



Faculteit Wetenschappen

Vakgroep Wiskunde

Getaltheoretische toepassingen van bijna-periodische functies

Korneel Debaene

Promotor : Dr. J.-C. Schlage-Puchta

Masterproef ingediend tot het behalen van de academische graad
van master in de wiskunde, afstudeerrichting zuivere wiskunde.

Academiejaar 2010-2011

Voorwoord

Beste lezer,

Vooraleer ik van wal steek met mijn reis door de analytische getaltheorie, met nadruk in de theorie van de bijna-periodische functies en de priemgetalverdeling, wens ik een aantal mensen te bedanken. Mijn promotor Jan-Christoph Schlage-Puchta, voor het voorzien van een fascinerend onderwerp. Zijn zeer grondige vakkennis en groot inzicht in de algemene wiskunde waren zeer waardevol in mijn zoektocht naar opheldering onderweg. De vele uren die hij heeft geïnvesteerd om samen, gewapend met krijt en bord, na te denken over de problemen die ik tegenkwam waren op zijn zachtst gezegd inspirerend.

Ook noodzakelijk om deze 50tal bladzijden te verwezenlijken was de motivatie van mijn moeder, door het frequent peilen naar hoe ver ik stond.

Tenslotte dank ik mijn vriendin Laure Vincenti, die gelukkig helemaal niets van wiskunde af weet, en mij op alle mogelijke manieren aanvult.

Korneel Debaene

De auteur geeft de toelating deze masterproef voor consultatie beschikbaar te stellen en delen van de masterproef te kopiëren voor persoonlijk gebruik. Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit deze masterproef.

Datum: 31 Mei 2011

Handtekening:

Inhoudstafel

Voorwoord	2
Inleiding	5
1 De ruimte $\mathcal{A}$ van bijna-periodische functies	7
1.1 Motivatie	7
1.2 De basisruimte $\mathcal{P}$	8
1.3 Completering tot de ruimtes $\mathcal{A}^2$ en $\mathcal{A}$	10
2 De Riemann-zeta functie en priemgetallen	15
2.1 De Riemann-zeta functie	15
2.2 De functie $\psi(x)$ en de expliciete formule	17
2.3 De errorterm in de expliciete formule	21
2.4 Uitbreiding naar Dirichlet L-functies	24
3 Eigenschappen van bijna-periodische functies	29
3.1 Concrete bijna-periodiciteit in de ruimte $\mathcal{A}$	29
3.2 Distributiefuncties van functies uit $\mathcal{A}$	31
4 Toepassingen met betrekking tot de verdeling van de priemgetal- len	40
4.1 Inleiding	40
4.2 Het splitsen van priemen in velduitbreidingen	41
4.3 De Dedekind-zeta functie en de functie $\psi_K(x)$	42
4.4 Oscillaties in de verdeling van de priemgetallen	44

Conclusie	53
Bibliografie	53

Inleiding

Dé vraag die mij bezig hield in mijn thesis is de volgende:

Wat voor theoretisch kader kunnen we opstellen rond bijna-periodische functies en in welke concrete getaltheoretische situaties kunnen ze nuttig zijn?

A priori zijn alle getaltheoretische situaties waar een vorm van irregulariteit of oscillerend gedrag in zit, kanshebbers om bestudeerd te kunnen worden met een theorie aangepast aan periodische of bijna-periodische functies. Het meest voordehandliggende fenomeen dat zich naar voor werpt is dan ook de verdeling van de priemgetallen. Door middel van de zogenaamde expliciete formules voor ψ , kan vrij concreet de bijna-periodische functie die het oscillerend gedrag in de verdeling van priemgetallen veroorzaakt, geïsoleerd worden. Deze functie

$$\sum_{\rho} \frac{e^{i\gamma x}}{\rho}$$

is de centrale functie waarop deze thesis gefocust is.

In hoofdstuk 1 verkennen we de mogelijkheden om een theoretisch kader rond bijna-periodische functies op te stellen. In dit hoofdstuk volgen we de opbouw van J.-C. Schlage Puchta in zijn doctoraatsthesis [7], zij het dan veel explicieter en uitgewerkter.

In hoofdstuk 2 introduceren we de theorie van de Riemann zeta functie die noodzakelijk is teneinde de getaltheoretische toepassingen te kunnen formuleren en bewijzen, een theorie die zich uiteraard in een klassiek analytisch getaltheoretisch domein bevindt. Het proces van inzicht verkrijgen in deze theorie is een van de grote doelen die ik makende deze thesis bereikt heb, geholpen door de werken [1] [2]. We hebben niet getracht volledigheid in bewijzen na te streven, eerder trachten we de essentieelste concepten en stellingen intuïtief goed toe te lichten. Speciale nadruk ligt op de errorterm in de priemgetalverdeling, en op welke wijze deze als een bijna-periodische

functie geïnterpreteert kan worden. Op dit vlak volgen we weer de doctoraatsthesis van J.-C. Schlage Puchta [7].

In hoofdstuk 3 illustreren we het gebruik van zekere gelijkverdeelddheid-resultaten om bepaalde feiten over bijna-periodische functies te bewijzen, alsook de techniek van benadering door eindige trigonometrische polynomen. Hiermee leiden we enkele eigenschappen van distributiefuncties van bijna-periodische functies af. De inhoud van dit hoofdstuk is voornamelijk origineel werk. Voor het resultaat rond gelijkverdeelddheid is geïnspireerd op de klassieke theorie van uniforme verdelingen [3], en wat betreft de resultaten rond distributiefuncties lagen enkele ideeën van Schlage-Puchta aan de basis. Het is evenwel gebleken dat deze resultaten moeilijker verkrijgbaar waren dan initieel ingeschat was.

In hoofdstuk 4 tenslotte illustreren we de toepassing van de theorie van bijna-periodische functies op de oscillaties in de priemgetalverdeling, door een uitbreiding van een stelling van J.-C. Schlage Puchta in [6] te bewijzen. Deze uitbreiding bevindt zich in een velduitbreiding van de rationale getallen, waardoor we enkele feiten uit de algebraïsche getaltheorie moeten inleiden.

Hoofdstuk 1

De ruimte $\mathcal{A}$ van bijna-periodische functies

1.1 Motivatie

De eerste vraag is uiteraard welke functies we als *bijna-periodische functies* willen beschouwen. Een mogelijkheid is om bepaalde sterk bijna-periodische eigenschappen te eisen van een functie. Op die wijze is het echter voor veel functies niet voordehandliggend om te zien of ze voldoen aan zo'n definitie van bijna-periodiciteit. Bovendien, zo verliest de theorie zijn nut; het zou immers sterk zijn dat vrij eenvoudig beslisbaar is of een gegeven functie bijna-periodisch is, om dan niet-triviale bijna-periodische eigenschappen te kunnen afleiden. Om zoiets te bereiken zullen we een ruimte van bijna-periodische functies opbouwen als een zekere topologische sluiting van een eenvoudige basisruimte.* In het achterhoofd denken we aan een toepassing op de vrij mysterieuze restterm in de expliciete formule van von Mangoldt;

$$\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho},$$

waarbij ρ door een onbeperkt groeiend imaginair deel oorzaak is van oscillaties die gevolgen hebben in de schommelingen van de priemgetalverdeling.[†] Daarom, en ook omdat een functie als e^{aix} het prototype van een

*Vyacheslav Stepanov heeft deze theorie opgebouwd, en dit theoretisch kader werd voor het eerst op getaltheoretische problemen toegepast door mijn promotor Jan-Christophe Schlage-Puchta in zijn doctoraatsthesis. Deze is niet gepubliceerd maar wordt binnenkort uitgegeven in de vorm van een memoire.

[†]De lezer onbekend met dit alles zal in hoofdstuk 3 van een systematischere opbouw en definiëring genieten.

periodische functie is, starten we met een basisruimte van sommen van dergelijke functies.

1.2 De basisruimte $\mathcal{P}$

In concreto, zij $\mathcal{P}$ de vectorruimte van eindige sommen van continue periodische functies $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^n$. In het vervolg zullen we vaak enkel het geval $n = 1$ gebruiken en bewijzen, al zal het telkens duidelijk zijn dat de hogere-dimensionale analogen ook geldig zijn. De klassieke stelling van Fourier geeft ons een concreter beeld van de inhoud van $\mathcal{P}$.

1.2.1 Stelling. *Voor elke continue functie met periode T bestaan coëfficiënten a_n zodat geldt*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2n\pi}{T}ix}$$

Hieruit volgt namelijk dat deze ruimte bestaat uit eindige sommen van $e^{\alpha ix}$ voor zekere α , en oneindige lineaire combinaties, indien de voorkomende α allen in een discrete deelgroep $\frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}$ liggen.

Merk op dat een som van een functie van periode T_1 en een functie van periode T_2 enkel nog periodisch kan zijn indien er natuurlijke getallen p, q bestaan zodat $pT_1 = qT_2$, oftewel als T_2 een rationaal veelvoud van T_1 is.

