Introducción a las Series de Fouirier y una Conjetura sobre Sumabilidad Rectangular de Series Dobles

por

Jasson Vindas Díaz*

presentado en

Escuela de Matemática

Universidad Nacional (Costa Rica)

Heredia, Costa Rica

mayo, 2009

* Department of Mathematics
Louisiana State University
Baton Rouge, LA 70803
U.S.A.
Email: jvindas@math.lsu.edu, jvindascr@yahoo.com

1. Introducción:

El objetivo de estas notas es dar una introducción a la series de Fourier. El nombre "series de Fourier" fue dado en honor al físico-matemático frances Joseph Fourier (1768-1830), quién, entre otras cosas, hizo grandes contribuciones a la teoría de la conducción del calor. En su famosa memoria "Théorie Analytique de la Chaleur", Fourier utilizó sistematicamente este tipo de series en sus investigaciones sobre la conducción del calor. Paradojicamente J. Fourier contribuyó muy poco a la teoría matemática de estas series, es mas, este tipo de series eran ya bien conocidas por otros matemáticos tales como Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange, y otros.

La idea básica es estudiar funciones por medio de "series trigonométricas", esto es descomponer f una función periódica, de periodo 2π, en

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Por supuesto escojeremos el periodo como 2π por conveniencia, pues el caso de un periodo general, digamos p, se reduce a este por medio de un cambio de variable (si f es de periodo p, entonces g dada por $g(y)=f\left(\frac{py}{2\pi}\right)$ es periódica con periodo 2π).

Para un estudio a profundidad, el lector puede consultar el libro de A. Zygmund [9] (Ver también [3])

2. Motivación: El Problema de la Cuerda Vibrante

Las series de Fourier aparecen naturalmente en la solución de muchos problemas en Física. Este tipo de descomposiciones en series trigonométricas están íntimamente relacionadas a varias equaciones derivadas parciales.

En esta sección estudiaremos un problema de mecánica clásica: el problema de la cuerda vibrante. Se presentará una solución que se le adjudica a Daniel Bernoulli [8].

2.1 El Problema Mecánico:

Supongamos que una cuerda fléxible es colocada sobre el eje "x", de manera que sus extremos son atados a dos puntos, por conveniencia supongamos que los extremos están atados en los puntos $x=0$, y, $x=\pi$. Tomemos la cuerda de tal forma que se lleva a tener la figura de una curva $y=f(x)$ en el plano xy (Fig 1) y luego es soltada. Nuestro objetivo es describir la ecuación de movimiento de la cuerda. Para simplificar el análisis del problema, ASUMIREMOS que la vibración que experimentará la cuerda es meramente transversal.

