Teorema Tauberiano para Valores Puntuales Distribucionales

Jasson Vindas Díaz

jvindas@math.lsu.edu

Louisiana State University

Seminario del Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Universidad de Valladolid, Marzo 22, 2007

Resumen

- El objetivo de esta charla es presentar un teorema tauberiano para valores distribucionales puntuales de distribuciones de Schwartz que son valores frontera de funciones analíticas en el semiplano superior.

Resumen

- El objetivo de esta charla es presentar un teorema tauberiano para valores distribucionales puntuales de distribuciones de Schwartz que son valores frontera de funciones analíticas en el semiplano superior.
- Este teorema tauberiano es sugerido por varios teoremas tauberianos clásicos.

Resumen

- El objetivo de esta charla es presentar un teorema tauberiano para valores distribucionales puntuales de distribuciones de Schwartz que son valores frontera de funciones analíticas en el semiplano superior.
- Este teorema tauberiano es sugerido por varios teoremas tauberianos clásicos.
- Se discutirá el célebre teorema tauberiano de Hardy y Littlewood como motivación. Al final se presenta una demostración simple de este teorema.

Notación

- $\mathcal{D}$ and $\mathcal{S}$ denotan el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto y el espacio de funciones infinitamente diferenciables cuyas derivadas de todo orden son de decaimiento rápido en infinito.

Notación

- $\mathcal{D}$ and $\mathcal{S}$ denotan el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto y el espacio de funciones infinitamente diferenciables cuyas derivadas de todo orden son de decaimiento rápido en infinito.
- $\mathcal{D}'$ and $\mathcal{S}'$ los espacios de distribuciones y distribuciones temperadas.

Notación

- $\mathcal{D}$ and $\mathcal{S}$ denotan el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto y el espacio de funciones infinitamente diferenciables cuyas derivadas de todo orden son de decaimiento rápido en infinito.
- $\mathcal{D}'$ and $\mathcal{S}'$ los espacios de distribuciones y distribuciones temperadas.
- Todos nuestros espacios de distribuciones y funciones de prueba serán considerados sobre la recta real.

Notación

- $\mathcal{D}$ and $\mathcal{S}$ denotan el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto y el espacio de funciones infinitamente diferenciables cuyas derivadas de todo orden son de decaimiento rápido en infinito.
- $\mathcal{D}'$ and $\mathcal{S}'$ los espacios de distribuciones y distribuciones temperadas.
- Todos nuestros espacios de distribuciones y funciones de prueba serán considerados sobre la recta real.
- La evaluación de una distribución f en una función de prueba ϕ será denotada por

$$\langle f(x), \phi(x) \rangle$$

Valores Puntuales Distribucionales

Lojasiewicz definió el valor de una distribución $f \in \mathcal{D}'$ en un punto x_0 como el límite

$$f(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_0 + \varepsilon x)\,,$$

si el límite existe en la topología débil de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
En términos de evaluación en una función de prueba $\phi \in \mathcal{D}$ esto significa

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left\langle f(x), \phi\left(\frac{x - x_0}{\epsilon}\right)\right\rangle = f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx.$$

- **Notación** Si $f \in \mathcal{D}'$ tiene el valor γ en x_0 en el sentido de Lojasiewicz, decimos que $f(x_0) = \gamma$ en $\mathcal{D}'$. El significado de $f(x_0) = \gamma$ en $\mathcal{S}'$, ..., es claro.

Notas

- R.Estrada ha demostrado que si $f \in \mathcal{S}'$, entonces $f(x_0) = \gamma$ en $\mathcal{D}'$ implica que $f(x_0) = \gamma$ en $\mathcal{S}'$, en otras palabras la función de prueba en la definición puede ser tomada en $\mathcal{S}$.