Het gros van $\mathcal{P}$ is dus niet periodisch, al kunnen we enkele erg sterke bijna-periodiciteits eigenschappen bewijzen, en dit door een link tussen functies uit $\mathcal{P}$ en functies op een eindigdimensionale torus. Deze link wordt in de volgende twee stellingen uitgebuit. Een eerste sterke bijna-periodiciteits eigenschap die we bewijzen is het begrip van Bohr-periodiciteit. Dit is de eigenschap dat

$$(\forall \varepsilon \exists p \geq 1 \forall x) (|f(x) - (x + p)| < \varepsilon).$$

Met andere woorden, voor elke vooropgestelde nauwkeurigheid ε bestaat er een bijna-periode die in elk punt op ε na een periode is. De eis $p \geq 1$ moet erbij om triviale gevallen uit te sluiten; elke uniform continue functie zou voldoen aan de definitie waar kleine p toegestaan worden.

1.2.2 Stelling. *Zij T_n de n -dimensionale torus opgevat als $[0, 1)^n \bmod 1$ en zij $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ een gegeven vector. Dan is voor elke ε de verzameling*

$$S = \{t \geq 1 \mid \|t\alpha\| < \varepsilon\}$$

niet ledig. Meer nog, er is een constante C onafhankelijk van α en ε zodat er een element uit de verzameling bestaat kleiner dan $\frac{C}{\varepsilon^n}$.

Bewijs. We zullen het duivenhokprincipe toepassen. Beschouw voor elke $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq N$, $N = \left\lfloor \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \frac{1}{\omega_n} \right\rfloor + 1$ het punt $x_k = k\alpha \bmod 1$, en beschouw de open ballen B_k rond x_k met straal $\varepsilon/2$. Indien geen van deze ballen snijden, dan geldt dat $N(\frac{\varepsilon}{2})^n \omega_n \leq 1$. N is nu echter zo gekozen als het eerste natuurlijk getal waarvoor deze ongelijkheid niet geldt, immers

$$N(\frac{\varepsilon}{2})^n \omega_n \leq 1 \Leftrightarrow N \leq \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \frac{1}{\omega_n}.$$

Er moet dus een punt P bestaan in $B_i \cap B_j$ met $i > j$, en dus is

$$\|x_i - x_j\| \leq \|x_i - P\| + \|P - x_j\| < \varepsilon$$

Nu is $x_{i-j} = x_i - x_j$, en dus is $i - j$ een natuurlijk getal groter of gelijk aan 1, lid van de verzameling S . Merk op dat $i - j \leq N - 1 = \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \frac{1}{\omega_n}$. Met andere woorden kunnen we $C = \frac{2^n}{\omega_n}$ stellen. $\square$

Men kan nog meer bewijzen; zo heeft S positieve onderdichtheid; dit is dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|S \cap [0, x]|}{x}$$

bestaat en groter dan nul is. Verder bestaat er ook een constante C zodat elk interval van lengte C nietledige doorsnede met S heeft. Ook geldt dat S dicht is op de torus indien alle α_i linear onafhankelijk zijn over $\mathbb{Q}$. Deze feiten hebben we echter voor het vervolg niet nodig.

Dit resultaat over de verdeling van rechten $\mathbb{R}\alpha$ op de torus kan men nu vertalen naar resultaten rond bijna periodische functies.

1.2.3 Stelling. *Zij $f = f_1 + \dots + f_n \in \mathcal{P}$, met f_i periodisch en continu, dan is deze Bohr-periodisch. Daarenboven, indien de f afleidbaar is met begrensde afgeleide bestaat er een constante C afhankelijk van f zodat voor elke ε er een bijna periode bestaat kleiner dan $\frac{C}{\varepsilon^n}$.*

Bewijs. Zij $f = \sum_i f_i$, waar f_i periodisch is van periode T_i . Merk op dat periodische functies uniform continu zijn als ze continu zijn, omdat continuïteit uniforme continuïteit impliceert op een gesloten verzameling. Op $[0, T]$ is de functie dus uniform continu, i.e. ze is overal uniform continu. Gegeven een $\varepsilon > 0$ is er dus een δ zodat $|f_i(x) - f_i(x+r)| < \varepsilon$ if $|r| < \delta$, voor alle x . Dan hebben we

$$|f(x) - f(x+p)| \leq \sum_i |f_i(x) - f_i(x+(p \bmod T_i))|,$$

wat willekeurig klein gemaakt kan worden indien we p willekeurig klein kunnen laten worden $\bmod T_i$ voor alle perioden. Dit volgt nu snel uit

de vorige stelling toegepast op de vector $\alpha = (\frac{1}{T_1}, \dots, \frac{1}{T_n})$. We verkrijgen voor elke η een $p > 1$ met $|\frac{p}{T_i} - n_i| < \eta$ voor bepaalde $n_i \in \mathbb{Z}$, dus is $|p - n_i T_i| < \eta T_i$. Kies tenslotte $\eta = \frac{\delta}{\max T_i}$ en we zijn klaar. Indien f afleidbaar is met begrensde afgeleide, is het bijvoorbeeld uit de middelwaardestelling evident dat $|f(a) - f(b)| \leq \max_{x \in [a,b]} f'(x) |a - b|$. Aldus kan in bovenstaande redenering

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\max_{x \in [a,b]} f'(x)}$$

gekozen worden. De vorige stelling geeft ons een bijna periode p kleiner dan

$$\frac{C}{\eta^n} = \frac{C(\max_{x \in [a,b]} f'(x))^n (\max T_i)^n}{\varepsilon^n}.$$

De teller kan dus als nieuwe constante dienen. □

1.3 Completering tot de ruimtes $\mathcal{A}^2$ en $\mathcal{A}$

Op $\mathcal{P}$ definiëren we een seminorm

$$\|f\|_q = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|^q dt$$

die in het geval $q = 2$ ons een hilbertruimte geeft met inproduct

$$(f, g)_{\mathcal{A}^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \overline{g(t)} dt.$$

We completeren deze ruimte door middel van de gebruikelijke wijze van toevoegen van cauchyrijen (x_i) en uitdelen naar de equivalentierelatie $(x_i) \sim (y_i)$ als (z_i) met $z_{2i} = x_i$ en $z_{2i+1} = y_i$ ook een cauchyrij is. We verkrijgen aldus in eerste instantie een complete ruimte $\mathcal{A}^q$ voor elke q , maar zullen enkel de hilbertruimte $\mathcal{A}^2$ gebruiken. Zeer nuttig in deze ruimte is volgende stelling

1.3.1 Stelling. *Definieer voor elke $f \in \mathcal{A}^2$ zijn fourriercoëfficiënten als*

$$\hat{f}(t) = (f(x), e^{itx})_{\mathcal{A}^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(s) e^{-ist} ds.$$

Zij $\text{spec}(f)$ de verzameling t zodat $\hat{f}(t) \neq 0$. In $\mathcal{A}^2$ – norm geldt dan de gelijkheid

$$f(x) = \sum_{t \in \text{spec}(f)} \hat{f}(t) e^{itx}$$

Bewijs. Merk op dat indien een dergelijke ontwikkeling bestaat, zijn coëfficiënten $\hat{f}(t)$ gegeven moeten worden door de gegeven formule, omdat de verzameling $\{e^{itx} \mid t \in \mathbb{R}\}$ een orthonormale verzameling is in $\mathcal{A}^2$. Deze is ook een basis in de zin dat elke functie uit $\mathcal{A}^2$ lineaire combinatie van een aftelbaar aantal basiselementen is. Dit volgt omdat het geldt in $\mathcal{P}$ door de klassieke fourriertransformatie, en dit blijft ongewijzigd na completie omdat de projectie $f \rightarrow (f, e^{itx})$ continu is in $\mathcal{A}^2$. Zij immers $f_i \rightarrow f$ volgens $\mathcal{A}^2$, dan geldt dat $\hat{f}_i(t) \rightarrow \hat{f}(t)$ voor elke t . Definieer nu $g_i = \sum_{|t| < i \in \text{spec}(f_i)} \hat{f}_i(t) e^{itx}$, dan geldt door een diagonaalargument nog steeds dat $g_i \rightarrow f$, en het is nu duidelijk dat g_i ook convergeert naar $\sum_{t \in \text{spec}(f)} \hat{f}(t) e^{itx}$. $\square$

Het is belangrijk op te merken dat dit enkel convergentie in norm garandeert, en niet puntsgewijze convergentie in $\mathbb{R}$ van de functie geëvalueerd in een zeker punt x . Het is onmogelijk dat dit in het algemeen zou gelden, aangezien verschillende functies dezelfde fourriercoëfficiënten kunnen hebben. Namelijk impliceert de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ in de definitie van het inproduct dat we een functie $f(x)$ in een begrensde verzameling willekeurig kunnen veranderen zonder dat de fourriercoëfficiënten veranderen. Met het oog op een efficiënte toepassing van een fourrierreeks, restringeren we de aandacht tot een deelverzameling functies die aan een zekere voorwaarde omtrent de groei van de fourriercoëfficiënten voldoen. Zij $\mathcal{A}'$ de ruimte van functies f waarvoor

$$\sum_{t, s \in \text{spec}(f)} |\hat{f}(t) \hat{f}(s)| \min(1, \frac{1}{|t - s|}) < \infty \quad (1.1)$$

Men kan aantonen dat de fourrierreeksen van dergelijke functies convergeren voor bijna alle x . Immers, we bewijzen in Stelling 1.3.3 dat hieruit volgt dat de fourrierreeks in L^2 convergeert, wat door de stelling van Carleson bijna-overal-convergentie impliceert. Dergelijke bijna overal convergerende fourrierreeksen vormen de deelruimte $\mathcal{A}$ van $\mathcal{A}'$. Met andere woorden, voor elke klasse functies uit $\mathcal{A}'$ die dezelfde fourriercoëfficiënten geven kiezen we een unieke functie die daadwerkelijk bijna overal gelijk is aan zijn fourrierreeks. We tonen nu aan dat deze functieruimte $\mathcal{A}$ op een eenvoudige manier topologisch beschreven kan worden.

