstenen van $\mathbb{N}$.
- Hoeveel zijn er? Er zijn oneindig veel (Euclides, 300 v. Chr.)
- Hoe gedragen ze zich? Dit is moeilijker te beantwoorden.

  D. Zagier – *Ze groeien als onkruid tussen de natuurlijke getallen, schijnbaar willekeurig, maar ze vertonen een verbazende regelmaat, er zijn wetten die ze met bijna militaire discipline gehoorzamen.*

- Hoe verdelen ze? We bekijken de priemtelfunctie:

$$\pi(x) = \text{ aantal priemgetallen } \leq x.$$

Klassieke priemgetallen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

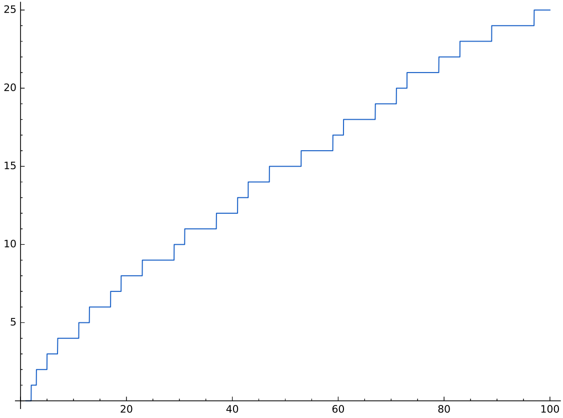
- Waarom zijn ze belangrijk? Fundamentele bouwstenen van $\mathbb{N}$.
- Hoeveel zijn er? Er zijn oneindig veel (Euclides, 300 v. Chr.)
- Hoe gedragen ze zich? Dit is moeilijker te beantwoorden.

  D. Zagier – *Ze groeien als onkruid tussen de natuurlijke getallen, schijnbaar willekeurig, maar ze vertonen een verbazende regelmaat, er zijn wetten die ze met bijna militaire discipline gehoorzamen.*

- Hoe verdelen ze? We bekijken de priemtelfunctie:

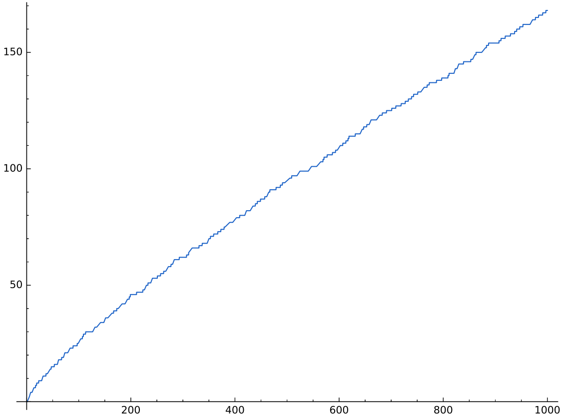
$$\pi(x) = \text{ aantal priemgetallen } \leq x.$$

Priemtelfunctie



$\pi(x)$ voor x tussen 0 en 100.

Priemtelfunctie



$\pi(x)$ voor x tussen 0 en 1000.

De klassieke priemgetalstelling

- Gauss and Legendre vermoedden (1793): $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.
- Bewijs van de priemgetalstelling: de la Vallée Poussin en Hadamard (1896).
- Restterm $R(x) := \pi(x) - \displaystyle\int_2^x \frac{du}{\ln u}$. Wereld record:

$$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{1/2})) \quad \text{(de la Vallée Poussin, 1897)}$$

$$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x \ln\ln x)^{1/2})) \quad \text{(Littlewood, 1922)}$$

$$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{2/3-\varepsilon})) \quad \text{(Vinogradov-Korobov, 1958)}$$

- Riemann-vermoeden (RH): $R(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$

D. Hilber – *Als ik zou ontwaken na een slaap van duizend jaar, dan zou mijn eerste vraag zijn: Is het vermoeden van Riemann al bewezen?*