Notas

- R.Estrada ha demostrado que si $f \in \mathcal{S}'$, entonces $f(x_0) = \gamma$ en $\mathcal{D}'$ implica que $f(x_0) = \gamma$ en $\mathcal{S}'$, en otras palabras la función de prueba en la definición puede ser tomada en $\mathcal{S}$.
- Este resultado de R.Estrada ha sido generalizado por J.Vindas y S.Pilipović para una noción mas general de comportamiento asintótico local de distribuciones: *quasiasintóticos*.

Valores Frontera de Funciones Analíticas

Sea $F(z)$ una función analítica para $\Im z > 0$. F tiene valor frontera distribucional si

$$\lim_{y \to 0^+} \langle F(x+iy), \phi(x) \rangle = \lim_{y \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+iy)\phi(x)dx$$

existe para toda $\phi \in \mathcal{D}$.

Valores Frontera de Funciones Analíticas

Sea $F(z)$ una función analítica para $\Im z > 0$. F tiene valor frontera distribucional si

$$\lim_{y \to 0^+} \langle F(x+iy), \phi(x) \rangle = \lim_{y \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+iy)\phi(x)dx$$

existe para toda $\phi \in \mathcal{D}$.

- En este caso denotamos la distribución obtenida por $F(x+i0^+)$.

Valores Frontera de Funciones Analíticas

Sea $F(z)$ una función analítica para $\Im z > 0$. F tiene valor frontera distribucional si

$$\lim_{y \to 0^+} \langle F(x+iy), \phi(x) \rangle = \lim_{y \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+iy)\phi(x)dx$$

existe para toda $\phi \in \mathcal{D}$.

- En este caso denotamos la distribución obtenida por $F(x + i0^+)$.
- No toda distribución admite tal representación, sin embargo toda distribución puede ser representada como el salto de una función analítica en $z \notin \mathbb{R}$, $f(x) = F(x + i0^+) - F(x + i0^-)$. Consecuentemente, toda distribución admite una representación armónica en el semiplano superior.

Teorema Abeliano

Se puede demostrar (Constantinescu 1968) que si $f(x) = F(x + i0^+)$ en $\mathcal{D}'$, donde F es analítica para $\Im z > 0$ y $f(x_0) = \gamma$ en $\mathcal{D}'$, entonces

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0^+} F(x_0 + i\epsilon) = \gamma.$$

Teorema Abeliano

Se puede demostrar (Constantinescu 1968) que si $f(x) = F(x + i0^+)$ en $\mathcal{D}'$, donde F es analítica para $\Im z > 0$, y $f(x_0) = \gamma$ en $\mathcal{D}'$, entonces

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0^+} F(x_0 + i\epsilon) = \gamma.$$

PREGUNTA: Condiciones tauberianas bajos las cuales el recíproco es válido.

Abel Sumabilidad

Una serie $\sum a_n$ se dice Abel sumable a γ si

$$\lim_{r \to 1^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \gamma,$$

en tal caso escribimos

$$\sum a_n = \gamma \ \ (A).$$

Abel Sumabilidad

Una serie $\sum a_n$ se dice Abel sumable a γ si

$$\lim_{r \longrightarrow 1^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \gamma,$$

en tal caso escribimos

$$\sum a_n = \gamma \ \ (A).$$

El teorema Abeliano correspondiente es

Teorema 1 *(Abel) Si la serie es convergente, entonces es Abel sumable al mismo valor de convergencia.*

Teoremas tauberianos para este caso

- En general un teorema tauberiano es el recíproco de un teorema abeliano bajo ciertas hipótesis adicionales.

Teoremas tauberianos para este caso

- En general un teorema tauberiano es el recíproco de un teorema abeliano bajo ciertas hipótesis adicionales.
- El inicio de la teoría tauberina fue marcado por el siguiente teorema.

Teoremas tauberianos para este caso

- En general un teorema tauberiano es el recíproco de un teorema abeliano bajo ciertas hipótesis adicionales.
- El inicio de la teoría tauberina fue marcado por el siguiente teorema de Tauber cuya prueba es muy simple.