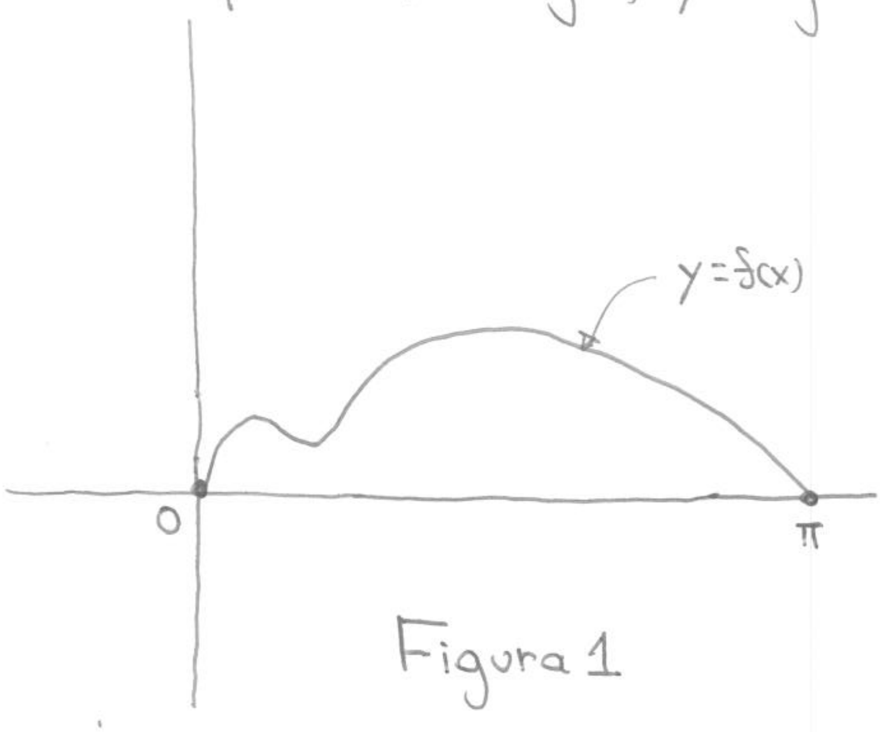


Figura 1

La última hipótesis significa que en cada punto de la cuerda tiene cordenada x fija, así que la cordenada y depende solamente de x y el tiempo t. Así el deplazamiento de la cuerda es solamente vertical y está dado por una función $y = y(x,t)$ de dos variables, en posición de equilibrio. Tenemos la condición inicial $\boxed{y(x,0) = f(x)}$.
Por otro lado $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ representan la velocidad y aceleración de la cuerda. Para mas simplificación del problema en questión asumiremos dos hipotesis adicionales:

1) La cuerda es uniforme en masa, esto es la densidad de masa es constante. Denotemos la densidad de masa por m.

2) La tensión en cualquier punto esta dada por una fuerza constante. Denotemos la tensión por T.

2.2. La ecuación del movimiento:

Deduscamos ahora la ecuación de movimiento para nuestra cuerda vibrante.

Consideremos una pequeña pieza de cuerda de longitud Δx al estar en posición de equilibrio. La masa de esta pieza es $m\Delta x$.
La segunda ley de Newton nos dice que la fuerza transvesal (vertical en la figura 2.) esta dada por

$$\boxed{F = m\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \qquad (1)$$

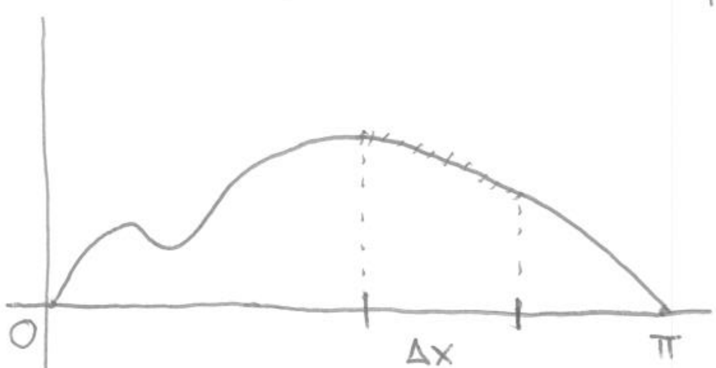


Fig-2

Por otro lado como la cuerda es flexible la tensión en cada punto es un vector en la dirección de la tangente a la curva (Fig.3)

