Una Introducción a Varición Regular: Teoría de Karamata

(Jasson Vindas)

Universidad de Costa Rica, mayo 6, 2009

1. Introducción:

La teoría de variación regular fue introducida por Jovan Karamata en 1933 [7]. Inicialmente, Karamata desarrolla su teoría en relación a "teoremas tauberianos" [5,6]; sin embargo, las funciones de Karamata han encontrado aplicaciones importantes y diversas en áreas como teoría de números [2], teoría de funciones enteras [2], probabilidad y estadística [2, 4, 14], ecuaciones diferenciales [17], y física cuántica [17].

Las ideas de Karamata han sido extendidas en muchas direcciones, los dos libros clásicos de referencia son [2] y [11], siendo el último talvez el más completo. Actualmente, la teoría de variación regular tiene su propio número de clasificación dentro del área de análisis real (MSC[2000]26A12)

Variación Regular es también importante en "funciones generalizados" [15, 9, 17].

1.2. El teorema tauberiano de Littlewood y el trabajo de J. Karamata.

Karamata se dió a conocer en la comunidad matemática internacional después de comunicar una ingeniosa prueba del teorema de J.E. Littlewood [10]. Aunque muchas pruebas de este teorema existían antes de Karamata, existía todavía el sin sabor de una demostración simple, tal y como la obtenida por Karamata. Karamata publica su demostración en 1930 [5], un año mas tarde publica un ~~tedu~~ trabajo sobre teoremas tauberianos para las transformadas de Laplace y Stieltjes [6]. En 1933 su artículos fundamentales que fueron las bases de la teoría de variación regular [7]. Posiblemente las ideas de [7] fueron inspiradas en los métodos y problemas de [5] y [6]. Por esto discutiremos el teorema tauberiano de Littlewood.

El teorema de Littlewood da el recíproco del teorema de Abel bajo una hipótesis "tauberiana".

Teorema 1 (Abel) Supóngase que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \gamma$ is convergente $\Rightarrow$

(1) $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge en $|r|<1$ y $\lim_{r\to 1^-} f(r) = \gamma$ ////

Naturalmente el recíproco no es cierto en general, por ejemplo

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n = \frac{1}{1+r} \longrightarrow \frac{1}{2}, \ r \to 1^-,$$ pero $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ es divergente.

En 1897, Tauber prueba que

Teorema 2: Si $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \longrightarrow \gamma$ cuando $r \to 1^-$ y $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ *

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a γ.

El teorema de Abel ~~seg~~ -Tauber puede ser reinterpretado en términos de Abel sumabilidad de series divergentes.

Def 1: Decimos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es sumable a γ si (1) se satisface, en tal caso se escribe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \gamma \ (A).$$

En 1910, Littlewood obtiene su famoso teorema

Teorema 3 (Littlewood [10]) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \gamma \ (A)$ y $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \gamma$.

Sorprendentemente el Teorema 3 es mucho mas profundo y difícil de probar que el teorema 2. Antes de Karamata las pruebas del Teorema 3 usaban métodos que pueden ser considerados como muy "sofisticados" tomando en cuenta ~~de~~ la época.

Al final de ~~la elabora~~ esta introducción deduciremos el Teorema 3 a partir del Teorema tauberiano de Karamata.

---

* o, O son los símbolos de Landau

2. Funciones de variación regular

En [6] Karamata enfrentó la siguiente situación:

"Relacionar el comportamiento asintótico de

$$\int_0^\infty k(t)R(xt)\,dt \quad y \quad R(x) \qquad (x\to\infty)\text{''}$$

donde $k(t)=e^{-t}$ ó $\frac{1}{1+t}$ (transformada de Laplace y Stieltjes)

Dividiendo estas ~~cont.~~ funciones, es esperable que la "única" forma de relacionarlas es suponer la existencia de

$$(2) \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{R(tx)}{R(x)}, \quad \text{para cada } t\in(0,\infty).$$

__Lemma__: Supongamos que R es medible (con respecto a la medida de Lebesgue), positiva, y que (2) existe para $t\in B$, con B un conjunto de medida positiva, entonces (2) existe para todo $t\in(0,\infty)$ y existe α tal que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{R(tx)}{R(x)}=t^\alpha \quad ////$$