De klassieke priemgetalstelling

- Gauss and Legendre vermoedden (1793): $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.
- Bewijs van de priemgetalstelling: de la Vallée Poussin en Hadamard (1896).
- Restterm $R(x) := \pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\ln u}$. Wereld record:

$$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{1/2})) \quad \text{(de la Vallée Poussin, 1897)}$$

$$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x \ln \ln x)^{1/2})) \quad \text{(Littlewood, 1922)}$$

$$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{2/3-\varepsilon})) \quad \text{(Vinogradov-Korobov, 1958)}$$

- Riemann-vermoeden (RH): $R(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$

D. Hilber – *Als ik zou ontwaken na een slaap van duizend jaar, dan zou mijn eerste vraag zijn: Is het vermoeden van Riemann al bewezen?*

De klassieke priemgetalstelling

- Gauss and Legendre vermoedden (1793): $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.
- Bewijs van de priemgetalstelling: de la Vallée Poussin en Hadamard (1896).
- Restterm $R(x) := \pi(x) - \displaystyle\int_2^x \frac{du}{\ln u}$. Wereld record:

$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{1/2}))$ (de la Vallée Poussin, 1897)

$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x \ln\ln x)^{1/2}))$ (Littlewood, 1922)

$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{2/3-\varepsilon}))$ (Vinogradov-Korobov, 1958)

- Riemann-vermoeden (RH): $R(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$

D. Hilber – *Als ik zou ontwaken na een slaap van duizend jaar, dan zou mijn eerste vraag zijn: Is het vermoeden van Riemann al bewezen?*

De klassieke priemgetalstelling

- Gauss and Legendre vermoedden (1793): $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.
- Bewijs van de priemgetalstelling: de la Vallée Poussin en Hadamard (1896).
- Restterm $R(x) := \pi(x) - \displaystyle\int_2^x \frac{du}{\ln u}$. Wereld record:

$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{1/2}))$ (de la Vallée Poussin, 1897)

$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x \ln \ln x)^{1/2}))$ (Littlewood, 1922)

$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{2/3-\varepsilon}))$ (Vinogradov-Korobov, 1958)

- Riemann-vermoeden (RH): $R(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$

D. Hilber – *Als ik zou ontwaken na een slaap van duizend jaar, dan zou mijn eerste vraag zijn: Is het vermoeden van Riemann al bewezen?*

De klassieke priemgetalstelling

- Gauss and Legendre vermoedden (1793): $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.
- Bewijs van de priemgetalstelling: de la Vallée Poussin en Hadamard (1896).
- Restterm $R(x) := \pi(x) - \int_2^x \dfrac{du}{\ln u}$. Wereld record:

$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{1/2}))$ (de la Vallée Poussin, 1897)

$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x \ln \ln x)^{1/2}))$ (Littlewood, 1922)

$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{2/3-\varepsilon}))$ (Vinogradov-Korobov, 1958)

- Riemann-vermoeden (RH): $R(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$

D. Hilber – *Als ik zou ontwaken na een slaap van duizend jaar, dan zou mijn eerste vraag zijn: Is het vermoeden van Riemann al bewezen?*

De klassieke priemgetalstelling

- Gauss and Legendre vermoedden (1793): $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.
- Bewijs van de priemgetalstelling: de la Vallée Poussin en Hadamard (1896).
- Restterm $R(x) := \pi(x) - \displaystyle\int_2^x \frac{du}{\ln u}$. Wereld record:

$$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{1/2})) \quad \text{(de la Vallée Poussin, 1897)}$$

$$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x \ln \ln x)^{1/2})) \quad \text{(Littlewood, 1922)}$$

$$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{2/3-\varepsilon})) \quad \text{(Vinogradov-Korobov, 1958)}$$

- Riemann-vermoeden (RH): $R(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$