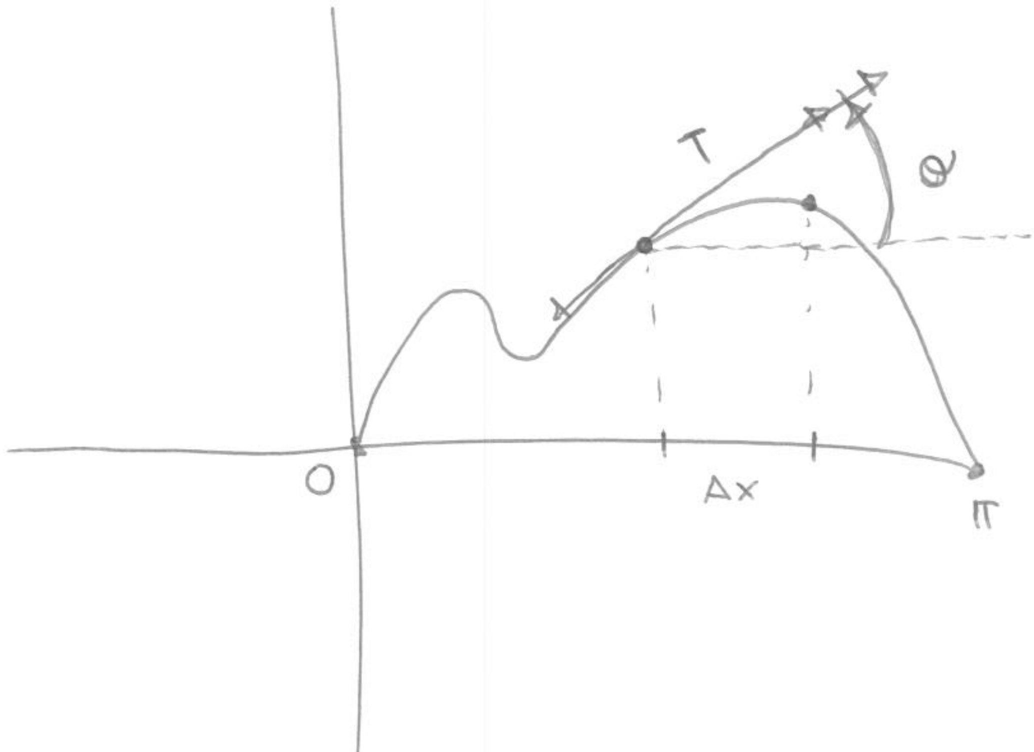


Fig.3

y tiene $T\sin\theta$ como su componente en y. Por supuesto, también asumimos que el movimiento de la cuerda se da enteramente debido a tensión. Así pues, F es también igual a la diferencia entre los valores de $T\sin\theta$ en los dos extremos de la pequeña pieza de cuerda, tal diferencia la denotaremos por $\Delta(T\sin\theta)$. Así entonces

$$\boxed{\Delta(T\sin\theta) = m\,\Delta x\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \qquad (2)$$

Finalmente, si las vibraciones son relativamente pequeñas $\sin\theta$ es aproximadamente $\tan\theta$, además $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \frac{\partial y}{\partial x}$. La ecuación (2) nos da

$$\boxed{\frac{\Delta\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\Delta x} = m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \qquad (3)$$

si tomamos $\Delta x \to 0^+$ en (3) y usamos que T es constante, obtenemos que

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (4)$$

con $a = \sqrt{\frac{T}{m}}$.

La ecuación (4) es llamada "ecuación de onda" (unidimensional). Resumiendo, el problema de la cuerda vibrante expresada analíticamente es encontrar una solución de (4) sujeta a las condiciones:

$$\begin{cases} y(0,t)=0, \; y(\pi,t)=0 & \text{(condiciones frontera)} \\ y(x,0)=f(x) & \\ \left.\dfrac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 & \text{(condiciones iniciales)} \end{cases}$$

2.3 Solución de Bernoulli:

Aplicaremos primero el método de separación de variables. Asumamos que nuestro problema admite una solución de la forma

$$y(x,t) = U(x)W(t) \quad (5)$$

Sustituyendo en (4) obtenemos

$$a^2 U''(x)W(t) = U(x)W''(t)$$

o

$$\frac{U''(x)}{U(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{W''(t)}{W(t)} \qquad (6).$$

Nótese que el lado izquierdo de (6) depende solamente de x y el derecho de t, así que ambos lados de la ecuación deben ser una constante, la cual denotaremos por $-\lambda$. Así

$$\frac{U''(x)}{U(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{w''(t)}{w(t)} = -\lambda,$$

por lo que obtenemos dos ecuaciones

$$U''(x) + \lambda U(x) = 0 \quad (7)$$

$$w''(t) + \lambda a^2 w(t) = 0 \quad (8).$$

La condición frontera $y(0,t) = 0 = y(\pi,t)$ implica que $U(0) = U(\pi) = 0$. Ahora, la teoría de ecuaciones diferenciales nos dice que (7) se satisface bajo estas condiciones sólo cuando $\lambda = n^2$ y