__Idea de la prueba__:

Se demuestra fácil que B es un subgrupo multiplicativo de $\mathbb{R}_+=(0,\infty)$, con tiene medida positiva el teorema de Steinhaus [12, 13] implica que $B=\mathbb{R}_+$. Para la segunda parte pongamos $h(t)=\lim_{x\to\infty}\frac{R(tx)}{R(x)}$. Así h es positiva y satisface $h(t_1t_2)=h(t_1)h(t_2)$; h además es medible, y como es bien sabido [2, 11, 13], las únicas soluciones de la ecuación funcional que satisface h y que son medibles y positivas ~~son~~ tienen la forma $h(t)=t^\alpha$. ////

__Definición 1__: Sea R una función medible y positiva en un intervalo $[A,\infty)$.

Se dice que R tiene variación regular con índice α si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{R(tx)}{R(x)}=t^\alpha, \quad t\in(0,\infty). \quad ////$$

Definición 2: Si $\alpha=0$, es decir,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(xt)}{L(x)}=1,$$

L se dice ser de "variación lenta".

Sea R de variación regular con índice α, entonces $L(x)=x^{-\alpha}R(x)$ es de variación lenta y $R(x)=x^{\alpha}L(x)$. Así, las propiedades de R se deduce de las de L.

Propiedades Importantes de las funciones de variación lenta:

i) Si t se mantiene en un subconjuto compacto de $(0,\infty)$, entonces (2) se satisface uniformemente en t. [8, 2, 11].

ii) Fórmula de representación. L es de variación lenta $\Leftrightarrow$ existen dos funciones υ y w y un número B tq

- w es acotada y $\exists c\in\mathbb{R}$ tq $\lim_{x\to\infty} w(x)=c$
- υ es continua y $\lim_{x\to\infty} \upsilon(x)=0$
- $L(x)=\exp\left(w(x)+\int_B^x \frac{\upsilon(t)}{t}\,dt\right)$

iii) La fórmula de representación implica que si σ es cualquier número positivo entoces

$$L(x)=O(x^{\sigma}) \text{ y } \frac{1}{L(x)}=O(x^{\sigma}),\ x\to\infty$$

iv) Es más dado cualquier $\sigma>0$ $\exists M, B_1>0$ tq si $xt, t\geq B_1$

$$\frac{L(xt)}{L(x)}\leq M\max\{t^{\sigma}, t^{-\sigma}\}$$

v) Ejemplos: Cualquier función que satisfaga $\lim_{x\to\infty}\frac{xL'(x)}{L(x)}=0$ es de variación lenta por ejemplo $(\ln x)^{\beta}$, $\beta\in\mathbb{R}$, consecuentemente $x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}$ es de variación regular con índice α.

3. Teorema Tauberiano de Karamata

Empecemos con el teorema abeliano

3.1 Teorema Abeliano

El siguiente teorema es un caso particular de [1], adecuado a la transformada de Laplace: $\mathcal{L}f(x) := \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\lambda} f(t)e^{-xt}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-xt}dt$

Teorema 4: Sea $f \in L^1_{loc}[0,\infty)$ si $f(t) \sim t^{\alpha}L(t), t\to\infty$, donde L es de variación lenta y $\alpha > -1$, entonces

$$\mathcal{L}f\left(\tfrac{1}{x}\right) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\frac{t}{x}}dt \sim \Gamma(\alpha+1)x^{\alpha+1}L(x),\ x\to\infty.$$

Prueba: Pongamos

$$\frac{1}{x^{\alpha+1}L(x)}\int_0^{\infty} f(t)e^{-\frac{t}{x}}dt = \frac{1}{x^{\alpha+1}L(x)}\int_0^{A} f(t)e^{-\frac{t}{x}}dt + \frac{1}{x^{\alpha+1}L(x)}\int_A^{\infty} f(t)e^{-\frac{t}{x}}dt$$

$$= I_1(x) + I_2(x),$$

donde A es un número tq $\frac{|f(u)|}{u^{\alpha}L(u)} \leq M_1$ y $\frac{1}{M_2u^{\sigma}} \leq \frac{L(xu)}{L(x)} \leq M_2u^{\sigma}$, para $xu \geq A$, con $M_1, M_2, \sigma > 0$. (Asumamos $M_1, M_2 \geq 1$)