Teorema *(Tauber 1897) Si los coeficientes de la serie satisfacen* $na_n = o(1)$*, entoces Abel sumabilidad de la serie implica convergencia al mismo valor.*

Teoremas tauberianos para este caso

- En general un teorema tauberiano es el recíproco de un teorema abeliano bajo ciertas hipótesis adicionales.
- El inicio de la teoría tauberina fue marcado por el siguiente teorema de Tauber cuya prueba es muy simple.

Teorema *(Tauber 1897) Si los coeficientes de la serie satisfacen* $na_n = o(1)$*, entoces Abel sumabilidad de la serie implica convergencia al mismo valor.*

- El teorema fue extendido por Littlewood in 1910.

Teoremas tauberianos para este caso

- En general un teorema tauberiano es el recíproco de un teorema abeliano bajo ciertas hipótesis adicionales.
- El inicio de la teoría tauberina fue marcado por el siguiente teorema de Tauber cuya prueba es muy simple.

Teorema*(Tauber 1897) Si los coeficientes de la serie satisfacen $na_n = o(1)$, entoces Abel sumabilidad de la serie implica convergencia al mismo valor.*

- El teorema fue extendido por Littlewood in 1910.

Teorema*(Hardy-Littlewood) Si la condición $na_n = o(1)$ es sustituída por la condición mas débil $na_n = O(1)$ la conclusión del teorema se mantiene cierta.*

(A,λ_n) sumabilidad

Sea $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ un sucesión creciente de números reales positivos. Decimos que

$$\sum a_n = \gamma \ \ (A, \lambda_n),$$

si

$$\lim_{y \to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n y} = \gamma.$$

(A,λ_n) sumabilidad

Sea $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ un sucesión creciente de números reales positivos. Decimos que

$$\sum a_n = \gamma \ \ (A, \lambda_n),$$

si

$$\lim_{y \to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n y} = \gamma.$$

Nota: La noción de (A,n) sumabilidad se reduce simplemente a (A) sumabilidad

(A,λ_n) sumabilidad

Sea $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ un sucesión creciente de números reales positivos. Decimos que

$$\sum a_n = \gamma \quad (A, \lambda_n),$$

si

$$\lim_{y \to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n y} = \gamma.$$

Nota: La noción de (A,n) sumabilidad se reduce simplemente a (A) sumabilidad

Nota: El teorema abeliano es válido para (A,λ_n) sumabilidad también.

Teorema Tauberiano para (A,λ_n) sumabilidad

Littlewood (1910) conjeturó una extensión de su teorema tauberiano (esta también generaliza un teorema de Landau (1907)), sin embargo, esto fue probado por Ananda Rau hasta 1928.

Teorema Tauberiano para (A,λ_n) sumabilidad

Littlewood (1910) conjeturó una extensión de su teorema tauberiano (esta también generaliza un teorema de Landau (1907)), sin embargo, esto fue probado por Ananda Rau hasta 1928.

Teorema 2 *Si*

$$\sum a_n = \gamma \ (A, \lambda_n)$$

y

$$a_n = O\left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n}\right),$$

entonces $\sum a_n$ *es convergente a* γ.

Búsqueda de condición tauberiana

- Asociemos a $\sum a_n$ la distribución $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$.

Búsqueda de condición tauberiana

- Asociemos a $\sum a_n$ la distribución $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$.
- f admite una representación analítica dada por $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n z}$ para $\Im z > 0$, esta represantación es válida en $\mathcal{S}'$.

Búsqueda de condición tauberiana

- Asociemos a $\sum a_n$ la distribución $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$.
- f admite una representación analítica dada por $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n z}$ para $\Im z > 0$, esta representación es válida en $\mathcal{S}'$.
- (A,λ_n) simplemente dice que $F(i\epsilon) \to \gamma$ cuando $\epsilon \to 0^+$.