D. Hilber – *Als ik zou ontwaken na een slaap van duizend jaar, dan zou mijn eerste vraag zijn: Is het vermoeden van Riemann al bewezen?*

De klassieke priemgetalstelling

- Gauss and Legendre vermoedden (1793): $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.
- Bewijs van de priemgetalstelling: de la Vallée Poussin en Hadamard (1896).
- Restterm $R(x) := \pi(x) - \displaystyle\int_2^x \frac{du}{\ln u}$. Wereld record:

$$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{1/2})) \quad \text{(de la Vallée Poussin, 1897)}$$

$$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x \ln \ln x)^{1/2})) \quad \text{(Littlewood, 1922)}$$

$$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{2/3-\varepsilon})) \quad \text{(Vinogradov-Korobov, 1958)}$$

- Riemann-vermoeden (RH): $R(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$

D. Hilber – *Als ik zou ontwaken na een slaap van duizend jaar, dan zou mijn eerste vraag zijn: Is het vermoeden van Riemann al bewezen?*

De klassieke priemgetalstelling

- Gauss and Legendre vermoedden (1793): $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.
- Bewijs van de priemgetalstelling: de la Vallée Poussin en Hadamard (1896).
- Restterm $R(x) := \pi(x) - \displaystyle\int_2^x \frac{du}{\ln u}$. Wereld record:

$$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{1/2})) \quad \text{(de la Vallée Poussin, 1897)}$$

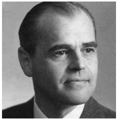
$$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x \ln \ln x)^{1/2})) \quad \text{(Littlewood, 1922)}$$

$$R(x) = O(x \exp(-c(\ln x)^{2/3-\varepsilon})) \quad \text{(Vinogradov-Korobov, 1958)}$$

- Riemann-vermoeden (RH): $R(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$

D. Hilber – *Als ik zou ontwaken na een slaap van duizend jaar, dan zou mijn eerste vraag zijn: Is het vermoeden van Riemann al bewezen?*

Beurlings veralgemening



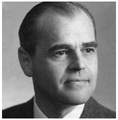
Beurling bewees een algemene versie van de priemgetalstelling, wat een abstract kader gaf voor priemgetaltheorie zonder additiviteit.

Beurlings idee: kies nieuwe fundamentele bouwstenen!

$$\mathcal{P} : 1 < p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots p_k \to \infty.$$

$$\mathcal{N} : n_0 = 1 < n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots n_k \to \infty.$$

$$\pi_{\mathcal{P}}(x) = \text{ aantal } \textit{veralgemeende} \text{ priemgetallen} \leq x,$$
$$N_{\mathcal{P}}(x) = \text{ aantal } \textit{veralgemeende} \text{ gehelen} \leq x.$$



Beurling bewees een algemene versie van de priemgetalstelling, wat een abstract kader gaf voor priemgetaltheorie zonder additiviteit.

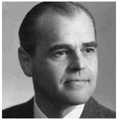
Beurlings idee: kies nieuwe fundamentele bouwstenen!

$$\mathcal{P} : 1 < p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots p_k \to \infty.$$

$$\mathcal{N} : n_0 = 1 < n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots n_k \to \infty.$$

$$\pi_{\mathcal{P}}(x) = \text{ aantal } \textit{veralgemeende} \text{ priemgetallen} \leq x,$$
$$N_{\mathcal{P}}(x) = \text{ aantal } \textit{veralgemeende} \text{ gehelen} \leq x.$$

Beurlings veralgemening



Beurling bewees een algemene versie van de priemgetalstelling, wat een abstract kader gaf voor priemgetaltheorie zonder additiviteit.