Primero

$$|I_1(x)| \leq \frac{1}{x^{\alpha+1}L(x)}\int_0^{A}|f(t)|dt = O\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}L(x)}\right) = o(1);\ \text{así } \lim_{x\to\infty} I_1(x) = 0$$

Además, $I_2(x) = \frac{1}{x^{\alpha}L(x)}\int_{\frac{A}{x}}^{\infty} f(xt)e^{-t}dt = \int_{\frac{A}{x}}^{\infty}\frac{f(xt)}{(xt)^{\alpha}L(xt)}\frac{L(xt)}{L(x)}t^{\alpha}e^{-t}dt$

Pero

$$\left|\frac{f(xt)}{(xt)^{\alpha}L(xt)}\frac{L(xt)}{L(x)}\right| \leq M_1M_2\max\{t^{\sigma}, t^{-\sigma}\} \text{ si } t \geq \frac{A}{x}$$

el último término es absolutamente integrable, así el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue implica que

$$\lim_{x\to\infty} I_2(x) = \int_0^{\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt = \Gamma(\alpha+1) \quad ///$$

3.2 Teorema tauberiano

Sea S una función creciente en $[0,\infty)$. Asumiremos siempre que $S(0)=0$. Su transformada de Laplace-Stieltjes es dada por

$$\mathcal{L}\,ds(x) = (\mathcal{L}s')(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\,ds(t) = x\int_0^\infty s(t)e^{-xt}\,dt$$

$$= x\,\mathcal{L}s(x), \text{ donde las integrales son impropias en } \infty.$$

Teorema 5 (Karamata)

Sea S creciente, L de variación lenta y $\alpha>0$, entonces

$$\mathcal{L}\,ds\left(\frac{1}{x}\right) \sim x^\alpha L(x), \quad x\longrightarrow\infty$$

si y sólo si

$$S(x) \sim \frac{x^\alpha L(x)}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad x\longrightarrow\infty$$

La prueba de la parte "abeliana" es fácil

$$\mathcal{L}\,ds\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\mathcal{L}s\left(\frac{1}{x}\right) \overset{(\text{Teorema 4})}{\sim} \frac{1}{x}\,\Gamma(\alpha+1)\,\frac{x^{\alpha+1}L(x)}{\Gamma(\alpha+1)} = x^\alpha L(x).$$

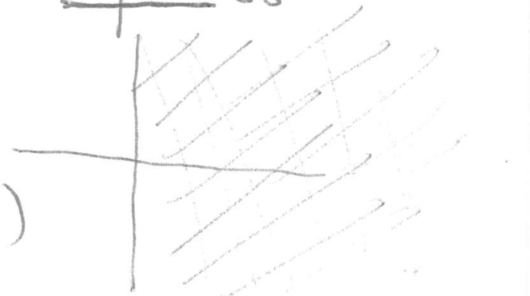
La otra parte tauberiana es mas interesante. Daremos una prueba basada en análisis funcional, específicamente usando distribuciones de Schwartz, tema que referimos a [17] para propiedades y definiciones.

El espacio $S[0,\infty) = \left\{\phi\in C^\infty[0,\infty) : \|\phi\|_{k,m} = \sup_{t\in\mathbb{R}} (1+|t|)^m|\phi^{(k)}(t)|<\infty\right\}$,

la topología en $S[0,\infty)$ es generada por las seminormas $\|\ \|_{k,m}$.

Su dual es $S'[0,\infty)$, así $f\in S'[0,\infty)$ es un funcional lineal continuo sobre el espacio $S[0,\infty)$. Si $f\in S'[0,\infty)$ su <u>transformada de Laplace</u> es

$\mathcal{L}f(z) = \langle f(t), e^{-zt}\rangle$, analítica en $\operatorname{Re} z>0$.



La derivada distribucional es

$$\langle f'(t),\phi(t)\rangle = -\langle f(t),\phi'(t)\rangle,\ \phi\in S[0,\infty)$$

por definición.