Búsqueda de condición tauberiana

- Asociemos a $\sum a_n$ la distribución $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$.
- f admite una representación analítica dada por $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n z}$ para $\Im z > 0$, esta representación es válida en $\mathcal{S}'$.
- (A,λ_n) simplemente dice que $F(i\epsilon) \to \gamma$ cuando $\epsilon \to 0^+$.

Lema: *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \gamma$, entonces $f(0) = \gamma$ en $\mathcal{D}'$.*

Búsqueda de condición tauberiana

- Asociemos a $\sum a_n$ la distribución $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$.
- f admite una representación analítica dada por $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n z}$ para $\Im z > 0$, esta representación es válida en $\mathcal{S}'$.
- (A,λ_n) simplemente dice que $F(i\epsilon) \to \gamma$ cuando $\epsilon \to 0^+$.

Lema: *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \gamma$, entonces $f(0) = \gamma$ en $\mathcal{D}'$.*

- Sustituyamos la conclusión del teorema tauberiano de H-L por la conclusión mas débil $f(0) = \gamma$ en $\mathcal{D}'$.

Búsqueda de condición tauberiana

- Asociemos a $\sum a_n$ la distribución $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$.
- f admite una representación analítica dada por $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n z}$ para $\Im z > 0$, esta representación es válida en $\mathcal{S}'$.
- (A,λ_n) simplemente dice que $F(i\epsilon) \to \gamma$ cuando $\epsilon \to 0^+$.

Lema: *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \gamma$*, entonces* $f(0) = \gamma$ *en* $\mathcal{D}'$*.*

- Sustituyamos la conclusión del teorema tauberiano de H-L por la conclusión mas débil $f(0) = \gamma$ en $\mathcal{D}'$.

Pregunta: El significado de $a_n = O(\lambda_n^{-1}(\lambda_{n+1} - \lambda_n))$ distribucionalmente.

Condición tauberiana

Lema: *Bajo la hipótesis TAUBERIANA del teorema tauberiano de Hardy y Littlewood,*

$$\sum_{\lambda_n < x} a_n = F\left(\frac{i}{x}\right) + O(1),\ x \to \infty.$$

Condición tauberiana

Lema: *Bajo la hipótesis TAUBERIANA del teorema tauberiano de Hardy y Littlewood,*

$$\sum_{\lambda_n < x} a_n = F\left(\frac{i}{x}\right) + O(1), \; x \to \infty.$$

Corolario:

$$\sum_{\lambda_n < x} a_n = O(1)$$

Condición tauberiana

Lema: *Bajo la hipótesis TAUBERIANA del teorema tauberiano de Hardy y Littlewood,*

$$\sum_{\lambda_n<x} a_n = F\left(\frac{i}{x}\right) + O(1),\ x \to \infty.$$

Corolario:

$$\sum_{\lambda_n<x} a_n = O(1)$$

Lema: *Bajo las hipótesis del teorema tauberiano de Hardy y Littlewood*

$$\langle f(\epsilon x), \phi(x)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\epsilon\lambda_n x}\phi(x)dx = O(1) \ cuando\ \epsilon \to 0.$$

Definición

Sea $f \in \mathcal{D}'$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, f se dice distribucionalmente acotada en x_0 en $\mathcal{D}'$ si

$$\langle f(x_0 + \epsilon x), \phi(x) \rangle = O(1), \ \epsilon \to 0,$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}$.

Teorema Principal

1. Asumamos que $f(x) = F(x + i0^+)$ en $\mathcal{D}'$, donde $F(z)$ es analítica para $\Im z > 0$, y $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. Supongamos que $F(x_0 + i\epsilon) \longrightarrow \gamma$ cuando $\epsilon \longrightarrow 0^+$.