1.3.2 Stelling. Zij $\mathcal{T}'$ de topologie, gedefinieerd op $\mathcal{A}^2$ waarin (f_n) naar f nadert als en slechts als

- $\sum_{t, s \in \text{spec}(f - f_n)} |(\hat{f}(t) - \hat{f}_n(t))(\hat{f}(s) - \hat{f}_n(s))| \min(1, \frac{1}{|s - t|}) \rightarrow 0$
- $f_n(x) \rightarrow f(x)$ voor bijna alle x

Dan is de ruimte $\mathcal{A}$ is de sluiting van $\mathcal{P}$ volgens $\mathcal{T}$. In het bijzonder is $\mathcal{A}$ gesloten onder $\mathcal{T}$.

Bewijs. We tonen eerst dat men wel degelijk een topologie definieert wanneer men een voorwaarde voor *naderen* voorschrijft. De definitie van de topologie luidt dat een verzameling gesloten is wanneer elk punt dat men kan benaderen met elementen uit de verzameling, zich ook in die verzameling bevindt. Zo zijn de lege en de volledige verzameling duidelijk gesloten. Wat betreft eindige unies, zij (f_n) een convergerende rij in een unie gesloten verzamelingen. Wegens het duivenhokprincipe moet minstens een van de gesloten verzamelingen oneindig veel f_i in zich bevatten, wat impliceert dat de limiet van deze deelrij, en dus de hele rij, in deze verzameling moet liggen. Wat betreft willekeurige doorsnedes, zij (f_n) een convergerende rij in een doorsnede van gesloten verzamelingen. Dan zit elke f_i in elk van deze verzamelingen, dus zit de limiet eveneens in elk van deze verzamelingen, dus ook in de doorsnede.

Door de klassieke fourriertransformatie voor periodische functies zit $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$. Aangezien functies uit $\mathcal{A}$ gedefinieerd zijn als trigonometrische reeksen, wiens coëfficiënten aan een zekere groei-conditie voldoen, en die puntsgewijs convergeren, zijn eindige trigonometrische polynomen dicht in $\mathcal{A}$ volgens $\mathcal{T}'$. Immers, indien $\sum_{t,s \in \text{spec}(f)} |\hat{f}(t)\hat{f}(s)| \min(1, \frac{1}{|t-s|})$ eindig is, zal

$$\sum_{t,s \in \text{spec}(f-f_n)} |(\hat{f}(t) - \hat{f}_n(t))(\hat{f}(s) - \hat{f}_n(s))| \min(1, \frac{1}{|s-t|}) \rightarrow 0$$

indien we f_n kiezen als de n -de partiële som in de fourrierontwikkeling. Eindige trigonometrische polynomen zitten in $\mathcal{P}$, zodat volgt dat $\mathcal{P}$ dicht ligt in $\mathcal{A}$. We hebben dus $\mathcal{P} \subset \mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{P}}$. Nu bewijzen we de omgekeerde gelijkheid $\overline{\mathcal{P}} \subset \mathcal{A}$. Zij f_i een rij trigonometrische polynomen die volgens $\mathcal{T}$ convergeert naar een functie $f \in \mathcal{A}^2$. We bewijzen dat f in $\mathcal{A}$ ligt. De projectieafbeelding $f \rightarrow (f, e^{itx})$ is natuurlijk continu volgens de $\mathcal{A}^2$ -topologie. Dit impliceert dat de fourriercoëfficiënten van de f_i naar die van f convergeren. Aldus kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat de f_i juist de partiële sommen van de fourrierreeks zijn. De eerste voorwaarde van convergentie volgens $\mathcal{T}'$ betekent nu dat de fourrierreeks van f in $\mathcal{A}'$ zit, en de tweede voorwaarde, bijna overal puntsgewijze convergentie, betekent dat f gelijk bijna overal gelijk is aan zijn fourrierreeks, dus $f \in \mathcal{A}$.

Zij nu g_i een volgens $\mathcal{T}'$ convergerende rij elementen uit $\mathcal{P}$ met limiet g . De trigonometrische polynomen zijn dicht in $\mathcal{P}$, dus we kunnen voor elke i een rij trigonometrische polynomen h_n^i vinden die convergeren naar g_i . Dan convergeert h_n^n naar g volgens $\mathcal{T}'$. We mogen dus concluderen dat g in

$\mathcal{A}$ ligt, en we hebben bewezen dat $\overline{\mathcal{P}} \subset \mathcal{A}$. Dit besluit het bewijs.
Merk op dat de definitie van completering overeenkomt met het concept van de sluiting nemen van $\mathcal{P}$ binnen $\mathcal{A}^2$. $\square$

Deze topologie is in enkele gevallen nuttig, maar in veel gevallen is het veel handiger om volgende eenvoudige topologie te gebruiken. Zij $\mathcal{T}$ de topologie gedefinieerd op $\mathcal{A}^2$ door te stellen dat $f_n \rightarrow f$ als en slechts als

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x |f_n(t) - f(t)|^2 dt \rightarrow 0$
- $\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt \rightarrow 0$ voor alle $a < b$

1.3.3 Stelling. De topologie $\mathcal{T}'$ op $\mathcal{A}^2$ die precies $\mathcal{A}$ als sluiting van $\mathcal{P}$ geeft, is fijner dan de topologie $\mathcal{T}$

Bewijs. We tonen aan dat convergentie volgens $\mathcal{T}'$ convergentie volgens $\mathcal{A}^2$ en $L^2[a, b]$ impliceert. Dit betekent dat wanneer een verzameling gesloten is volgens $\mathcal{T}$, dan ook volgens $\mathcal{T}'$. Met andere woorden, $\mathcal{T}'$ bevat meer open verzamelingen, of is fijner dan $\mathcal{T}$. Laat dus $f_n \rightarrow f$ volgens $\mathcal{T}'$. De $\mathcal{A}^2$ -convergentie is gemakkelijk, aangezien de $\{e^{itx} | t \in \mathbb{R}\}$ orthonormale elementen vormen in $\mathcal{A}^2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x |f_n(t) - f(t)|^2 dt \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{k, l \in \text{spec}(f - f_n)} |(\hat{f}(k) - \hat{f}_n(k))(\hat{f}(l) - \hat{f}_n(l))| e^{i(k-l)t} dt \\ \leq \sum_{k \in \text{spec}(f - f_n)} |(\hat{f}(k) - \hat{f}_n(k))|^2 \end{aligned}$$

wat een positief deel van een som is met enkel positieve termen, die per onderstelling naar nul gaat. Wat betreft $L^2[a, b]$ is het inproduct van de nu niet meer orthonormale set $\{e^{itx} | t \in \mathbb{R}\}$ toch nog klein genoeg om de convergentie te garanderen.

$$\begin{aligned} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt &= \int_a^b \sum_{k, l \in \text{spec}(f - f_n)} |(\hat{f}(k) - \hat{f}_n(k))(\hat{f}(l) - \hat{f}_n(l))| e^{i(k-l)t} dt \\ &\leq \sum |(\hat{f}(k) - \hat{f}_n(k))(\hat{f}(l) - \hat{f}_n(l))| \min(b - a, \frac{2}{|k - l|}) \end{aligned}$$

wat kleiner is dan $\max(2, b - a)$ keer een som die per onderstelling naar nul gaat. $\square$

Met andere woorden, de combinatie van $\mathcal{A}^2$ en $L^2[a, b]$ -convergentie geeft als sluiting voor $\mathcal{P}$ een verzameling die mogelijks groter is dan $\mathcal{A}$. Toch zullen we vanaf nu $\mathcal{T}$ gebruiken, en noteren we met $\mathcal{A}$ nu de sluiting van $\mathcal{P}$ onder $\mathcal{T}$. De stelling van Carleson gerandeerd nu nog steeds dat functies uit $\mathcal{A}$ een fourrierreeks hebben die bijna overal naar de functie convergeert, maar we hebben niet meer dat ongelijkheid (1.1) geldt.