$$U_n(x) = \sin nx \quad (9)$$

Por otro lado las condiciones iniciales implican que $w'(0) = 0$, además la solución general de (8) es

$$w(t) = c_1 \sin nat + c_2 \cos nat,$$

pero $w'(0) = 0$ implica que $w(t)$ puede ser tomada como multiplos constantes de

$$w_n(t) = \cos nat.$$

Finalmente las soluciones de (4) de la forma (6) satisfaciendo $y(0,t) = 0 = y(\pi,t)$; y $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$; son múltiplos constantes de

$$y_n(x,t) = \sin nx \cos nat.$$

Cada una de estas funciones satisface (4), así es fácil ver que las combinaciones lineales de ellas lo hacen. Ignorando cuestiones de convergencia y diferenciación bajo el signo de sumación

Cualquier serie infinita

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \cos nat = b_1 \sin x \cos at + b_2 \sin 2x \cos 2at + \cdots \quad (10)$$

satisface (4), $y(0,t)=y(\pi,t)=0$ y $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=0$. Para resolver totalmente el problema de la cuerda vibrante nos falta satisfacer la condicion inicial $y(x,0)=f(x)$ (Fig.1). Poniendo $t=0$ en (10), el problema se reduce a encontrar una sucesión $\{b_n\}$ tq

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx} \quad (11).$$

En 1755 cuando Daniel Bernoulli publica las fórmulas que hemos discutido hasta ahora, muchos matemáticos creyeron que la expansión (11) era imposible de satisfacer a no ser que f fuera de un tipo especial, esto es, que la solución de Bernoulli sería valida solamente para una clase muy restringida de funciones f. Sin embargo, cien años mas tarde se hizo claro para la comunidad matemática que tal creencia era errónea, y que es posible en realidad expander f en la forma (11) para una clase muy amplia de funciones tales que $f(0)=0=f(\pi)$. Asumiendo este hecho, nos resta determinar la sucesión $\{b_n\}$. Este problema fue resuelto por Euler en 1777.

Primero demostremos la siguiente identidad

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \end{cases} \quad (12).$$

Supongamos que $n \neq m$, entonces

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\Big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\Big),$$

pero $\int_0^{\pi} \cos jx \, dx = 0$, si $j \neq 0$. Así $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2}\left[0+0\right] = 0$,

Por otro lado

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ahora usaremos (12) para calcular $\{b_n\}$ en (11). En efecto, multiplicando ambos lados de (11) por $\sin mx$ e integrando de $x=0$ a $x=\pi$, obtenemos

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} b_m$$

o,

$$\boxed{b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin mx \, dx} \qquad (13)$$

La fórmula (13) es la fórmula de Euler. Finalmente podemos decir que (10) es la solución de nuestro problema de la cuerda vibrante donde los coeficientes b_n satisfacen (13). La solución (10) es también conocida como la solución de Bernoulli de la ecuación de onda.

Naturalmente muchos pasos en los cálculos que hicimos arriba no fueron justificados (intercambios de integrales y derivadas con sumación infinita, etc). Otra pregunta que surge es la posibilidad de la expansión (11), por ejemplo cuestiones de convergencia no son triviales en este contexto.

3. Series de Fourier de Funciones:

En el caso general de una función periodica de periodo 2π, digamos f, buscamos representaciones de la forma

$$f(x) \overset{\text{"}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx . \quad (14)$$

Las funciones $\cos nx$, $\sin nx$ son mutuamente ortogonales, en el sentido que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0 \qquad (15)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases} \qquad (16)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases} \qquad (17)$$

Procediendo como en la sección previa, los coeficientes de Fourier estan dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx , \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (18)$$

3.1 Un criterio de convergencia

Formemos las sumas parciales de la expansión (14)

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (19)$$

Queremos encontrar una fórmula para $S_N(x)$; usemos (18)

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt \cos nx\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt \sin nx\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\underbrace{\left[\cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx\right]}_{\cos n(t-x)}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos n(t-x)\right]dt$$