Teorema Principal

1. Asumamos que $f(x) = F(x + i0^+)$ en $\mathcal{D}'$, donde $F(z)$ es analítica para $\Im z > 0$, y $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. Supongamos que $F(x_0 + i\epsilon) \to \gamma$ cuando $\epsilon \to 0^+$.
3. La hipótesis adicional tauberiana:

f *distribucionalmente acotada en* x_0,

implica que

$f(x_0) = \gamma$ *en* $\mathcal{D}'$.

Prueba del teorema de Hardy-Littlewood

Ya hemos visto que las hipótesis del teorema implican que

- $f(x) = \sum a_n e^{i\lambda_n x}$ tiene valor puntual $f(0) = \gamma$ en $\mathcal{D}'$, es decir

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \sum a_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\epsilon\lambda_n x}\phi(x)dx = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}$.

Prueba del teorema de Hardy-Littlewood

Ya hemos visto que las hipótesis del teorema implican que

- $f(x) = \sum a_n e^{i\lambda_n x}$ tiene valor puntual $f(0) = \gamma$ en $\mathcal{D}'$, es decir

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \sum a_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\epsilon\lambda_n x} \phi(x) dx = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}$.

- Como $f \in \mathcal{S}'$, entonces el limite anterior es valido para toda $\phi \in \mathcal{S}$.

Prueba del teorema de Hardy-Littlewood

Ya hemos visto que las hipótesis del teorema implican que

- $f(x) = \sum a_n e^{i\lambda_n x}$ tiene valor puntual $f(0) = \gamma$ en $\mathcal{D}'$, es decir

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \sum a_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\epsilon\lambda_n x}\phi(x)dx = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}$.

- Como $f \in \mathcal{S}'$, entonces el limite anterior es valido para toda $\phi \in \mathcal{S}$.
- $F(x) = \sum_{\lambda_n < x} a_n$=O(1), es decir existe $M > 0$ tal que

$$\left| \sum_{\lambda_n < x} a_n \right| < M.$$

Notas Finales

- La teoría Taberiana de funciones generalizadas fue iniciada por la escuela Rusa en el instituto Steklov por Vladimirov, Drozzinov y Zavialov. En este momento existe una maquinaria muy desarrollada en esta área en el contexto de distribuciones temperadas en una y varias variables con soporte en conos. Muchos teoremas taubierianos clásicos encuentran una interpretación muy sencilla desde el punto de vista de la teoría Tauberiana para funciones generalizadas de V-D-Z.

Notas Finales

- La teoría Taberiana de funciones generalizadas fue iniciada por la escuela Rusa en el instituto Steklov por Vladimirov, Drozzinov y Zavialov. En este momento existe una maquinaria muy desarrollada en esta área en el contexto de distribuciones temperadas en una y varias variables con soporte en conos. Muchos teoremas tauberianos clásicos encuentran una interpretación muy sencilla desde el punto de vista de la teoría Tauberiana para funciones generalizadas de V-D-Z.
- Generalizaciones del teorema Tauberiano de Wiener han sido dadas hasta el momento por Pilipovic y Stankovic de la escuela Serbia de Novi Sad, otras generalizaciones han sido estudiadas por Drozzinov y Zavialov.

Notas Finales

- La teoría Taberiana de funciones generalizadas fue iniciada por la escuela Rusa en el instituto Steklov por Vladimirov, Drozzinov y Zavialov. En este momento existe una maquinaria muy desarrollada en esta área en el contexto de distribuciones temperadas en una y varias variables con soporte en conos. Muchos teoremas taubertianos clásicos encuentran una interpretación muy sencilla desde el punto de vista de la teoría Tauberiana para funciones generalizadas de V-D-Z.
- Generalizaciones del teorema Tauberiano de Wiener han sido dadas hasta el momento por Pilipovic y Stankovic de la escuela Serbia de Novi Sad, otras generalizaciones han sido estudiadas por Drozzinov y Zavialov.
- Transformadas integrales de muchos tipos han sido estudiadas en este contexto. Las aplicaciones de la escuela Rusa a Teoría del Campo Quático han sido muy amplias.