Asintóticos generalizados y algunas aplicaciones

Jasson Vindas Díaz

jvindas@math.lsu.edu

Louisiana State University

CONICIT

San José, Costa Rica, Diciembre 17, 2008

Resumen

- El objetivo de esta charla es dar una introducción al análisis asintótico en espacios de funciones generalizadas
- Discutiremos algunas aplicaciones:
  - Fórmula de inversión puntual para la transformada de Fourier de distribuciones
  - Matemática aplicada: Detección de saltos y esquinas de funciones por datos espectrales
  - Una prueba del teorema de la distribución de los primos

Introducción

Funciones generalizadas

- Las funciones generalizadas han sido creadas para solventar las deficiencias de las funciones clásicas presentadas en la manipulación de las mismas.
- Las funciones clásicas presentan dificultades en la mayoría de operaciones básicas: Diferenciación, trasformadas integrales, procesos de límites, etc.

Historia y clases de funciones generalizadas

- Heaviside y el cálculo operacional (principios de 1900)
- Dirac y la mecánica cuántica
- Sobolev y la derivada generalizada (1933–35)
- Schwartz y los espacios de distribuciones (1944–1945), medalla fields (1950)
- Sato y las hiperfunciones (1959–60)
- Otros tipos: Ultradistribuciones (Komatsu, 1973), las nuevas funciones generalizadas de Colombeau ($\sim$1980)

Introducción

Análisis Asintótico

- El análisis asintótico es una rama clásica de la matemática que ha encontrado aplicaciones en varios campos de matemática pura y aplicada, física e ingeniería
- El principal objetivo del análisis asintótico es estudiar el comportamiento local de objetos complicados por medio de comparaciones con objetos simples
- Tipos de comparaciones
  - Estimación de crecimiento por acotaciones: Si g es bien conocida, se trata de estimar el grado de crecimiento por
  $$f(x) = O(g(x))$$
  - Igualdad de comportamiento terminal: Si g es bien conocidad, se busca para un objeto complicado f una equivalencia asintótica
  $$f(x) \sim g(x)$$

Asintóticos generalizados

- En los pasados 50 años, numerosas definiciones del comportamiento asintótico para funciones generalizadas han sido elaboradas y aplicadas a problemas concretos en matemática y física matemática
- Un paso fundamental es la introducción de los “cuasiasintóticos" por un grupo de matemáticos rusos (Instituto Steklov, Rusia)
- Muchos de los resultados mas característicos pueden ser encontrados en:
  - V. S. Vladimirov, Yu. N. Drozzinov and B. I. Zavialov: Tauberian Theorems for Generalized Functions (1988)
  - S. Pilipović, B. Stanković and A. Takači, Asymptotic Behavior and Stieltjes Transformation of Distributions (1990)
  - R. Estrada, R .P. Kanwal, A Distributional Approach to Asymptotics. Theory and Applications, (Segunda edición, 2002)

Espacios de distribuciones de Schwartz

- $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ and $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ denotan el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto y el espacio de funciones infinitamente diferenciables cuyas derivadas de todo orden decaen mas rápido que cualquier polinomio en infinito.
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ and $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ los espacios de distribuciones y distribuciones temperadas.
- La evaluación de una distribución f en una función de prueba ϕ será denotada por

$$\langle f(x), \phi(x) \rangle$$

- En general, la mayoría de analistas piensan que estos espacios presentan propiedades puntuales pobres, sin embargo los asintóticos generalizados proveen un marco puntual adecuado en este contexto

La idea de los Cuasiasintóticos

La idea es estudiar el comportamiento asintótico de las dilataciones de una distribucion. Se buscan respresentaciones asintóticas de la forma

$$f(\lambda x) \sim \rho(\lambda) g(x)$$

Definición 1 *Decimos que $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tiene comportamiento quasiasintótico con respecto a ρ si para alguna $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y toda función de prueba $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,*

$$\lim \left\langle \frac{f(\lambda x)}{\rho(\lambda)}, \phi(x) \right\rangle = \langle g(x), \phi(x) \rangle .$$

Esta relación también se expresa por

$$f(\lambda x) \sim \rho(\lambda) g(x) \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Ejemplo: Valores Puntuales Distribucionales

Łojasiewicz definió (1957) el valor de una distribución $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en un punto x_0 como el límite

$$f(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_0 + \varepsilon x)\,,$$

si el límite existe en la topología débil de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
En términos de evaluación en una función de prueba $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ esto significa