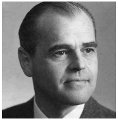
Beurlings idee: kies nieuwe fundamentele bouwstenen!

$$\mathcal{P} : 1 < p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \ldots p_k \to \infty.$$

$$\mathcal{N} : n_0 = 1 < n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \ldots n_k \to \infty.$$

$$\pi_{\mathcal{P}}(x) = \text{ aantal } \textit{veralgemeende} \text{ priemgetallen} \leq x,$$
$$N_{\mathcal{P}}(x) = \text{ aantal } \textit{veralgemeende} \text{ gehelen} \leq x.$$

Beurlings veralgemening



Beurling bewees een algemene versie van de priemgetalstelling, wat een abstract kader gaf voor priemgetaltheorie zonder additiviteit.

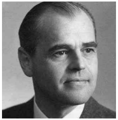
Beurlings idee: kies nieuwe fundamentele bouwstenen!

$$\mathcal{P} : 1 < p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots p_k \to \infty.$$

$$\mathcal{N} : n_0 = 1 < n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots n_k \to \infty.$$

$$\pi_{\mathcal{P}}(x) = \text{ aantal } \textit{veralgemeende} \text{ priemgetallen} \leq x,$$
$$N_{\mathcal{P}}(x) = \text{ aantal } \textit{veralgemeende} \text{ gehelen} \leq x.$$

Beurlings veralgemening



Beurling bewees een algemene versie van de priemgetalstelling, wat een abstract kader gaf voor priemgetaltheorie zonder additiviteit.

Beurlings idee: kies nieuwe fundamentele bouwstenen!

$$\mathcal{P} : 1 < p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots p_k \to \infty.$$

$$\mathcal{N} : n_0 = 1 < n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots n_k \to \infty.$$

$$\pi_{\mathcal{P}}(x) = \text{ aantal } \textit{veralgemeende} \text{ priemgetallen} \leq x,$$
$$N_{\mathcal{P}}(x) = \text{ aantal } \textit{veralgemeende} \text{ gehelen} \leq x.$$

Malliavin-vraagstuk (1961)

Malliavin ontdekte dat volgende relaties nauw gerelateerd zijn

$$(\mathrm{P}_\alpha) \qquad \pi_{\mathcal{P}}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} + O(x \exp(-c(\ln x)^\alpha))$$

and

$$(\mathrm{N}_\beta) \qquad N_{\mathcal{P}}(x) = \rho x + O(x \exp(-c'(\ln x)^\beta)) \qquad (\rho > 0),$$

Malliavins vraagstuk

1. Gegeven $\beta \in]0,1]$, vind $\alpha^*(\beta) = \sup\{\alpha : (\mathrm{N}_\beta) \implies (\mathrm{P}_\alpha)\}$.
2. Gegeven $\alpha \in]0,1]$, vind $\beta^*(\alpha) = \sup\{\beta : (\mathrm{P}_\alpha) \implies (\mathrm{N}_\beta)\}$.

Malliavin-vraagstuk (1961)

Malliavin ontdekte dat volgende relaties nauw gerelateerd zijn

$$(\mathrm{P}_\alpha) \qquad \pi_{\mathcal{P}}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} + O(x \exp(-c(\ln x)^\alpha))$$

and

$$(\mathrm{N}_\beta) \qquad N_{\mathcal{P}}(x) = \rho x + O(x \exp(-c'(\ln x)^\beta)) \qquad (\rho > 0),$$

Malliavins vraagstuk

1. Gegeven $\beta \in]0,1]$, vind $\alpha^*(\beta) = \sup\{\alpha : (\mathrm{N}_\beta) \implies (\mathrm{P}_\alpha)\}$.
2. Gegeven $\alpha \in]0,1]$, vind $\beta^*(\alpha) = \sup\{\beta : (\mathrm{P}_\alpha) \implies (\mathrm{N}_\beta)\}$.