Conclusie :

Een functie is in deze context *bijna-periodisch* als en slechts als het de limiet is van functies van $\mathcal{P}$ in de zin dat ze convergeren volgens $L^2[a, b]$ voor elk interval, en volgens $\mathcal{A}^2$. Zijn fourrierreeks gedraagt zich goed in de zin dat ze convergeert naar de functie zelf in elke $L^2[a, b]$ en $\mathcal{A}^2$ -norm, en dus ook bijna overal.

Hoofdstuk 2

De Riemann-zeta functie en priemgetallen

2.1 De Riemann-zeta functie

Nadat we de ruimte waarin we zullen werken gedefinieerd hebben, leiden we de voor de toepassingen benodigde getaltheoretische concepten in. We streven niet naar volledigheid wat betreft de bewijzen, en verwijzen de lezer voor een excellente behandeling van de theorie van de Riemann-zeta functie naar het boek *Riemann's Zeta Function* van H. M. Edwards [2]. De feiten die meest essentieel zijn voor de toepassingen, zoals de expliciete formule, zullen we wel minstens voorzien van een intuïtieve verklaring of schets van een bewijs. We beginnen vanaf nul bij het startpunt van alle analytische getaltheorie; de Riemann-zeta functie. Deze functie van een complexe variabele, waarbij op initiatief van Riemann de variabele met s genoteerd wordt, wordt gedefinieerd als

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s} \quad \text{indien } \operatorname{Re}(s) > 1$$

Dat deze reeks voor $\operatorname{Re}(s) > 1$ convergeert (zelfs absoluut) kan snel aangetoond worden. Zij $s = \sigma + it$.

$$\sum_n \frac{1}{|n^s|} = \sum_n \frac{1}{|n^\sigma|} \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^\sigma} dx \leq 1 + \frac{1}{1 - \sigma}$$

Vervolgens toont Riemann aan dat deze functie, vooralsnog enkel gedefinieerd in het halfvlak $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 1\}$, wel degelijk kan uitgebreid worden tot een holomorfe functie op geheel $\mathbb{C}$, op een enkelvoudige pool in

$s = 1$ na. Dit proces van analytische continuatie beschrijft Riemann als het vinden van een formule die geldig blijft voor alle s . Concreet beschouwt hij de definitie voor de Gammafunctie $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$, waaruit na substitutie nx in plaats van x volgt dat $\Gamma(s) \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx$. Sommatie geeft voor reële $s > 1$ dat

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s) \zeta(s),$$

wat na kunstig contourintegreren omgezet wordt in een formule voor $\zeta(s)$ waarin het rechterlid nu een functie is, holomorf op het punt $s = 1$ na.

Een van de grondvesten van de theorie is verder het bestaan van een hoogst opmerkelijke vorm van symmetrie, uitgedrukt in de zogenaamde *functie-vergelijking van de Riemann-zeta functie*. Deze luidt als volgt.

2.1.1 Stelling. Beschouw de functie $\xi(s) = \zeta(s) \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2})^{\frac{s(s+1)}{2}}$. Dan is

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

2.1.2 Gevolg. De wortels van de Riemann-zeta functie zijn de volgende

- (i) de triviale wortels $s = -2n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met orde 1.
- (ii) de niet-triviale wortels $s = \rho = \sigma + i\gamma$, met $0 \leq \sigma \leq 1$. Indien ρ een niet-triviale wortel is, dan is $1 - \rho$ eveneens een niet-triviale wortel

Bewijs. Uit de vorige stelling halen we

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \xi(1-s) \\ \Leftrightarrow \zeta(s) \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2})^{\frac{s(s+1)}{2}} &= \zeta(1-s) \pi^{-(1-s)/2} \Gamma(\frac{1-s}{2})^{\frac{(1-s)(-s)}{2}} \\ \Leftrightarrow \zeta(s) \Gamma(\frac{s}{2}) &= \zeta(1-s) \pi^{s-1/2} \Gamma(\frac{1-s}{2}) \end{aligned}$$

Nu geldt er dat de Gammafunctie nergens nul wordt en enkelvoudige polen heeft in $-1, -2, \dots$. Wanneer we bovenstaande gelijkheid evalueren in $s = -2n$ zien we dat het rechterlid geen pool heeft, en de pool van $\Gamma(\frac{s}{2})$ dus gecompenseerd moet worden door een nulpunt van $\zeta(s)$ in $-2n$. Dit nulpunt moet orde 1 hebben gezien het rechterlid ook niet nul is; $\zeta(1+2n) = \sum_k \frac{1}{k^{1+2n}}$ is convergent en positief, in het bijzonder dus niet nul. Algemeener, voor $\text{Re}(s) > 1$ heeft $\zeta(s)$ geen nulpunten. Immers, uit de Euler-identiteit in de volgende sectie 2.1, kunnen we $\zeta(s)$ als volgt afschatten. Elke factor in de productontbinding is groter dan 1 aangezien $|1 - \frac{1}{p^s}| < 1$, waarvoor dit oneindig product ook groter dan 1 is en in het bijzonder dus niet nul. Andere wortels van $\zeta(s)$ moeten ook wortels zijn van $\zeta(1-s)$, aangezien $\Gamma(\frac{1-s}{2})$ nergens nul wordt, en dan impliceert $\text{Re}(s) \leq 1$ ook dat $\text{Re}(s) \geq 0$. $\square$

Deze symmetrie onder de niet-triviale wortels hint in de richting van de befaamde Riemann Hypothese, namelijk dat alle niet-triviale wortels op de lijn $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liggen. Deze voor de leek onschuldig lijkende hypothese blijkt grote gevolgen te hebben wat betreft de regulariteit in de priemgetalverdeling. We komen hier nog op terug.

Deze functie ζ , die weleens de *gecompleteerde zeta-functie* genoemd wordt, heeft nog een grote troef. Ze heeft geen polen en heeft enkel de niet-triviale wortels van $\zeta(s)$ als nulpunten, en voldoet zelfs aan een zogenaamde product formule. Het bestaan van een dergelijke voorstelling is niet triviaal en benodigt enkele voorwaarden omtrent de groei van de functie ζ . Intuïtief heeft men nodig dat ζ zoals een polynoom van oneindige graad is; de product formule geldt voor polynomen (waarvoor $p(0) \neq 0$), en men heeft nodig dat eindige stukken de functie goed genoeg benaderen.

2.1.3 Stelling. $\zeta(s) = \zeta(0) \prod_{\rho}' (1 - \frac{s}{\rho})$

Het teken $\prod'$ betekent dat in het product de factoren horende bij ρ en $1 - \rho$ gekoppeld moeten worden, dit is nodig om de convergentie te garanderen.

Tenslotte hebben we nog volgend essentieel ingredient nodig in ongeveer alle afschattingen van uitdrukkingen waarin de wortels van de Riemann zeta functie staan.

2.1.4 Stelling. (Riemann 1859/von Mangoldt 1905) Zij $N(T)$ het aantal wortels van de Riemann zeta functie met imaginair deel positief en kleiner dan T . Dan is

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log(T))$$

2.2 De functie $\psi(x)$ en de expliciete formule

De oorsprong van alle connecties tussen de Riemann zeta functie en de priemgetallen ligt bij het Euler product (geldig voor $\text{Re}(s) > 1$).

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (2.1)$$

De gemakkelijkste manier om dit om te vormen naar iets werkbaarder is door logaritmische differentiatie :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{\log(p)p^{-s}}{1 - p^{-s}} = \sum_p \log(p)(p^{-s} + p^{-2s} + \dots) = \sum_{n=p^k} \frac{\log(p)}{n^s} \quad (2.2)$$

Definieer voor het gemak $\Lambda(n) = \log(p)$ als $n = p^k$ een priemmacht is, en anders nul. Geïnspireerd door bovenstaande identiteit lijkt het opportuun om de *grootte* van $\sum_n \Lambda(n)$ te bestuderen, en dit als invulling van het concept van de maat of dichtheid van de priemgetallen in de natuurlijke getallen. Dat is precies wat volgende stelling verwezenlijkt.

2.2.1 Stelling. (von Mangoldt, 1895) Zij $\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$. Zij $\psi_0(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(x+\epsilon) + \psi(x-\epsilon)}{2}$. Voor alle $x > 1$ geldt dat

$$\psi_0(x) = x - \sum_p \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right), \quad (2.3)$$

waarbij de oneindige som over de niet-triviale wortels van de Riemann zeta functie loopt.