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\langle f(x), \phi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right)\right\rangle = f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx.$$

Se debe notar que la noción de Łojasiewicz es un caso particular de los cuasiasintóticos

Cuasiasintóticos

Los principales problemas teóricos en el estudio de los cuasiasintóticos son:

- Problemas estructurales

El problema en una variable ha sido totalmente resuelto en el caso del origen en colaboración con Stevan Pilipović en:

- *Structural Theorems for Quasiasymptotics of Distributions at the Origin, por aparecer en Mathematische Nachrichten, 2009*

El caso en infinito es resuelto en:

- *Structural Theorems for Quasiasymptotics of Distributions at Infinity, por aparecer en Publications de l'Institut Mathématique (Beograd), 2009*
- *The structure of quasiasymptotics of Schwartz distributions, por aparecer en Banach Center Publications, 2009*

Problema abierto: La characterización en varias variables

Transformada de Fourier

La idea fundamental detrás del análisis armónico es descomponer una función en términos de partes ”simples". En el caso Euclideo, se hace con funciones trigonométricas

- En el círculo, una función se descompone mediante series de Fourier

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

- En la recta real, mediante la integral de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{-ixt} dt$$

donde

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{itu} du$$

Fórmula de inversión puntual

Usando ideas de asintóticos generalizados obtuvimos la siguiente fórmula de inversión puntual de Fourier. Específicamente la caracterización estructural del cuasiasintótico

$$g(\lambda x) \sim \gamma \frac{\delta(x)}{\lambda}, \quad \lambda \to \infty$$

lleva directamente a

Teorema 1 *Sea* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$*. El valor puntual* $f(x_0)$ *existe en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *si y solo si existe un número natural* $k \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\frac{1}{2\pi}\mathrm{e.v.}\left\langle \hat{f}\left(t\right), e^{-ix_0 t}\right\rangle = f(x_0) \ \ (\mathrm{C}, k)\,.$$

Ver: *Journal of Fourier Analysis and Applications, Vol. 13, Issue 5 (2007), 551–576*

Consecuencias

Los siguientes resultados son consecuencias inmediatas de teorema pasado.

Corolario 1 *Suponga que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es una distribución periódica con serie de Fourier $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ Entonces $f(x_0)$ existe si y solo si existe un k tal que*

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{-x\leq n\leq ax} c_n e^{inx_0} = f(x_0) \quad (\mathrm{C}, k), \quad \forall a > 0.$$

Corolario 2 *Suponga que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es una distribución tal que su transformada de Fourier es una función. Entonces $f(x_0)$ existe si y solo si existe un k tal que*

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{ax} \hat{f}(t) e^{-ix_0 t} dt = f(x_0) \quad (\mathrm{C}, k), \quad \forall a > 0.$$

Detección de Saltos por datos Espectrales

- La determinación de saltos de funciones un tema fundamental algoritmos númericos para la reconstrucción de señales: *(Alvarez y Morel, 1994), (Maday, Ould Kaber, Tadmor, 1993)*
  - Compresión de imagenes
- En el contexto de datos espectrales, el interés es reconstruir una function f por sus coeficientes de Fourier en la expansión

$$(a_0/2) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- Computacionalmente, solo se pueden usar un número finito de coeficientes
- La aproximación por la serie es en general muy mala
- Existen métodos númericos muy exactos para resolver esta situación, sin embargo todos ellos necesitan una localización previa de las discontinuidades de la función

Detección de Saltos y Esquinas

Queremos determinar los saltos de una función por medio de sus datos espectrales.

Los métodos tradicionales son:

- Método de Fejér (1913)
- Método de Lukács (1919)

La mayoría de trabajos modernos todavía usan las ideas de Fejér y Lukács. Por ejemplo,

- Gelb and Tamor: Factores de Concentración (1999 y 2000)
- Kvernadze, Hagstrom y Shapiro (1999 y 2002)
- Móricz: Medias de Poisson (2001 y 2003)
- Söjlin: Transformada de Fourier (2007).

Discutiremos una generalización de la fórmula de Lukács.

El teorema de Ferenc Lukács (1919)

Considere una función $f \in L^1[-\pi, \pi]$ con expansión de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Su serie conjugada se define como $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$

El teorema de F. Lukács establece que si existe f tiene una discontinuidad de salto en el punto $x = x_0$, entonces el salto en el punto puede ser calculado por

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} (a_n \sin nx_0 - b_n \cos nx_0) = -\frac{[f]_{x=x_0}}{\pi},$$

donde $[f]_{x=x_0}$ es el salto en $x = x_0$.