Pongamos $D_N(u) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nu$, D_N es llamado el Kernel de Dirichlet. Se puede encontrar una fórmula explícita para D_N

Lema 1: $D_N(u) = \dfrac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\frac{u}{2}}$

Pba: Multipliquemos D_N por $2\sin\frac{u}{2}$

$$2\sin\frac{u}{2}D_N(u) = \sin\frac{u}{2} + \sum_{n=1}^{N} 2\sin\frac{u}{2}\cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)u\right) = \sin\frac{u}{2} + \sum_{n=1}^{N}\sin\left(nu+\frac{u}{2}\right) - \sin\left(nu-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{u}{2} + \sum_{n=1}^{N}\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) - \sin\left((2(n-1)+1)\frac{u}{2}\right)$$

$$= \cancel{\sin\frac{u}{2}} + \cancel{\sin\frac{3u}{2}} - \cancel{\sin\frac{u}{2}} + \cancel{\sin\frac{5u}{2}} - \cancel{\sin\frac{3u}{2}} + \cdots + \sin\left((2N+1)\frac{u}{2}\right)$$

$$- \sin\left((2N-1)\frac{u}{2}\right)$$

$$= \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)u\right) \quad ////$$

Corolario 1: $S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_N(t)\,dt$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{[f(x+t)+f(x-t)]}{2}\,\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

Dem: Ya habíamos visto que

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{\sin(N+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\right)dt \text{, cambiando variables } u=t-x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\,D_N(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(u+x)D_N(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(u+x)D_N(u)\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)D_N(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)D_N(-t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)D_N(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)D_N(t)\,dt \text{ ,}$$

nótese que hemos usado el hecho que D_N es una función par. ///

Demostraremos que si la función f es diferenciable en un punto entonces su serie de Fourier es convergente al valor de la función en el punto. El siguiente lema es conocido como el Lema de Riemann-Lebesgue, lo enunciaremos en este punto para su aplicación en el siguiente teorema pero daremos una prueba hasta la sección siguiente.

Lema 2 (Riemann-Lebesgue) Si f es una función continua ~~de~~ ~~[illegible]~~, entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt = 0 = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(t)\cos\lambda t\,dt$$

Teorema 1: Supongamos que f es diferenciable en x_0, entonces

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n x_0 + b_n \sin n x_0 = \lim_{N\to\infty} S_N(x_0) = f(x_0)$$

Pba: Notese que aplicando el Corolario 1 a la función constante 1 obtenemos que

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_N(t)\,dt$$

Así

$$S_N(x_0)-f(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)\right]\left(\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})}\right)dt.$$

Debemos demostrar que la expresión anterior tiende a 0 cuando $N\to\infty$.

Pongamos

$$h(t)=\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{t}\ \frac{\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})}$$

Nótese que h es continua, en efecto el único problema que h podría tener es en $t=0$, pero la diferenciabilidad de f en x_0 nos da que

$h(0)=2f'(x_0)$. Así pues aplicando el Lema de Riemann-Lebesgue obtenemos que

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x_0)-f(x_0)=\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi} h(t)\sin((N+\tfrac{1}{2})t)\,dt=0$$

El Teorema 1 es un criterio de convergencia, para otros criterios de convergencia mas elaborados el lector puede consultar [9].

Si uno asume mas regularidad en la función es posible obtener mejor grado de aproximación por medio de las sumas parciales de su serie de Fourier.

Denotaremos por $C_p^k[-\pi,\pi]$ el conjunto de funciones f tq son periodicas de periodo 2π, son k-veces diferenciables y $f^{(k)}$ es continua de periodo 2π.

<u>Lema 3</u>: Supongamos que $f \in C_p^k[-\pi,\pi]$. Sea $M_k = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f^{(k)}(x)|$, entonces

$$|a_n| \leq \frac{2M_k}{n^k}, \quad |b_n| \leq \frac{2M_k}{n^k}, \quad \forall n \geq 1$$

<u>Pba</u>: Aplicando integración por partes

$$|a_n| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\right| = \frac{1}{\pi n}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt\right| = \cdots \leq \frac{1}{\pi n^k}\left|\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}(t)|\,dt\right|$$

$$\leq \frac{2M_k}{n^k}.$$

Similarmente para b_n.