Bewijs. We geven een schets van het bewijs. De technische stappen, onder meer het afleiden van de integraalformule en geldigheid van verwisseling van sommatie en integraal, laten we achterwege. Een sleutelgegeven om (2.2) te manipuleren is volgende oneigenlijke integraal(waarbij $c > 1$)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} y^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 < y < 1 \\ 1/2 & \text{als } y = 1 \\ 1 & \text{als } y > 1 \end{cases}$$

Vervolgens integreren we $\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s} x^s = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s$. Dit geeft enerzijds

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s} x^s \frac{ds}{s} &= \sum_n \Lambda(n) \frac{1}{2\pi} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \\ &= \psi_0(x) \end{aligned}$$

Anderzijds zullen we $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s$ integreren door middel van Cauchy's residu-stelling. Men toont aan dat de integraal over de verticale lijn $[c - Ti, c + Ti]$ voor $T \rightarrow \infty$ gelijk is aan de contourintegraal over de rechthoek met hoekpunten $c - Ti, c + Ti, -U + Ti, -U - Ti$, waar U een oneven natuurlijk getal is en waar $U, T \rightarrow \infty$. Dan kan de integraal uitgedrukt worden als som over de polen van $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}$. $\zeta(s)$ heeft in $s = 1$ zijn enige pool, van orde 1 met residu 1. Dit betekent dat $\zeta(s) = \frac{a(s)}{s-1}$ met $a(1) = 1$. De pool in $s = 1$ (van $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}$) heeft als residu

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left(-(s-1) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} \right) = x \lim_{z \rightarrow 1} \left(-(s-1) \frac{\frac{(s-1)a'(s) - a(s)}{(s-1)^2}}{\frac{a(s)}{s-1}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= x \lim_{z \rightarrow 1} \left(-\frac{(s-1)a'(s) - a(s)}{a(s)} \right) \\
&= x.
\end{aligned}$$

De pool in $s = \rho$ een niet-triviale wortel draagt een residu van grootte $-\frac{x^\rho}{\rho}$ bij; veronderstel dat ρ orde n heeft. Dan is door de productformule van $\zeta(s)$ de Riemann-zeta functie te schrijven als $\zeta(s) = (1 - \frac{s}{\rho})^n r(s)$, met $r(s)$ niet nul in ρ .

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow \rho} \left(-(s - \rho) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} \right) &= -\frac{x^\rho}{\rho} \lim_{s \rightarrow \rho} \left((s - \rho) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \\
&= -\frac{x^\rho}{\rho} \lim_{s \rightarrow \rho} \left((s - \rho) \frac{n(1 - \frac{s}{\rho})^{n-1} (\frac{-1}{\rho}) r(s) + (1 - \frac{s}{\rho})^n r'(s)}{(1 - \frac{s}{\rho})^n r(s)} \right) \\
&= -n \frac{x^\rho}{\rho}.
\end{aligned}$$

Aangezien wortels met multipliciteit n bij conventie n keer voorkomen in de reeks $\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}$ is dit wat we zochten.

De pool in $s = 0$ heeft als residu $-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$ aangezien dit geen singulariteit van $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ is.

De pool in $s = -2n$ een triviale wortel heeft als residu $\frac{x^{-2n}}{2n}$. Immers de enige factor van $\zeta(s)$ die deze wortels bezit is $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$, en het is welbekend dat Γ aan een soort productformule voldoet;

$$\Gamma(s+1) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{s}{n})^{-1} (1 + \frac{1}{n})^s,$$

waardoor $\zeta(s) = (1 + \frac{s}{2n}) p(s)$ met $p(s)$ niet nul in $-2n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow -2n} \left(-(s + 2n) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} \right) &= -\frac{x^{-2n}}{-2n} \lim_{s \rightarrow -2n} \left((s + 2n) \frac{(1 + \frac{s}{2n}) p'(s) + \frac{1}{2n} p(s)}{(1 + \frac{s}{2n}) p(s)} \right) \\
&= -\frac{x^{-2n}}{-2n}.
\end{aligned}$$

Merk tenslotte op dat $\frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) = \sum_{n>0} \frac{x^{-2n}}{-2n}$. Hieruit volgt de formule. Wanneer men deze schets rigoreus wil maken, moet men om technische redenen in verband met verwisseling som en integraaltekens, met een eindige variant van de integraalformule werken; $\frac{1}{2\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} y^s \frac{ds}{s}$. Deze wordt dan gebruikt om te bewijzen dat

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho < T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) + R(x, T),$$

waarbij $R(x, T)$ een zekere functie is die voor elke x naar 0 gaat wanneer $T \rightarrow \infty$. Hieruit volgt na limietovergang $T \rightarrow \infty$ dan de formule, en zo verkrijgt men ook meteen een afschatting voor de truncatie

$$\left| \sum_{\rho < T} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq R(x, T)$$

□

Deze zogenaamde *expliciete formule* geeft in zekere zin een analytische beschrijving van de verdeling van de priemenvrijdelingen. Vooreerst is er een zeer regelmatig lineair deel, wat aangeeft dat mits schommelingen de priemenvrijdelingen aan eenzelfde *steady rate* blijven voorkomen. Aan de andere kant is er het oscillerende deel $\sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho}$, dat zich minst gemakkelijk laat doorgronden. Om deze reeks af te schatten is enige inventiviteit vereist, gezien bijvoorbeeld

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|} \rightarrow \infty.$$

Deze mysterieuze term die alle schommelingen in de verdeling van de priemgetallen in zekere zin codeert is het onderwerp van onze studie. Afschattingen van deze term geven rechtstreeks afschattingen van de functie ψ , wat afschattingen van de priemgetalfunctie π impliceert. De overgang van $\psi(x)$ naar $\pi(x)$ is elementair, en het volgende verband geldt tussen beide functies.

2.2.2 Stelling. $\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\psi(t)}{t \log^2(t)} dt + O(\sqrt{x})$

Bewijs. We zullen de functie $\psi(x)$ met behulp van een tussenstap aan de priemgetalfunctie $\pi(x)$ linken. De tussenliggende stap is de functie $\pi_1(x)$, die het aantal priem machten kleiner dan of gelijk aan x telt, met gewicht $1/k$ voor de k -de priem machten. Via partiële sommatie krijgen we

$$\begin{aligned} \pi_1(x) &= \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)} = \sum_{n \leq x} \frac{\psi(n) - \psi(n-1)}{\log(n)} \\ &= \sum_{n \leq x-1} \psi(n) \left(\frac{1}{\log(n)} - \frac{1}{\log(n+1)} \right) + \frac{\psi(x)}{\log(x)} \\ &= \sum_{n \leq x-1} \psi(n) \int_n^{n+1} \frac{1}{t \log^2(t)} dt + \frac{\psi(x)}{\log(x)} \\ &= \int_2^x \frac{\psi(t)}{t \log^2(t)} dt + \frac{\psi(x)}{\log(x)} \end{aligned}$$

Nu kunnen we π_1 vrij gemakkelijk linken aan de priemgetalfunctie door middel van

$$\pi_1(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \dots + \frac{1}{n}\pi(x^{1/n}) + \dots$$

Merk op dat dit voor elke x een eindige som is. Meer bepaald is $\pi(y)$ nul voor $y < 2$; dus staan er voor gegeven x maar $\lceil \frac{\log(x)}{\log 2} \rceil$ niet-nul termen. De moraal van het verhaal is nu dat hogere priem machten weinig toedragen. Door de triviale afschatting $\pi(y) \leq y$ krijgen we dat

$$\pi(x) = \pi_1(x) + O\left(\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^{1/3}\frac{\log(x)}{\log 2}\right) = \pi_1(x) + O(\sqrt{x})$$

□

Zo is $\psi(x) \sim x$ al voldoende om de klassieke priemgetalstelling $\pi(x) \sim \text{li}(x)$ te bewijzen. Dit is ook hoe deze oorspronkelijk bewezen werd; in 1896 bewezen Hadamard en De La Vallée Poussin onafhankelijk van elkaar met zeer gelijkaardige methodes dat de triviale wortels van de Riemann-zeta functie niet op de lijn $\text{Re}(s) = 1$ kunnen liggen, waaruit ze afleiden dat $\psi(x) \sim x$ en dus $\pi(x) \sim \text{li}(x)$. Het reële deel van de niet-triviale wortels heeft dus een grote invloed op de errorterm. Aannemende de Riemann Hypothese geldt dat

$$\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} = \sqrt{x} \sum_{\rho} \frac{x^{i\gamma}}{\rho},$$

en zien we dat het regulier groeiende deel hier van de orde $\sqrt{x}$ is. Koch bewees in 1901 dat de Riemann Hypothese impliceert dat $\psi(x) = x + O(\sqrt{x} \log^2(x))$, of equivalent, dat $\pi(x) = \text{li}(x) + O(\sqrt{x} \log(x))$. Het verband tussen het reële deel van de niet-triviale wortels en de errorterm in de priemgetalverdeling is zo sterk dat zelfs een enkele afwijkende wortel met reële deel strikt groter dan $\frac{1}{2}$ al impliceert dat de errorterm groter wordt dan x^{ε} voor een zekere ε . Zo is dus de Riemann Hypothese equivalent aan de feit dat de errorterm in $\pi(x) \sim \text{li}(x)$ uiteindelijk kleiner wordt dan $x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, voor elke ε .

2.3 De errorterm in de expliciete formule

We tonen nu aan dat de in het vorige hoofdstuk opgebouwde theorie rond bijna-periodische functies wel degelijk toepasbaar is op dit alles; we zullen aantonen dat de functie

$$f(x) := \frac{\psi(e^x) - e^x}{e^{x/2}} + e^{-x/2} \log(1 - e^{-2x}) = \sum_{\rho} \frac{e^{i\gamma x}}{\rho}$$

bijna-periodisch is. Schlage-Puchta bewijst dit in zijn thesis voor elke macht f^k , als gemakkelijk gevolg van een nieuwe formule voor het k -de moment van de functie f . In dit kader hebben we deze formules verder niet nodig, en zullen we het algemene argument vereenvoudigen tot het onderstaande bewijs.