Una generalización reciente (2003)

F. Móricz ha extendido el teorema de Lukács en dos direcciones. Primero considerando el salto como

$$d = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h \left(f(x_0 + t) - f(x_0 - t)\right) \mathrm{d}t.$$

Bajo esta noción de salto. Además, Móricz proporcionó la siguiente fórmula usando medias logarítmicas de tipo Abel-Poisson para la serie conjugada,

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{\log(1-r)} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n x_0 - b_n \cos n x_0) r^n = \frac{1}{\pi} d$$

Saltos Distribucionales

Definición 2 *Se dice que una distribución* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *tiene un comportamiento de salto en* $x = x_0 \in \mathbb{R}$ *si satisface*

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} f\left(x_0 + \varepsilon x\right) = \gamma_- H(-x) + \gamma_+ H(x) \qquad \textit{in} \ \ \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

El salto es definido como el número $[f]_{x=x_0} = \gamma_+ - \gamma_-$

Este límite se interpreta en la topología débil de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, es decir, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \langle f(x_0 + \varepsilon x), \phi(x) \rangle = \gamma_- \int_{-\infty}^{0} \phi(x)\, \mathrm{d}x + \gamma_+ \int_{0}^{\infty} \phi(x)\, \mathrm{d}x$$

Saltos y medias logarítmicas en el sentido de Cesàro

Teorema 2 *Suponga que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tiene un comportamiento de salto en $x = x_0$. Considere una descomposición $\hat{f} = \hat{f}_- + \hat{f}_+$ donde*

$$\operatorname{supp}\hat{f}_- \subseteq (-\infty, 0] \quad \textit{and} \quad \operatorname{supp}\hat{f}_+ \subseteq [0, \infty)$$

*Entonces, existe un número natural $k \in \mathbb{N}$ tal que $e^{ix_0 t}\hat{f}_\pm * t_\pm^k$ son **continuas** y*

$$\left(e^{ix_0 t}\hat{f}_\pm(t) * t_\pm^k\right)(x) \sim \pm [f]_{x=x_0} \frac{|x|^k}{i} \log|x|\,, \quad \textit{as} \ |x| \to \infty,$$

*en el **sentido ordinario***

Ver: J.Vindas, R.Estrada, On the jump behavior of distributions and logarithmic averages, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 347 (2008), 597–606

Saltos simétricos

El salto simétrico de $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en un punto $x = x_0$ se estudia por medio de la distribución de salto

$$\psi_{x_0}(x) = f(x_0 + x) - f(x_0 - x)$$

Definición 3 *Se dice que f tiene un comportamiento de salto simétrico $x = x_0$ si la distribución de salto ψ_{x_0} tiene comportamiento distribucional de salto en $x = 0$. En tal caso, definimos el salto simétrico de f en $x = x_0$ como el número $[f]_{x=x_0} = [\psi_{x_0}]_{x=0}/2$.*

Aplicaciones a Series de Fourier

Corolario 3 *Supongamos que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es una distribución periódica con expansión de Fourier*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Si f tiene un salto simétrico en $x = x_0$, entonces puede ser calculado por la fórmula

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{\log(1-r)} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx_0 - b_n \cos nx_0)\, r^n = \frac{1}{\pi} [f]_{x=x_0}$$

Además, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{0<n<x} (a_n \sin nx_0 - b_n \cos nx_0) \left(1 - \frac{n}{x}\right)^k = -\frac{1}{\pi} [f]_{x=x_0}$$

Comentarios

- Es posible determinar k en los dos últimos resultados, proporcionando un método númerico explícito para saltos
- En el caso de comportamiento de salto, solamente se usa la parte positiva del espectro, reduciendo la cantidad de datos para calcular saltos
- Se puede caracterizar intrínsicamente el compartamiento de salto y describir su estructura:

  Vindas, Pilipović, Structural Theorems for Quasiasymptotics of Distributions at the Origin, por aparecer en Mathematische Nachrichten, 2009
- Es posible caracterizar completamente el comportamiento de salto por medio de la transformada de Fourier:

  Studia Math. 181 (2007), J. Fourier Anal. Appl. 13 (2007)
- Nuestro método ser usado para mejorar el grado de aproximación, dando los resultados de aproximación mas rápidos en la literatura