Lema 1 $S(x)=O(x^{\alpha}L(x)),\ x\to\infty,$

Dem: $S(x)=\int_0^x ds(t)\le\int_0^x e^{1-\frac{t}{x}}ds(t)\le e\mathcal{L}ds\left(\frac{1}{x}\right)=O(x^{\alpha}L(x)),\ x\to\infty$ ///

Corolario 1: $s\in S'[0,\infty)$.

Lema 2: El conjunto de combinaciones lineales de $\{e^{-ut}\}_{u>0}$ es denso en $S[0,\infty)$.

Dem: Si no es denso $\exists f\in S'[0,\infty)$ tq $0=\langle f(t),e^{-ut}\rangle=\mathcal{L}f(u),\ u>0$, esto en virtud del teorema de Hahn-Banach. Por otro lado $\mathcal{L}f(z)$ es analítica $\Rightarrow\mathcal{L}f(z)=0\Rightarrow f=0$. $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

Dem de la parte tauberiana: (Ideas de [17])

Sea $f_x\in S'[0,\infty)$ la distribución definida por

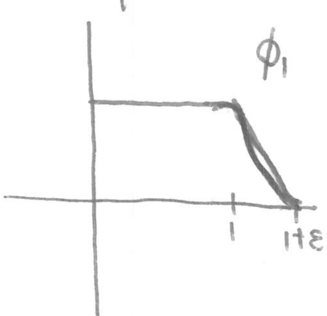
$$\langle f_x,\phi\rangle:=\int_0^\infty\phi\left(\frac{t}{x}\right)\frac{ds(t)}{x^{\alpha}L(x)}=-\int_0^\infty\phi'(t)\frac{s(xt)}{x^{\alpha}L(x)}dt$$

Por Lema 1, $\langle f_x,\phi\rangle=O(1),\ x\to\infty$, para cada $\phi\in S[0,\infty)$. Así $\{f_x\}_{x>0}$ es una familia equicontinua. Por otro lado, $\langle f_x,\phi\rangle\longrightarrow\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\phi(t)t^{\alpha-1}dt$ para ϕ en el conjunto de combinaciones lineales generadas por $\{e^{-ut}\}_u$, en efecto $\langle f_x(t),e^{-ut}\rangle=\frac{1}{x^{\alpha}L(x)}\mathcal{L}ds\left(\frac{u}{x}\right)\sim\frac{1}{u^{\alpha}}\frac{L(\frac{x}{u})}{L(x)}\sim\frac{1}{u^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-ut}dt$

Estos dos últimos hechos implican que $\forall\phi\in S[0,\infty)$

$$(3)\qquad\int_0^\infty\phi\left(\frac{t}{x}\right)ds(t)=\langle f_x,\phi\rangle x^{\alpha}L(x)\sim\frac{x^{\alpha}L(x)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\phi(t)dt.$$

Escojemos $\phi_1\in S[0,\infty)$ tq $\phi(t)=1,\ t\in[0,1]$, $\phi(t)=0,\ t>1+\varepsilon$, y $0\le\phi_1(t)\le1\ \forall t$, esto para un $\varepsilon>0$ dado.



Así $\limsup_{x\to\infty}\frac{S(x)}{x^{\alpha}L(x)}=\limsup_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha}L(x)}\int_0^x ds(t)$

$$\le\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha}L(x)}\int_0^\infty\phi_1\left(\frac{t}{x}\right)ds(t)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\phi_1(t)dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(1+\varepsilon)^{\alpha}$$

como ε es arbitrario, concluimos que

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{S(x)}{x^{\alpha}L(x)} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Similarmente, si tomamos ϕ_2 tq $0\leq\phi_2\leq 1$, $\phi_2(t)=0$, $t\geq 1$, y $\phi_2(t)=1$ para $t\in[0,1-\varepsilon]$, entonces