2.3.1 Stelling. f is bijna-periodisch.

Bewijs.

$$f(x) = \sum_{\rho} \frac{e^{i\gamma x}}{\rho}$$

We bewijzen dat zijn fourriercoëfficiënten niet te snel groeien. Aangezien de functie gedefinieerd is als limiet van zijn fourrierreeks, is hij dan een element van $\mathcal{A}$. Als gevolg van de orthonormaliteit van de e^{itx} voor alle t zijn de coëfficiënten gelijk aan $\frac{1}{\rho}$, dus wat we moeten bewijzen is dat

$$\sum_{\rho_1, \rho_2} \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \min(1, \frac{1}{|\gamma_1 - \gamma_2|}) < \infty$$

We zullen het welbekende feit gebruiken dat

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\rho^{1+\varepsilon}}$$

convergeert voor elke positieve ε . Dit is een vrij algemeen feit geldig voor alle *integrale functies van orde 1*, zoals bijvoorbeeld de Riemann zeta functie. Dit volgt ook op elementaire wijze uit de afchatting van Stelling 2.1.4.

Vooreerst schrijven we de af te schatten som als

$$\begin{aligned} \sum_{\rho_1, \rho_2} \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \min(1, \frac{1}{|\gamma_1 - \gamma_2|}) &\leq \sum_{\rho_1, \rho_2} \frac{1}{|\rho_1 \rho_2|} \min(1, \frac{1}{|\gamma_1 - \gamma_2|}) \\ &\leq \sum_{\gamma_1, \gamma_2} \frac{1}{|\gamma_1 \gamma_2|} \min(1, \frac{1}{|\gamma_1 - \gamma_2|}) \\ &\leq 2 \sum_{|\gamma_1| \leq |\gamma_2|} \frac{1}{|\gamma_1 \gamma_2|} \min(1, \frac{1}{|\gamma_1 - \gamma_2|}). \end{aligned}$$

We splitsen de som nu op in twee delen; een voor alle paren γ_1, γ_2 met $|\gamma_1 - \gamma_2| > \sqrt{|\gamma_2|}$ en een voor alle anderen. De eerste groep kan nu als volgt behandeld worden :

$$\sum_{|\gamma_1| \leq |\gamma_2|} \frac{1}{|\gamma_1 \gamma_2|} \min(1, \frac{1}{|\gamma_1 - \gamma_2|}) \leq \sum_{|\gamma_1| \leq |\gamma_2|} \frac{1}{|\gamma_1 \gamma_2^{1+1/2}|}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{|\gamma_1| \leq |\gamma_2|} \frac{1}{|\gamma_1^{5/4} \gamma_2^{5/4}|} \\
&\leq \left(\sum_{|\gamma_1|} \frac{1}{|\gamma_1^{5/4}|} \right)^2 < \infty
\end{aligned}$$

De tweede groep zal klein blijven voor elke γ_1 , omdat slechts een klein aantal getallen γ_2 met $|\gamma_1 - \gamma_2| < \sqrt{|\gamma_2|}$ bestaan. Namelijk impliceert $|\gamma_1 - \gamma_2| < \sqrt{|\gamma_2|}$ dat $\gamma_2^2 - (2\gamma_1 + 1)\gamma_2 + \gamma_1^2 < 0$, wat dan weer impliceert dat $|\gamma_2| < \frac{2|\gamma_1|+1+\sqrt{4|\gamma_1|+1}}{2} < |\gamma_1| + \sqrt{|\gamma_1|} + 1$, en ook hebben we nog steeds dat $|\gamma_2| \geq |\gamma_1|$. Nu willen we kunnen besluiten dat er niet te veel wortels van de Riemann zeta functie met imaginair deel in dit interval $[|\gamma_1|, |\gamma_1| + \sqrt{|\gamma_1|} + 1]$ liggen. Hiervoor gebruiken we Stelling 2.1.4, die impliceert dat het aantal wortels in $[|\gamma_1|, |\gamma_1| + \sqrt{|\gamma_1|} + 1]$ begrensd is door twee keer

$$\begin{aligned}
&\frac{|\gamma_1| + \sqrt{|\gamma_1|} + 1}{2\pi} \log\left(\frac{|\gamma_1| + \sqrt{|\gamma_1|} + 1}{2\pi}\right) - \frac{|\gamma_1| + \sqrt{|\gamma_1|} + 1}{2\pi} \\
&\quad - \left(\frac{|\gamma_1|}{2\pi} \log\left(\frac{|\gamma_1|}{2\pi}\right) - \frac{|\gamma_1|}{2\pi} \right) + O(\log(|\gamma_1|)) \\
&\leq \frac{|\gamma_1|}{2\pi} \log\left(1 + \frac{\sqrt{|\gamma_1|} + 1}{|\gamma_1|}\right) + \frac{\sqrt{|\gamma_1|} + 1}{2\pi} \log\left(\frac{2|\gamma_1|}{2\pi}\right) + O(\log(|\gamma_1|)) \\
&\leq c\sqrt{|\gamma_1|} \log(|\gamma_1|)
\end{aligned}$$

De laatste afchatting geldt omdat $\lim_{\gamma_1 \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2\sqrt{|\gamma_1|}}{|\gamma_1|}\right) = e^2\sqrt{|\gamma_1|}$, en de convergentie verloopt strikt stijgend, dus de eerste term is $O(\sqrt{|\gamma_1|})$. Uiteindelijk kunnen we het tweede deel van de som afschatten als

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{|\gamma_1| \leq |\gamma_2| \\ |\gamma_2| < |\gamma_1| + \sqrt{|\gamma_1|} + 1}} \frac{1}{|\gamma_1 \gamma_2|} \min(1, \frac{1}{|\gamma_1 - \gamma_2|}) &\leq \sum_{\substack{|\gamma_1| \leq |\gamma_2| \\ |\gamma_2| < |\gamma_1| + \sqrt{|\gamma_1|} + 1}} \frac{1}{|\gamma_1 \gamma_2|} \\
&\leq \sum_{|\gamma_1|} \frac{c\sqrt{|\gamma_1|} \log(|\gamma_1|)}{|\gamma_1^2|} \\
&\leq c \sum_{|\gamma_1|} \frac{1}{|\gamma_1^{1+1/3}|} < \infty
\end{aligned}$$

□

Merk op dat we de convergentie van de partieelsommen van de fourrierontwikkeling bewezen hebben volgens de strengere topologie $\mathcal{T}'$. Dit impliceert convergentie volgens $\mathcal{A}^2$ en $L^2[a, b]$, met andere woorden bijna-periodiciteit van f . We hebben echter op subtiële wijze meer; meer bepaald

impliceert de groeivoorwaarde 1.1 convergentie volgens $L^2[a, b]$ uniform in alle $[a, b]$ met gelijke lengte $b - a$.

2.4 Uitbreiding naar Dirichlet L-functies

Ook voor de reeksen $\sum_p \frac{x^{it\gamma}}{\rho}$, waarbij de som loopt over de niet-triviale wortels van de Dirichlet L-functies $L(s, \chi)$, is bovenstaand resultaat geldig. Hier is χ een karakter $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$. De Dirichlet L-functies zijn gedefinieerd als

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p) \frac{1}{p^s}}.$$

Deze functies veralgemenen de Riemann-zeta functie (inderdaad zullen we $\zeta(s)$ af en toe noteren als $L(s, 1)$) en spelen eveneens een belangrijke rol in de verdeling van de priemgetallen, met name in de verdeling van de priemgetallen in een gegeven restklasse modulo q . Dit kan men doen door de orthogonaliteit van karakters :

$$\sum_{\chi} \chi(x) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{if } x \equiv 1 \pmod{q} \\ 0 & \text{if } x \not\equiv 1 \pmod{q} \end{cases}$$

Zo kunnen deze L-functies dan aangewend worden om een bepaalde restklasse te isoleren; zo is bijvoorbeeld de lineaire combinatie

$$\sum_{\chi} \frac{\chi(a^{-1})}{\varphi(q)} L(s, \chi) = \sum_n \frac{\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \chi(na^{-1})}{n^s} = \sum_{n \equiv a \pmod{q}} \frac{1}{n^s}$$

Hierop voortbouwend kan men de stelling van Dirichlet over de oneindigheid van priemgetallen $p \equiv a \pmod{q}$ als $(a, q) = 1$ bewijzen, die in zekere zin equivalent is met het feit dat $L(1, \chi)$ een niet-nul waarde aanneemt voor elk niet-triviaal karakter χ . Dit domein van de analytische getaltheorie rond de studie van de verdeling van priemgetallen in de verschillende restklassen modulo q , was het eerste toepassingsdomein van de theorie van bijna-periodische functies, zoals gedaan door Schlage-Puchta in zijn doctoraatsthesis [7]. Het belangrijkste open vraagstuk waaraan deze theorie bijdragen levert is het Shanks-Renyi raceprobleem. Zij $\pi(x, q, a)$ het aantal priemmen $p \equiv a \pmod{q}$ kleiner dan x , dan is het raceprobleem de vraag of voor een willekeurige permutatie σ van de restklassen geldt dat de ongelijkheden

$$\pi(x, q, \sigma(1)) < \dots < \pi(x, q, \sigma(\varphi(q)))$$

gelden voor willekeurig grote x .