Prueba del Teorema de los Números de los Primos

Sea $\pi(x)$ la función que cuenta cuantos primos hay por debajo de x,

$$\pi(x) = \sum_{p<x} 1, \quad (p \text{ es siempre un número primo})$$

Probaré (parcialmente) usando asintóticos generalizados que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \to \infty.$$

La prueba es basada en:

- La desigualdad elemental de Chebyshev
- Propiedades de la función zeta de Riemann en la recta $\Re e z = 1$
- Argumentos de la teoría de asintóticos generalizados

Algo de Historia

- Mediante observaciones empíricas, Gauss, Legendre, y otros conjeturaron el comportamiento de la distribución de los números primos (1796–principios de 1800)
- Ninguno de ellos fue capaz sinembargo de demostrarlo
- El trabajo de Chebyshev (1848, 1850) fue importante, al obterner estimaciones de la forma
$$A < \frac{\log x}{x}\pi(x) < B,$$
conocidas como estimaciones elementales de Chebyshev. Por ejemplo, $A = \dfrac{7}{8} = 0.875$ y $B = \dfrac{9}{8} = 1.125$
- Riemann, en su famosa memoria relacionó el teorema de los números primos con las propiedades analíticas de la funcion zeta de Riemann
- Hadamard y de la Vallée Poussin fueron los primeros en dar una prueba en 1896
- Numerosas pruebas han sido dadas desde entonces, algunos métodos importantes son los de Wiener-Ikehara y las pruebas elementales de Erdős-Selberg (1949)

Preliminares

- $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ denota la función zeta de Riemann ($\Re e z > 1$)
  - $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ admite continuación analítica a $\mathbb{C}$
  - $\zeta(1 + ix) \neq 0$, $x \neq 0$

Preliminares

- $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ denota la función zeta de Riemann ($\Re e z > 1$)
  - $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ admite continuación analítica a $\mathbb{C}$
  - $\zeta(1 + ix) \neq 0$, $x \neq 0$
- La función de von Mangoldt: $\Lambda(n) = \log p$, si $n = p^m$, $\Lambda(n) = 0$ para los demás valores de n

Preliminares

- $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ denota la función zeta de Riemann ($\Re e z > 1$)
  - $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ admite continuación analítica a $\mathbb{C}$
  - $\zeta(1+ix) \neq 0$, $x \neq 0$
- La función de von Mangoldt: $\Lambda(n) = \log p$, si $n = p^m$, $\Lambda(n) = 0$ para los demás valores de n
- Función de Chebyshev: $\psi(x) = \sum_{n<x} \Lambda(n)$
  - El Teorema de los Números Primos es equivalente a
  $$\psi(x) \sim x$$
  - Estimación elemental de Chebyshev: existe $M > 0$ tal que
  $$\psi(x) < Mx$$

Una distribución especial

La primera parte de la prueba consiste en estudiar las propiedades de

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n} \delta(x - \log n).$$

Claramente $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Una distribución especial

La primera parte de la prueba consiste en estudiar las propiedades de

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n} \delta(x - \log n).$$

Claramente $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Tomemos la transformada de Fourier-Laplace

$$\left\langle v(t), e^{izt} \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{1-iz}} = -\frac{\zeta'(1-iz)}{\zeta(1-iz)} \ ,$$

fórmula que Riemann obtuvo por derivación logarítmica del producto de Euler para la función zeta $\zeta(z) = \prod_p 1/(1-p^{-z})$.

Entonces,

$$\hat{v}(x) = -\frac{\zeta'(1-ix)}{\zeta(1-ix)}$$

Propiedad de v a ser usada

Se sigue de las propiedades de ζ que $\hat{v}(z) - \dfrac{i}{z}$ es una función clásica,

- $\hat{v}(x) - \dfrac{i}{(x+i0)} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$
- Estimación de Chebyshev: $\psi(x) < Mx$

Prueba

La prueba puede ser dividida en tres pasos

- Probar que

$$\lim_{h\to\infty} v(x+h) = 1, \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

- Probar que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \psi'(\lambda x) = \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\delta(\lambda x - n) = H(x)\ , \quad \text{in } \mathcal{D}'(0,\infty)$$

- Usar el paso anterior para concluir que

$$\psi(x) \sim x$$

Prueba: Paso 1 y 2

- El Paso 1 se sigue de
  - La estimación elemental de Chebyshev
  - La propiedad $\hat{v}(x) - \dfrac{i}{(x+i0)} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$
  - El lema de Riemann-Lebesgue
  - El teorema de Banach-Steinhaus
- El Paso 2 se sigue directamente del Paso 1 simplemente de un cambio de variable en la distribución v, $x = e^y$