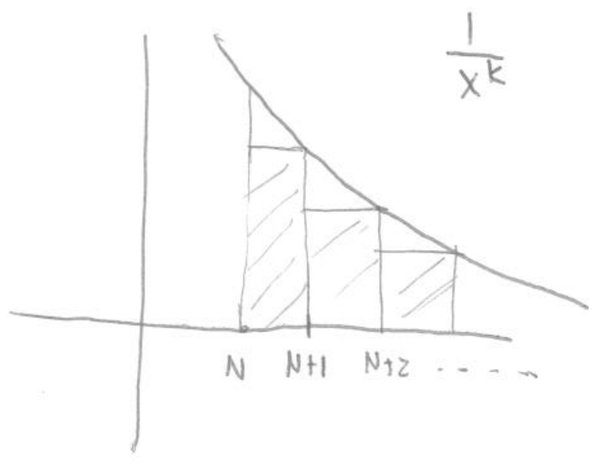
<u>Corolario 2</u>: Si $f \in C_p^k[-\pi,\pi]$, $k>1$. Entonces

$$|S_N(x) - f(x)| \leq \frac{4M_k}{(k-1)n^{k-1}}, \quad \forall n \geq 1, \ \forall x \in [-\pi,\pi]$$

<u>Pba</u>: Por el teorema 1, $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx$, así

$$|S_N(x) - f(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| + |b_n| \leq 4M_k \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leq 4M_k \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^k}$$

$$\leq \frac{4M_k}{(k-1)n^{k-1}}$$



4. Medias de Cesàro

En general es difícil determinar la convergencia en un punto dado de la serie de Fourier de una función continua, puede pasar que la serie sea incluso divergente en dicho punto. En esta sección estudiaremos un método de sumación para series divergentes, el método de medias de Cesàro.

<u>Definición 1</u>: Sea $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión decimos que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ es sumable a γ por medias de Cesàro (de orden 1) y escribimos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \gamma \quad (C,1)$$

si

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_0+S_1+\cdots+S_{N-1}}{N} = \gamma, \text{ donde } S_n = \sum_{n=0}^{n} c_j \;\; ///$$

En general las medias de Cesàro pueden sumar series que son divergentes

<u>Ejemplo 1</u>: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}\,(C,1)$, aunque $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ es divergente.

En efecto $S_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$, así entonces

$$\frac{S_0+S_1+\cdots+S_{N-1}}{N} = \begin{cases} \dfrac{1+0+1+\cdots+0+1}{2k+1} & \text{si } N=2k+1 \\[2ex] \dfrac{1+0+1+0+\cdots+1+0}{2k} & \text{si } N=2k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{k}{2k+1} & \text{si } N=2k+1 \\[2ex] \dfrac{k-1}{2k} & \text{si } N=2k \end{cases}$$

En cualquier caso $\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2} = \lim_{k\to\infty}\frac{k-1}{2k}$, así

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2} \quad (C,1)$$

Por otro lado si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \gamma$ en el sentido usual entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \gamma \ (C,1)$

Ejercicio 1: Probar este hecho, es decir, si $\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n = \gamma$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \gamma \ (C,1)$ ////.

Apliquemos el caso de series de Fourier pongamos

$$\sigma_N(x) = \frac{S_0(x) + \cdots + S_{N-1}(x)}{N},$$

donde $S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ son las sumas parciales de la serie de Fourier de f. Entonces usando el Corolario 1:

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] D_n(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] F_N(t)\, dt,$$

donde $F_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(t)$, F_N es llamado el Kernel de Fejér [2].