Malliavin ontdekte dat volgende relaties nauw gerelateerd zijn

$$(\mathrm{P}_\alpha) \qquad \pi_{\mathcal{P}}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} + O(x\exp(-c(\ln x)^\alpha))$$

and

$$(\mathrm{N}_\beta) \qquad N_{\mathcal{P}}(x) = \rho x + O(x\exp(-c'(\ln x)^\beta)) \qquad (\rho > 0),$$

Malliavins vraagstuk

1. Gegeven $\beta \in]0,1]$, vind $\alpha^*(\beta) = \sup\{\alpha : (\mathrm{N}_\beta) \implies (\mathrm{P}_\alpha)\}$.
2. Gegeven $\alpha \in]0,1]$, vind $\beta^*(\alpha) = \sup\{\beta : (\mathrm{P}_\alpha) \implies (\mathrm{N}_\beta)\}$.

Malliavin-vraagstuk (1961)

Malliavin ontdekte dat volgende relaties nauw gerelateerd zijn

$$(\mathrm{P}_\alpha) \qquad \pi_{\mathcal{P}}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} + O(x \exp(-c(\ln x)^\alpha))$$

and

$$(\mathrm{N}_\beta) \qquad N_{\mathcal{P}}(x) = \rho x + O(x \exp(-c'(\ln x)^\beta)) \qquad (\rho > 0),$$

Malliavins vraagstuk

1. Gegeven $\beta \in]0,1]$, vind $\alpha^*(\beta) = \sup\{\alpha : (\mathrm{N}_\beta) \implies (\mathrm{P}_\alpha)\}$.
2. Gegeven $\alpha \in]0,1]$, vind $\beta^*(\alpha) = \sup\{\beta : (\mathrm{P}_\alpha) \implies (\mathrm{N}_\beta)\}$.

Vooruitgang in Malliavin-vraagstuk

Malliavins vraagstuk

1. Gegeven $\beta \in]0,1]$, vind $\alpha^*(\beta) = \sup\{\alpha : (\mathrm{N}_\beta) \implies (\mathrm{P}_\alpha)\}$.
2. Gegeven $\alpha \in]0,1]$, vind $\beta^*(\alpha) = \sup\{\beta : (\mathrm{P}_\alpha) \implies (\mathrm{N}_\beta)\}$.

- Vermoeden van Bateman en Diamond (1969): $\alpha^*(\beta) = \beta/(1+\beta)$ en $\beta^*(\alpha) = \alpha/(1+\alpha)$.
- Diamond (1970): $\beta^*(\alpha) \geq \alpha/(1+\alpha)$, voor alle $\alpha < 1$.
- Hall (1972): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/7.91$ voor $0 < \beta \leq 1$.
- Diamond, Montgomery en Vorhauer (2006): $\alpha^*(1) = 1/2$.
- Hilberdink en Lapidus (2006): $\beta^*(1) \geq 1/2$.
- Diamond en Zhang (2016): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/(\beta + 6.91)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2020): $\beta^*(1) = 1/2$.
- Broucke (2021): $\alpha^*(\beta) \leq \beta/(1+\beta)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2022): $\beta^*(\alpha) = \alpha/(\alpha+1)$, $\forall \alpha \in]0,1]$.

Vooruitgang in Malliavin-vraagstuk

Malliavins vraagstuk

1. Gegeven $\beta \in]0,1]$, vind $\alpha^*(\beta) = \sup\{\alpha : (\mathrm{N}_\beta) \implies (\mathrm{P}_\alpha)\}$.
2. Gegeven $\alpha \in]0,1]$, vind $\beta^*(\alpha) = \sup\{\beta : (\mathrm{P}_\alpha) \implies (\mathrm{N}_\beta)\}$.