Prueba: Conclusión

Tenemos entonces que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \psi'(\lambda x) = \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\delta(\lambda x - n) = H(x) \ , \quad \text{in } \mathcal{D}'(0,\infty)$$

En términos de funciones de prueba esto significa que para cada $\phi \in \mathcal{D}(0,\infty)$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\phi\left(\frac{n}{\lambda}\right) = \int_0^\infty \phi(x)dx$$

Prueba: Conclusión

Tenemos entonces que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\psi'(\lambda x)=\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\delta(\lambda x-n)=H(x)\ ,\quad \text{in } \mathcal{D}'(0,\infty)$$

En términos de funciones de prueba esto significa que para cada $\phi\in\mathcal{D}(0,\infty)$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\phi\left(\frac{n}{\lambda}\right)=\int_0^{\infty}\phi(x)dx$$

Supongamos que tuviéramos el derecho de evaluar $\phi=\chi_{[0,1)}$, entonces

$$\frac{\psi(\lambda)}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{n<\lambda}\Lambda(n)\chi\left(\frac{n}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\chi_{[0,1)}\left(\frac{n}{\lambda}\right)$$

Entonces $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\psi(\lambda)}{\lambda}=\int_0^{\infty}\chi_{[0,1)}(x)dx=1$

Prueba: Conclusión

No podemos evaluar $\chi_{[0,1)}$, pero la podemos aproximar por elementos de $\mathcal{D}(0,\infty)$

- Tomemos $\varepsilon > 0$ y arbitrario
- Escojamos dos funciones de prueba en ϕ_1 y ϕ_2 con las siguientes propiedades:
  - $0 \leq \phi_1, \phi_2 \leq 1$
  - $\mathrm{supp}\phi_1 \subseteq (0,1]$ y $\phi_1(x) = 1$ en $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$
  - $\mathrm{supp}\phi_2 \subseteq (0,1+\varepsilon]$ y $\phi_2(x) = 1$ en $[\varepsilon, 1]$

Prueba: Conclusión

Evaluando en ϕ_2 y usando la estimación de Chebyshev:

$$\begin{aligned}
\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}\sum_{x<\lambda}\Lambda(n) &\leq \limsup_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\sum_{x<\varepsilon\lambda}\Lambda(n) + \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda(n)\phi_2\left(\frac{n}{\lambda}\right)\right) \\
&\leq M\varepsilon + \lim_{\lambda\to\infty}\langle \psi'(\lambda x), \phi_2(x)\rangle \\
&= M\varepsilon + \int_0^{1+\varepsilon}\phi_2(x)dx \leq 1+\varepsilon(M+1)
\end{aligned}$$

Prueba: Conclusión

Evaluando en ϕ_2 y usando la estimación de Chebyshev:

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}\sum_{x<\lambda}\Lambda(n) \le \limsup_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\sum_{x<\varepsilon\lambda}\Lambda(n) + \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda(n)\phi_2\left(\frac{n}{\lambda}\right)\right)$$

$$\le M\varepsilon + \lim_{\lambda\to\infty}\langle \psi'(\lambda x), \phi_2(x)\rangle$$

$$= M\varepsilon + \int_0^{1+\varepsilon}\phi_2(x)dx \le 1+\varepsilon(M+1)$$

- Un argumento similar, pero ahora utilizando ϕ_1 nos lleva a

$$1-2\varepsilon \le \liminf_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\sum_{x<\lambda}\Lambda(n)$$

Prueba: Conclusión

Evaluando en ϕ_2 y usando la estimación de Chebyshev:

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}\sum_{x<\lambda}\Lambda(n) \leq \limsup_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\sum_{x<\varepsilon\lambda}\Lambda(n) + \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda(n)\phi_2\left(\frac{n}{\lambda}\right)\right)$$

$$\leq M\varepsilon + \lim_{\lambda\to\infty}\langle\psi'(\lambda x), \phi_2(x)\rangle$$

$$= M\varepsilon + \int_0^{1+\varepsilon}\phi_2(x)dx \leq 1+\varepsilon(M+1)$$

- Un argumento similar, pero ahora utilizando ϕ_1 nos lleva a

$$1-2\varepsilon \leq \liminf_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\sum_{x<\lambda}\Lambda(n)$$

- Finalmente,

$$\psi(\lambda) = \sum_{x<\lambda}\Lambda(n) \sim \lambda, \quad \lambda\to\infty$$