Lema 4: ~~$F_N(t) = [D_N(t)]^2 = \sin^2$~~

$$F_N(t) = \frac{\sin^2\left(\frac{Nt}{2}\right)}{2N \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Pba: Multipliquemos $F_N(t)$ por $2N\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$

$$2N\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) F_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sin (2n+1)\frac{t}{2} = \sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)$$

usando un procedimiento similar al de Lema1 (¡ejercicio!) ////

Lema5: (1) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F_N(t)\,dt = 1$

(2) Si $0<\delta\leq|t|\leq\pi$, entonces

$$F_N(t) \leq \frac{1}{2N\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Dha: Poniendo $f(t)\equiv 1$ en Lema4 obtenemos (1). Para (2) Note, observando en gráfico que $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ tiene un mínimo sobre $[\delta,\pi]$ y el mínimo es $\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$.

Teorema2: Sea f continua en $[-\pi,\pi]$ entonces $\sigma_N \to f$ uniformemente en $[-\pi,\pi]$

Dha: $\sigma_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]F_N(t)\,dt$ y $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, F_N(t)\,dt$

así

$$\sigma_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]F_N(t)\,dt$$

Sea $\varepsilon>0$.

Usando la convergencia uniforme de f existe $\delta>0$ tq si $|y_1-y_2|<\delta$ entonces $|f(y_1)-f(y_2)|\leq\frac{\varepsilon}{4}$ así

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]F_N(t)\,dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}F_N(t)\,dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} F_N(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{4}$$

Así

$$|\sigma_N(x)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\, F_N(t)$$

sea $M = \max\limits_{u\in[-\pi,\pi]} |f(u)|$, así entonces

$$|\sigma_N(x)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{4M}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} F_N(t)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{4M}{2N\pi\sin^2(\frac{\delta}{2})}\int_{\delta}^{\pi} dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{2M}{N\sin^2(\frac{\delta}{2})}$$

Finalmente podemos escoger N_0 tq el segundo sumando es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall N \geq N_0$. Así si $N \geq N_0$

$$|\sigma_N(x)-f(x)| < \varepsilon, \ \forall x, \forall N \geq N_0 \ ////.$$

Corolario 3: Supongamos que f es continua de periodo 2π, entonces dado $\varepsilon>0$ existe h continuamente diferenciable tq

$$|f(t)-h(t)| < \varepsilon \quad \forall t.$$

Pba: σ_N es diferenciable, use entonces el Teorema 2 ////

Corolario 4: El Lema de Riemann-Lebesgue es válido. (Lema 2)

Pba: Lo haremos solo para el limite con "sin". Primero probaremos que si h es diferenciable entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b h(t)\sin\lambda t\,dt = 0.$$

En efecto

$$\int_a^b h(t)\sin\lambda t\,dt = \frac{h(a)\cos\lambda a}{\lambda} - \frac{h(b)\cos\lambda b}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b h'(t)\cos\lambda t\,dt$$

Así $$\left|\int_a^b h(t)\sin\lambda t\,dt\right| \leq \frac{|h(a)|}{\lambda} + \frac{|h(b)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b |h'(t)|\,dt \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0 \quad ///$$

~~Ahora~~ Sea $\varepsilon > 0$, el Corolario ~~3~~ fácilmente implica que existe h continuamente diferenciable tq

$$|f(t) - h(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \; \forall t \in [a,b]$$

Sea λ_0 tq si $\lambda \geq \lambda_0$ entonces $\left| \int_a^b h(t) \sin \lambda t \, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Así si $\lambda \geq \lambda_0$

$$\left| \int_a^b f(t) \sin \lambda t \, dt \right| \leq \left| \int_a^b (f(t) - h(t)) \sin \lambda t \, dt \right| + \left| \int_a^b h(t) \sin \lambda t \, dt \right|$$

$$\leq \int_a^b |f(t) - h(t)| \, dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dt + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \; ///$$

Podemos usar también el Teorema 2 para dar una prueba del célebre Teorema de aproximación de Weirstrass.