Analoog aan het Riemann zeta geval voert men de functie

$$\psi(x, \chi) = \sum_n \chi(n) \Lambda(n)$$

in, en aangezien enkel de pool in $s = 1$ niet meer is, en de ligging van de triviale wortels kan veranderen (in alle even negatieve getallen respectievelijk oneven), verkrijgt men na nagenoeg dezelfde procedure de expliciete formules.

2.4.1 Stelling. *Zij χ een niet-triviaal en primitief karakter. Indien $\chi(-1) = -1$, geldt voor alle $x > 1$*

$$\psi_0(x, \chi) = - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{L'}{L}(0, \chi) - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) - \log(1 + x^{-1})$$

Waarbij $\frac{L'}{L}(0, \chi)$ goed gedefinieerd is aangezien $L(0, \chi) \neq 0$. Indien $\chi(-1) = 1$, geldt voor alle $x > 1$

$$\psi_0(x, \chi) = - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log(x) - b(\chi) - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2})$$

*Waarbij $b(\chi)$ gedefinieerd is als $\frac{L'}{L}(s, \chi) = \frac{1}{s} + b(\chi) + a_1 s + \dots$
In elk geval geldt*

$$\psi_0(x, \chi) = - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) - O(\log(1 + \log(x)))$$

Waarbij de O -notatie geldt zowel voor $x \rightarrow \infty$ als voor $x \searrow 1$.

Ook hebben we de volgende afchatting voor truncatie van de errorterm, wanneer $x \searrow 1$.

$$\left| \sum_{\rho < T} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} \right| \leq C \frac{\log^2(T)}{T \log^2(x)}$$

Een analogon aan bovenstaande resultaat over de dichtheid van de wortels blijft geldig

2.4.2 Stelling. *Zij $N(T, \chi)$ het aantal wortels van de Dirichlet L -functies met $|\gamma| < T$. Dan geldt voor $T > 2$*

$$N(T, \chi) = \frac{T}{\pi} \log\left(\frac{qT}{2\pi}\right) - \frac{T}{\pi} + O(\log(T) + \log(q)).$$

Zij $N^+(T, \chi)$ het aantal wortels van de Dirichlet L -functies met $0 < \gamma < T$, en $N^-(T, \chi)$ het aantal wortels met $-T < \gamma < 0$. Dan geldt

$$N^+(T, \chi) - N^-(T, \chi) = O(1)$$

Dit impliceert dat men *verbatim* bovenstaande bewijs kan overnemen wat betreft de bijna-periodiciteit van de errorterm van de expliciete formule voor $\psi(x, \chi)$.

2.4.3 Stelling. De functie

$$f(x, \chi) = \sum_{\rho} \frac{e^{i\gamma x}}{\rho},$$

waarbij de som loopt over de niet-triviale wortel van de functie $L(s, \chi)$, zit in $\mathcal{A}$.

Voor de concrete toepassingen van hoofdstuk 5 volstaat het niet om enkel te weten dat $f(x, \chi)$ bijna periodisch is, of dus dat $\sum_{|\rho| < N} \frac{e^{it\gamma}}{\rho} \rightarrow \sum_{|\rho|} \frac{e^{it\gamma}}{\rho}$ volgens $\mathcal{T}$. We moeten een expliciete grens op de snelheid van convergentie vinden. Enkel informatie over de dichtheid van de termen gebruikende, tonen we nu aan hoe *snel* $\sum_{|\rho| < N} \frac{e^{it\gamma}}{\rho}$ in $L^2[a, b]$ convergeert.

2.4.4 Lemma. Zij $\Delta_N(t, \chi) = \sum_{|\rho| > N} \frac{e^{it\gamma}}{\rho}$, waar de sommatie loopt over alle niet-triviale wortels van $L(s, \chi)$, of van $\zeta(s)$, die we met $\chi = 1$ laten corresponderen. Voor alle $a < b$ en N groot genoeg hebben we dat

$$\int_a^b |\Delta_N(t, \chi)|^2 dt \leq C(\chi)(b - a + \log(N)) \frac{\log^2(N)}{N}$$

Bewijs. Vooreerst tonen we eerst dat voor elke χ er een C_χ bestaat zodat $N(T + 1, \chi) - N(T, \chi) \leq C_\chi \log(T)$ voor T groot genoeg. Inderdaad, gebruikende schattingen van het aantal wortels

$$\begin{aligned} N(T + 1, \chi) - N(T, \chi) &= \log\left(\frac{q(T + 1)}{2\pi}\right) + \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T + 1}{T}\right) - \frac{1}{\pi} + O(\log(qT)) \\ &= \log(qT) + \frac{T}{2\pi} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{2T^2} + \dots\right) + O(\log(qT)) \\ &= O(\log(T)) \end{aligned}$$

aangezien q hier vast is. We keren nu terug naar het gevraagde.

$$\begin{aligned} \int_a^b |\Delta_N(t, \chi)|^2 dt &= \int_a^b \left| \sum_{|\rho| > N} \frac{e^{it\gamma}}{\rho} \right|^2 dt \\ &= \int_a^b \sum_{|\rho_1|, |\rho_2| > N} \frac{e^{it(\gamma_1 - \gamma_2)}}{\rho_1 \bar{\rho}_2} dt \\ &= \sum_{|\rho_1|, |\rho_2| > N} \frac{e^{ib(\gamma_1 - \gamma_2)} - e^{ia(\gamma_1 - \gamma_2)}}{\rho_1 \bar{\rho}_2 (\gamma_1 - \gamma_2)} dt \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{|\rho_1|, |\rho_2| > N} \frac{1}{\rho_1 \bar{\rho}_2} \min(b-a, \frac{2}{\gamma_1 - \gamma_2}) dt$$

We beschouwen nu enkel de termen met $|\rho_1| < |\rho_2|$, en $\rho_1, \rho_2 > 0$. Andere gevallen zijn analoog, en die gevallen waarbij ρ_1 en ρ_2 een ander teken hebben zijn zelfs kleiner gezien $\frac{2}{\gamma_1 - \gamma_2}$ dan zeer klein wordt. We splitsen de som nu nogmaals op, en eerst beschouwen we die wortels met $|\rho_1 - \rho_2| < 1$. Hun aandeel in de som wordt begrensd door

$$\begin{aligned} (b-a) \sum_{|\rho_1|, |\rho_2| > N} \frac{1}{\rho_1 \bar{\rho}_2} &\leq (b-a) \sum_{|\rho_1| > N} \frac{N(\gamma_1 + 1) - N(\gamma_1)}{|\rho_1|^2} \\ &\leq (b-a) C_\chi \sum_{|\rho_1| > N} \frac{\log(\gamma)}{|\rho|^2} \\ &\leq (b-a) C_\chi \sum_{n > N} \frac{(N(n+1) - N(n)) \log(n+1)}{n^2} \\ &\leq (b-a) C_\chi \sum_{n > N} \frac{\log(n) \log(n+1)}{n^2} \\ &\leq (b-a) C_\chi \int_{N-1}^{\infty} \frac{\log(x) \log(x+1)}{x^2} dx \end{aligned}$$

Gezien $\log(x+1) = \log(x) + \log(1+x^{-1}) \leq \log(x) + \frac{1}{x} \leq 2\log(x)$, en

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\log^2(x)}{x^2} dx &= \left[-\frac{\log^2(x)}{x} \right]_a^b + 2 \int_a^b \frac{\log(x)}{x^2} dx \\ &= \left[-\frac{\log^2(x)}{x} \right]_a^b + 2 \left[-\frac{\log(x)}{x} \right]_a^b + 2 \int_a^b \frac{1}{x^2} dx \end{aligned}$$

kunnen we verder afschatten tot

$$\begin{aligned} &\leq (b-a) 2C_\chi \left(\frac{\log^2(N-1)}{N-1} + 2 \frac{\log(N-1)}{N-1} + \frac{2}{N-1} \right) \\ &\leq (b-a) 4C_\chi \frac{\log^2(N)}{N} \end{aligned}$$

Vervolgens herschikken we de andere koppels wortels volgens $n \leq |\rho_1| < n+1$ en $m \leq |\rho_1 - \rho_2| < m+1$. (Het geval $m = 0$ is zonet behandeld) Dan geldt $m+n \leq |\rho_2|$.