- Vermoeden van Bateman en Diamond (1969):
  $\alpha^*(\beta) = \beta/(1+\beta)$ en $\beta^*(\alpha) = \alpha/(1+\alpha)$.
- Diamond (1970): $\beta^*(\alpha) \geq \alpha/(1+\alpha)$, voor alle $\alpha < 1$.
- Hall (1972): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/7.91$ voor $0 < \beta \leq 1$.
- Diamond, Montgomery en Vorhauer (2006): $\alpha^*(1) = 1/2$.
- Hilberdink en Lapidus (2006): $\beta^*(1) \geq 1/2$.
- Diamond en Zhang (2016): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/(\beta + 6.91)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2020): $\beta^*(1) = 1/2$.
- Broucke (2021): $\alpha^*(\beta) \leq \beta/(1+\beta)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2022): $\beta^*(\alpha) = \alpha/(\alpha+1)$, $\forall \alpha \in]0,1]$.

Vooruitgang in Malliavin-vraagstuk

Malliavins vraagstuk

1. Gegeven $\beta \in]0,1]$, vind $\alpha^*(\beta) = \sup\{\alpha : (\mathrm{N}_\beta) \implies (\mathrm{P}_\alpha)\}$.
2. Gegeven $\alpha \in]0,1]$, vind $\beta^*(\alpha) = \sup\{\beta : (\mathrm{P}_\alpha) \implies (\mathrm{N}_\beta)\}$.

- Vermoeden van Bateman en Diamond (1969):
  $\alpha^*(\beta) = \beta/(1+\beta)$ en $\beta^*(\alpha) = \alpha/(1+\alpha)$.
- Diamond (1970): $\beta^*(\alpha) \geq \alpha/(1+\alpha)$, voor alle $\alpha < 1$.
- Hall (1972): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/7.91$ voor $0 < \beta \leq 1$.
- Diamond, Montgomery en Vorhauer (2006): $\alpha^*(1) = 1/2$.
- Hilberdink en Lapidus (2006): $\beta^*(1) \geq 1/2$.
- Diamond en Zhang (2016): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/(\beta + 6.91)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2020): $\beta^*(1) = 1/2$.
- Broucke (2021): $\alpha^*(\beta) \leq \beta/(1+\beta)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2022): $\beta^*(\alpha) = \alpha/(\alpha+1)$, $\forall \alpha \in]0,1]$.

Vooruitgang in Malliavin-vraagstuk

Malliavins vraagstuk

1. Gegeven $\beta \in]0,1]$, vind $\alpha^*(\beta) = \sup\{\alpha : (\mathrm{N}_\beta) \implies (\mathrm{P}_\alpha)\}$.
2. Gegeven $\alpha \in]0,1]$, vind $\beta^*(\alpha) = \sup\{\beta : (\mathrm{P}_\alpha) \implies (\mathrm{N}_\beta)\}$.

- Vermoeden van Bateman en Diamond (1969):
  $\alpha^*(\beta) = \beta/(1+\beta)$ en $\beta^*(\alpha) = \alpha/(1+\alpha)$.
- Diamond (1970): $\beta^*(\alpha) \geq \alpha/(1+\alpha)$, voor alle $\alpha < 1$.
- Hall (1972): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/7.91$ voor $0 < \beta \leq 1$.
- Diamond, Montgomery en Vorhauer (2006): $\alpha^*(1) = 1/2$.
- Hilberdink en Lapidus (2006): $\beta^*(1) \geq 1/2$.
- Diamond en Zhang (2016): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/(\beta + 6.91)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2020): $\beta^*(1) = 1/2$.
- Broucke (2021): $\alpha^*(\beta) \leq \beta/(1+\beta)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2022): $\beta^*(\alpha) = \alpha/(\alpha+1)$, $\forall \alpha \in]0,1]$.

Vooruitgang in Malliavin-vraagstuk

Malliavins vraagstuk

1. Gegeven $\beta \in]0,1]$, vind $\alpha^*(\beta) = \sup\{\alpha : (\mathrm{N}_\beta) \implies (\mathrm{P}_\alpha)\}$.
2. Gegeven $\alpha \in]0,1]$, vind $\beta^*(\alpha) = \sup\{\beta : (\mathrm{P}_\alpha) \implies (\mathrm{N}_\beta)\}$.