<u>Teorema 3</u>: Sea f continua en el intervalo $[a,b]$. Sea $\varepsilon > 0$ existe un polinomio p tq

$$|f(t) - p(t)| < \varepsilon, \; \forall t \in [a,b]$$

<u>Pba:</u>

<u>Lema 6:</u> $\cos(n \arccos t) = T_n(t)$, $\sin(n \arccos t) = U_n(t)$, $t \in [0,1]$ donde T_n y U_n son polinomios (usualmente llamados polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie)

<u>Pba:</u> Usamos la fórmula de $(\cos n\theta + i \sin n\theta) = (\cos\theta + i \sin\theta)^n$ (ejercicio probar esta fórmula por inducción)

usando ~~la~~ en el binomio de Newton en la segunda parte de la ecuación descomponiendo en parte real e imaginaria, y cambiando $\theta = \arccos t$ se obtiene el resultado ////

Veamos la prueba del teorema 3. Pongamos

$$g(t) = f(a + t(b-a)),\ y$$

$$h(x) = g(\cos x),$$ por el teorema 2 existe un N tq

$|h(x) - \sigma_N(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$, si ponemos $x = \arccos t$ y

$P(t) = \sigma_N(\arccos t)$ obtenemos del lema 6 que $P(t)$ es un polinomio además

$$|g(t) - P(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0,1].$$

Poniendo $y = a + t(b-a)$ y $p(y) = P\left(\frac{y-a}{b-a}\right)$, tenemos que

$$|f(y) - p(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in [a,b] \,/\!/\!/.$$

5. Una conjetura:

Es conveniente usar la forma compleja de la serie de Fourier

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

Así

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + i \sin nx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Donde $a_n = \dfrac{c_n + c_{-n}}{2}$, $b_n = \dfrac{c_n - c_{-n}}{2i}$.

5.1 Funciones generalizadas

Una función generalizada periodica, de periodo 2π, es un objeto de la forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

donde los coeficientes c_n crecen "lentamente", o polinomialmente, es decir existe un k y M tq

$$|c_n| \leq M|n|^k.$$

Existe una noción para el valor en un punto de una función generalizada, para la definición se refiere el lector a [4]. El siguiente teorema pertenece a R. Estrada, para la notación empleada en el enunciado y su prueba el lector puede consultar [1] (Ver también [6,7]) para generalizaciones.

Teorema 4: Sea $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ una función generalizada entonces $f(x_0) = \gamma$ (en el sentido de Łojasiewicz [4]) si y solo si existe $k \in \mathbb{N}$ tq $\forall a > 0$

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{-x \leq n \leq ax} c_n e^{ix_0 n} = \gamma \quad (C, k)$$

3.2 Una conjetura sobre series dobles

La siguiente conjetura es sugerida por los resultados de [6,7]

Conjetura: Sea $f(x,y) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} c_{n,m} e^{i(nx+my)}$, entonces $f(x_0,y_0) = \gamma$, en el sentido de Łojasiewicz, si y solo si existe $K \in \mathbb{N}$ tq para todo a y b positivos

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sum_{-\lambda \leq m \leq b\lambda} \sum_{-\lambda \leq n \leq a\lambda} c_{n,m} e^{i(nx_0+my_0)} = \gamma \quad (C, k)$$

Bibliografía

[1] R. Estrada, Characterization of the Fourier series of distributions having a value at a point, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 1205-1212.

[2] L. Fejér, Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe, J. Reine Angew. Math. 142 (1913), 165-188.

[3] G.H. Hardy, W.W. Rogosinski, Fourier Series, second edition, Cambridge Tracts in Mathematics, no. 38, Cambridge at the University Press, 1950.

[4] S. Łojasiewicz, Sur la valuer et la limite d'une distribution en un point, Studia Math. 16 (1957), 1-36.

[5] E.C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier Integrals, second edition, Clarendon Press, Oxford, 1948

[6] J. Vindas, R. Estrada, Distributional Point Values and Convergence of Fourier Series and Integrals, J. Fourier Anal. Appl. 13 (2007), 551-576.

[7] J. Vindas, R. Estrada, On the order of summability of the Fourier inversion formula, preprint.

[8] G.F. Simmons, Differential equations with applications and historical notes, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Co., N.Y., 1972.

[9] A. Zygmund, Trigonometric Series, second edition, vols. I and II, Cambridge University Press, New York, 1959.