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{S(x)}{x^{\alpha}L(x)} \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\phi_2(t)t^{\alpha-1}dt \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{1-\varepsilon}\phi_2(t)t^{\alpha-1}dt$$
$$\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(1-\varepsilon)^{\alpha}$$

la arbitriaridad de ε implica que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \varliminf_{x\to\infty} \frac{S(x)}{x^{\alpha}L(x)} \leq \varlimsup_{x\to\infty} \frac{S(x)}{x^{\alpha}L(x)} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$$

por lo tanto $\quad S(x)\sim x^{\alpha}L(x)$

<u>Corolario 2:</u> Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie con términos $a_n\geq -K$, para alguna constante $K>0$. Si $f(r)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \sim \frac{\beta}{1-r}$, $r\to 1^-$, entonces

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \sim \beta N$$

<u>Dem:</u> Pongamos $b_n=a_n+K\geq 0$ entonces $g(r)=f(r)+\frac{K}{1-r}\sim\frac{\beta+K}{1-r}$ cambiemos $r=e^{-\frac{1}{x}}$, obtenemos que $x\to\infty$ si $r\to 1^-$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\frac{n}{x}} \sim (\beta+K)x$$

Si definimos $S(x)=\sum_{n<x} b_n$, $\mathcal{L}dS(\frac{1}{x})=\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\frac{n}{x}}\sim(\beta+K)x$

y S es creciente, el Teorema tauberiano de Karamata implica que

$$\sum_{n=0}^{N} a_n + K(N+1) = \sum_{n=0}^{N} b_n \sim \beta N + KN \Rightarrow \sum_{n=0}^{N} a_n \sim \beta N$$

4. Prueba del teorema de Littlewood basada en ~~Ha~~ el Teorema 4.

Probaremos que si $f(r)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \longrightarrow \gamma$ y $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \gamma.$$

Pba: Sea M tq $-\frac{M}{n} \leq a_n \leq \frac{M}{n}$, $n \geq 1$.

Lema 3: $\sum_{n=0}^{N} a_n = O(1)$, $N \to \infty$.

Pba: (Elemental) pongamos $r = e^{-\frac{1}{x}}$, $S(x)=\sum_{n<x} a_n$, y $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{n}{x}}$

$$|S(x)| \leq |F(x)| + |S(x)-F(x)| = O(1) + \sum_{0\leq n<x} |a_n| \left(1-e^{-\frac{n}{x}}\right) + M\sum_{x\leq n} \frac{1}{n} e^{-\frac{n}{x}}$$

$$= O(1) + M\sum_{0\leq n<x} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{x}\right) + \frac{M}{x}\sum_{x\leq n} e^{-\frac{n}{x}} \leq O(1) + \frac{M}{x}\int_x^{\infty} e^{-\frac{t}{x}}\,dt \leq O(1)+Me = O(1).$$

Pongamos $c_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$, por Lema 3 c_N es acotada por abajo además

$$(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \sim \frac{\gamma}{1-r} \underset{(\text{corolario }2)}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{N} c_n \sim \gamma N$$

Concluimos entonces que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(1-\frac{n}{N}\right) a_n = \gamma$$

en el lenguaje de sumabilidad de Césaro $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \gamma \; (C,1)$.

Este es el último paso, el teorema de Hardy

Lema: Si $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \gamma \; (C,1)$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \gamma$ //.

Pba: Esta prueba distribucional es de [16].

Definimos $\sum_{n<x} a_n = S(x)$, la sumabilidad $(C,1)$ implica que $f(x) = \int_0^x S(t)\,dt$

$$= \sum_{n<x} (x-n) a_n \sim \gamma x$$

9

Así si $\phi \in C^\infty[0,\infty)$ con soporte compacto entonces el teorema de convergencia dominada de Lebesgue implica que

$$(4) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^\infty s(xt)\phi(t)\,dt = \int_0^\infty t\phi(t)\,dt \,,$$

por otro lado (4) implica que para cualquiera de estas funciones ϕ tenemos que

$$\sum_{n=0}^\infty a_n\phi\left(\frac{n}{x}\right) = \int_0^\infty \phi\left(\frac{t}{x}\right) ds(t) = -\frac{1}{x}\int_0^\infty s(t)\phi'\left(\frac{t}{x}\right)dt = \frac{1}{x^2}\int_0^\infty s(t)\phi''\left(\frac{t}{x}\right)dt$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^\infty s(xt)\phi''(t)\,dt \longrightarrow \gamma\int_0^\infty t\phi''(t)\,dt = -\gamma\int_0^\infty \phi'(t)\,dt$$