- Vermoeden van Bateman en Diamond (1969):
  $\alpha^*(\beta) = \beta/(1+\beta)$ en $\beta^*(\alpha) = \alpha/(1+\alpha)$.
- Diamond (1970): $\beta^*(\alpha) \geq \alpha/(1+\alpha)$, voor alle $\alpha < 1$.
- Hall (1972): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/7.91$ voor $0 < \beta \leq 1$.
- Diamond, Montgomery en Vorhauer (2006): $\alpha^*(1) = 1/2$.
- Hilberdink en Lapidus (2006): $\beta^*(1) \geq 1/2$.
- Diamond en Zhang (2016): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/(\beta + 6.91)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2020): $\beta^*(1) = 1/2$.
- Broucke (2021): $\alpha^*(\beta) \leq \beta/(1+\beta)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2022): $\beta^*(\alpha) = \alpha/(\alpha+1)$, $\forall \alpha \in]0,1]$.

Vooruitgang in Malliavin-vraagstuk

Malliavins vraagstuk

1. Gegeven $\beta \in]0,1]$, vind $\alpha^*(\beta) = \sup\{\alpha : (\mathrm{N}_\beta) \implies (\mathrm{P}_\alpha)\}$.
2. Gegeven $\alpha \in]0,1]$, vind $\beta^*(\alpha) = \sup\{\beta : (\mathrm{P}_\alpha) \implies (\mathrm{N}_\beta)\}$.

- Vermoeden van Bateman en Diamond (1969):
  $\alpha^*(\beta) = \beta/(1+\beta)$ en $\beta^*(\alpha) = \alpha/(1+\alpha)$.
- Diamond (1970): $\beta^*(\alpha) \geq \alpha/(1+\alpha)$, voor alle $\alpha < 1$.
- Hall (1972): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/7.91$ voor $0 < \beta \leq 1$.
- Diamond, Montgomery en Vorhauer (2006): $\alpha^*(1) = 1/2$.
- Hilberdink en Lapidus (2006): $\beta^*(1) \geq 1/2$.
- Diamond en Zhang (2016): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/(\beta + 6.91)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2020): $\beta^*(1) = 1/2$.
- Broucke (2021): $\alpha^*(\beta) \leq \beta/(1+\beta)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2022): $\beta^*(\alpha) = \alpha/(\alpha+1)$, $\forall \alpha \in]0,1]$.

Vooruitgang in Malliavin-vraagstuk

Malliavins vraagstuk

1. Gegeven $\beta \in]0,1]$, vind $\alpha^*(\beta) = \sup\{\alpha : (\mathrm{N}_\beta) \implies (\mathrm{P}_\alpha)\}$.
2. Gegeven $\alpha \in]0,1]$, vind $\beta^*(\alpha) = \sup\{\beta : (\mathrm{P}_\alpha) \implies (\mathrm{N}_\beta)\}$.

- Vermoeden van Bateman en Diamond (1969):
  $\alpha^*(\beta) = \beta/(1+\beta)$ en $\beta^*(\alpha) = \alpha/(1+\alpha)$.
- Diamond (1970): $\beta^*(\alpha) \geq \alpha/(1+\alpha)$, voor alle $\alpha < 1$.
- Hall (1972): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/7.91$ voor $0 < \beta \leq 1$.
- Diamond, Montgomery en Vorhauer (2006): $\alpha^*(1) = 1/2$.
- Hilberdink en Lapidus (2006): $\beta^*(1) \geq 1/2$.
- Diamond en Zhang (2016): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/(\beta + 6.91)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2020): $\beta^*(1) = 1/2$.
- Broucke (2021): $\alpha^*(\beta) \leq \beta/(1+\beta)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2022): $\beta^*(\alpha) = \alpha/(\alpha+1)$, $\forall \alpha \in]0,1]$.

Vooruitgang in Malliavin-vraagstuk

Malliavins vraagstuk

1. Gegeven $\beta \in]0,1]$, vind $\alpha^*(\beta) = \sup\{\alpha : (\mathrm{N}_\beta) \implies (\mathrm{P}_\alpha)\}$.
2. Gegeven $\alpha \in]0,1]$, vind $\beta^*(\alpha) = \sup\{\beta : (\mathrm{P}_\alpha) \implies (\mathrm{N}_\beta)\}$.

- Vermoeden van Bateman en Diamond (1969):
  $\alpha^*(\beta) = \beta/(1+\beta)$ en $\beta^*(\alpha) = \alpha/(1+\alpha)$.
- Diamond (1970): $\beta^*(\alpha) \geq \alpha/(1+\alpha)$, voor alle $\alpha < 1$.
- Hall (1972): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/7.91$ voor $0 < \beta \leq 1$.
- Diamond, Montgomery en Vorhauer (2006): $\alpha^*(1) = 1/2$.
- Hilberdink en Lapidus (2006): $\beta^*(1) \geq 1/2$.
- Diamond en Zhang (2016): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/(\beta + 6.91)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2020): $\beta^*(1) = 1/2$.
- Broucke (2021): $\alpha^*(\beta) \leq \beta/(1+\beta)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2022): $\beta^*(\alpha) = \alpha/(\alpha+1)$, $\forall \alpha \in]0,1]$.

Vooruitgang in Malliavin-vraagstuk

Malliavins vraagstuk

1. Gegeven $\beta \in]0,1]$, vind $\alpha^*(\beta) = \sup\{\alpha : (\mathrm{N}_\beta) \implies (\mathrm{P}_\alpha)\}$.
2. Gegeven $\alpha \in]0,1]$, vind $\beta^*(\alpha) = \sup\{\beta : (\mathrm{P}_\alpha) \implies (\mathrm{N}_\beta)\}$.

- Vermoeden van Bateman en Diamond (1969):
  $\alpha^*(\beta) = \beta/(1+\beta)$ en $\beta^*(\alpha) = \alpha/(1+\alpha)$.
- Diamond (1970): $\beta^*(\alpha) \geq \alpha/(1+\alpha)$, voor alle $\alpha < 1$.
- Hall (1972): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/7.91$ voor $0 < \beta \leq 1$.
- Diamond, Montgomery en Vorhauer (2006): $\alpha^*(1) = 1/2$.
- Hilberdink en Lapidus (2006): $\beta^*(1) \geq 1/2$.
- Diamond en Zhang (2016): $\alpha^*(\beta) \geq \beta/(\beta + 6.91)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2020): $\beta^*(1) = 1/2$.
- Broucke (2021): $\alpha^*(\beta) \leq \beta/(1+\beta)$, $\forall \beta \in]0,1]$.
- Broucke, Debruyne en mijzelf (2022): $\beta^*(\alpha) = \alpha/(\alpha+1)$, $\forall \alpha \in]0,1]$.

Enkele referenties

- P. Bateman, H. Diamond, Asymptotic distribution of Beurling's generalized prime numbers, in: Studies in number theory, pp. 152210, Mathematical Association of America, 1969.
- F. Broucke, G. Debruyne, J. Vindas, Beurling integers with RH and large oscillation, Adv. Math. 370 (2020), Article 107240
- F.Broucke, G. Debruyne, J. Vindas, The optimal Malliavin-type remainder for Beurling generalized integers, J. Inst. Math. Jussieu (2022), doi:10.1017/S147474802200038X
- H. Diamond, H. Montgomery, U. Vorhauer, Beurling primes with large oscillation, Math. Ann. 334 (2006), 1–36.
- E. Landau, Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes, Math. Ann. 56 (1903), 645670.
- P. Malliavin, Sur le reste de la loi asymptotique de répartition des nombres premiers généralisés de Beurling, Acta Math. 106 (1961), 281–298.