$$= \gamma\phi(0) - \phi(\infty) = \gamma\phi(0)$$

Así

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^\infty a_n\phi\left(\frac{n}{x}\right) = \gamma\phi(0) \quad \text{si } \phi\in C^2[0,\infty) \text{ con soporte compacto} \,,$$

escojamos ϕ tq $0\le\phi\le1$, $\phi(t)=1$ en $[0,1]$ y $\phi(t)=0$, $t\geq 2$, entonces

$$\limsup_{x\to\infty} \left|\sum_{n<x} a_n - \gamma\right| \le \lim_{x\to\infty}\left|\sum_{n=0}^\infty a_n\phi\left(\frac{n}{x}\right) - \gamma\right| + \limsup_{x\to\infty}\left|\sum_{1\le\frac{n}{x}\le2} a_n\phi\left(\frac{n}{x}\right)\right|$$

$$\cancel{\le 0 + M\sum_{1\le\frac{n}{x}\le2}\frac{1}{n}\left|\phi\left(\frac{n}{x}\right)\right| = M\frac{1}{x}\sum\frac{1}{\left(\frac{n}{x}\right)}\phi\left(\frac{n}{x}\right)}$$

$$\le 0 + M\limsup_{x\to\infty}\sum_{1\le\frac{n}{x}\le2}\frac{1}{n}\phi\left(\frac{n}{x}\right) = M\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{1\le\frac{n}{x}\le2}\left(\frac{n}{x}\right)^{-1}\phi\left(\frac{n}{x}\right)$$

$= M\int_1^2 \frac{\phi(t)}{t}\,dt$, como ϕ es arbitraria esta integral se puede escojer tan pequeña como queramos, por lo tanto

$$\sum_{n=0}^\infty a_n = \gamma.$$

Referencias:

[1] S. Aljančić, R. Bojanić, M. Tomić, Sur la valuer asymptotique d'une classe des integrales defines, Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci 7 (1954) p. 81-94.

[2] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, Regular Variation, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[3] R. Bojanić, J. Karamata, On a class of functions of regular asymptotic behavior, Math. Res. Centre, U.S. Army, Madison, Wis., Tech. Summary Rep. No. 436 (1963).

[4] L. de Haan, On regular variation and its applications to the weak convergence of sample extremes.

[5] J. Karamata, Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes, Math. Z. 32 (1930), 319-320.

[6] ———, Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche and Stieltjessche Transformation betreffen, J. Reine Angew. Math. 164 (1931), 27-39

[7] ———, Sur un mode de croissance régulière des fonctions, Mathematica (Cluj) 4 (1933), 38-53. (ver también: Bull. Soc. Math. France 61 (1933), 55-62)

[8] H. Korevaar, T. van Aardenne-Ehrenfest, N. G de Bruijn, A note on slowly oscillating functions, Nieuw. Arch. Wisk. 23 (1949), 77-88.

[9] S. Pilipović, B. Stanković, A. Takači, Asymptotic Behaviour and Stieltjes Transformation of Distributions, Teubner-Texte zuer Mathematik, Leipzig, 1990

[10] J. E. Littlewood, The converse of Abel's theorem on power series, Proc. London Math. Soc. 9 (1911), 434-448.

[11] E. Seneta, Regularly Varying Functions, Lecture Notes in Mathematics 598, Springer Verlag, Berlin, 1976.

[12] H. Steinhaus, Sur les distances des points de measure positive, Fund. Math. 1, 93-104.

[13] J.C. Oxtoby, Measure and Category, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, NY, 1980.

[14] W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, vol. II, second edition, John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 1971

[15] J. Vindas, Structural Theorems for Quasiasymptotics of Distributions at Infinity, Pub. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 84(98) (2008), 159-174.

[16] J. Vindas, R. Estrada, A tauberian theorem for distributional point values, Arch. Math. (Basel) 91 (2008), 247-253.

[17] V.S. Vladimirov, B.I. Zavialov, Y.N. Drozhzhinov, Tauberian theorems for generalized functions, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1988.