$$\begin{aligned} &\sum_{|\rho_1|, |\rho_2| > N} \frac{2}{\rho_1 \bar{\rho}_2 (\gamma_1 - \gamma_2)} \\ &\leq \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(N(n+1) - N(n))(N(n+m+1) - N(n+m))}{nm(n+m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2C_\chi^2 \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log(n) \log(n+m)}{nm(n+m)} \\
&\leq 2C_\chi^2 \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{\log(n) \log(n+m)}{n^2 m} + 2C_\chi^2 \sum_{m=N}^{\infty} \sum_{n=1}^m \frac{\log(n) \log(n+m)}{nm^2} \\
&\leq 2C_\chi^2 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\log(n) \log(2n)}{n^2} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} + 2C_\chi^2 \sum_{m=N}^{\infty} \frac{\log(2m)}{m^2} \sum_{n=1}^m \frac{\log(n)}{n}
\end{aligned}$$

Nu is

$$\sum_1^b \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^b \frac{1}{x} dx \leq 1 + \log(b),$$

en

$$\sum_1^b \frac{\log(i)}{i} \leq \int_1^b \frac{\log(x)}{x} dx = \int_1^b \log(x) d(\log(x)) = \frac{1}{2} \log^2(b),$$

dus schatten we verder af tot

$$\begin{aligned}
&\leq 8C_\chi^2 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\log^3(n)}{n^2} \\
&\leq 8C_\chi^2 \int_{N-1}^{\infty} \frac{\log^3(x)}{x^2} dx \\
&\leq 8C_\chi^2 \left(\frac{\log^3(N-1)}{N-1} + 3 \int_{N-1}^{\infty} \frac{\log^2(x)}{x^2} dx \right) \\
&\leq 16C_\chi^2 \frac{\log^3(N)}{N}
\end{aligned}$$

Aangezien van de tweede term in het eerste deel al werd aangetoond dat ze grootteorde $\frac{\log^2(N)}{N}$ heeft. Brengen we alles samen, dan verkrijgen we dat

$$\int_a^b |\Delta_N(t, \chi)|^2 dt \leq 16C(\chi)^2 (b - a + \log(N)) \frac{\log^2(N)}{N}.$$

□

Hoofdstuk 3

Eigenschappen van bijna-periodische functies

3.1 Concrete bijna-periodiciteit in de ruimte $\mathcal{A}$

Laat ons terugkeren naar de ruimte $\mathcal{A}$. We hebben nog niet aangetoond op welke concrete wijze deze functies *bijna* periodisch zijn. We kunnen aantonen dat volgende aanpassing van Stelling 1.2.3 geldt.

3.1.1 Stelling. *Zij f een bijna-periodische functie. Dan bestaat er voor elke ε en $a < b$ een nietledige verzameling S zodat $\forall s \in S$*

$$\int_a^b |f(t) - f(t+s)|^2 dt < \varepsilon,$$

i.e. alle $s \in S$ zijn bijna-perioden.

Bewijs. We bewijzen dit eerst voor eindige trigonometrische polynomen. Zij $f(x) = \sum_{j=1}^k a_j e^{i\alpha_j x}$. Dan is

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t+s)|^2 &\leq \sum_{j=1}^k |a_j|^2 |e^{i\alpha_j t} - e^{i\alpha_j(t+s)}|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^k |a_j|^2 |e^{i\alpha_j s} - 1|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^k |a_j|^2 \left| \int_0^{\alpha_j s} e^{iy} dy \right|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^k |a_j|^2 \left| \int_0^{\alpha_j s \bmod 2\pi} e^{iy} dy \right|^2 \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{j=1}^k |a_j|^2 4\pi^2 \left(\left\| \frac{\alpha_j s}{2\pi} \right\|_{\mathbb{N}} \right)^2.$$

We kunnen echter na Stelling 1.2.2 de getallen $\frac{\alpha_j s}{2\pi}$ voor goed gekozen s simultaan willekeurig dicht bij natuurlijke getallen krijgen. Stelling 1.2.2, toegepast op de vector $(\frac{\alpha_1}{2\pi}, \dots, \frac{\alpha_k}{2\pi})$ met als ε nu $\frac{\varepsilon}{4\pi^2(b-a)\sum_{j=1}^k |a_j|^2}$ geeft ons dan een verzameling S die aan het gevraagde voldoet. Dit kunnen we nu uitbreiden naar alle bijna-periodische functies als volgt. Beschouw een convergerende rij $f_n \rightarrow f$ volgens $\mathcal{T}$ waar elke f_n een eindige trigonometrische polynoom is (men kan bijvoorbeeld de n -de partieelsom van de fourrierreeks nemen, zie Stelling 1.3.2). In het bijzonder convergeert f_n naar f volgens $L^2[a, b]$ voor elke $a < b$, al is de convergentie mogelijks niet voor alle intervallen $[a, b]$ tegelijk, al hebben we dit niet nodig. Volgend continuïteitsargument breidt de eigenschap nu uit naar alle bijna-periodische functies.

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(t) - f(t+s)|^2 dt &\leq \int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 dt + \int_a^b |f_n(t) - f_n(t+s)|^2 dt \\ &\quad + \int_a^b |f_n(t+s) - f_n(t+s)|^2 dt \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f_n(t+s)|^2 dt + \|f - f_n\|_{L^2[a, b]}^2 \\ &\quad + \|f - f_n\|_{L^2[a+s, b+s+C]}^2 \end{aligned}$$

Kiezen we nu n zodat $\|f - f_n\|_{L^2[a, b]}$ kleiner dan $\varepsilon/4$ wordt, en vergroten we deze eventueel om ook te garanderen dat $\|f - f_n\|_{L^2[a+s, b+s+C]}$ eveneens kleiner dan $\varepsilon/4$ wordt, dan is

$$\int_a^b |f(t) - f(t+s)|^2 dt \leq \int_a^b |f_n(t) - f_n(t+s)|^2 dt + \varepsilon/2.$$

Gezien we het resultaat reeds bewezen hebben voor eindige trigonometrische polynomen, kunnen we de verzameling S nemen zodat $\int_a^b |f_n(t) - f_n(t+s)|^2 dt < \varepsilon/2$, en volstaat deze om het algemene geval te bewijzen. $\square$

Er geldt zelfs meer; analoog aan wat we in Stelling 1.2.2 nagelaten hebben te bewijzen, kan men ook hier aantonen dat S *veel elementen* bevat. Zo bezit S een positieve onderdichtheid, en bestaat er een constante zodat elk interval van die lengte nietledige doorsnede met S heeft.

De lezer ook merke op dat in het geval van de eindige trigonometrische polynomen, we bewezen hebben dat $|f(t) - f(t+s)|$ willekeurig klein kan

gemaakt worden in elke $L^2[a, b]$ -norm met begrensde lengte $b - a$. Deze eigenschap verliezen we wanneer we overgaan op bijna-periodische functies. Ingeval we echter hebben dat een functie de limiet is van eindige polynomen volgens de strengere topologie $\mathcal{T}'$ (zoals de errorterm in de expliciete formule), impliceert deze topologie wel degelijk $L^2[a, b]$ voor alle $[a, b]$ tegelijk, waardoor de eigenschap alsnog bewaard blijft.

3.2 Distributiefuncties van functies uit $\mathcal{A}$

We kunnen eveneens iets bewijzen over de verdeling van de waarden van bijna-periodische functies. We definiëren de distributiefunctie van een reëelwaardige functie als

$$\varphi^+(\xi) = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{|\{0 \leq t \leq x \mid f(t) \leq \xi\}|}{x},$$

en analoog voor $\varphi^-(\xi)$. Merk op dat deze definitie enkel de functie op $(0, \infty)$ beschouwt, wat overeenkomt met de manier van benadering van bijna-periodische functies, zoals in de definitie van de norm. Een gekend resultaat die een zekere regulariteit in de verdeling van de waarden van dergelijke functies illustreert, is het feit dat bijna-periodische functies één welgedefinieerde distributiefunctie hebben, met name $\varphi = \varphi^- = \varphi^+$. Bovendien is hij continu, behalve in een niet meer dan aftelbaar aantal uitzonderingspunten. Dit laatste is een eigenschap die in het algemeen geldt voor beide φ^+ en φ^- ; laat ξ lopen van $-\infty$ tot $+\infty$, dan lopen de waarden monotoon van 0 tot 1, dus elke discontinuïteit is een sprong van hoogte groter dan $1/n$ voor een zekere n . Echter, er kunnen maar een eindig aantal (namelijk n) sprongen zijn van hoogte groter dan $1/n$, en de verzameling sprongen zit dus in een aftelbare unie van eindige verzamelingen.

Een terugkerend thema in de studie van bijna-periodische functies is het teruggrijpen naar argumenten omtrent de goede verdeling van zekere rechte op de n -dimensionale torus. Om de Bohr-periodiciteit van functies uit $\mathcal{P}$ te bewijzen hadden we lemma 1.2.2 nodig. Om nu volgende stellingen rond distributiefuncties tot een goed einde te brengen moeten we iets meer weten over de gelijkverdeelddheid van $\mathbb{N}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \bmod 1$. Een vollediger theorie van gelijkverdeelddheid kan men vinden in [3], waaruit ik de basisideeën voor het volgende lemma en de toepassing daarvan gehaald heb. Een definitie van *uniforme verdeeldheid* van een rij $(N\alpha_1 \bmod 1, \dots, N\alpha_n \bmod 1)_{N \in \mathbb{N}}$ is de volgende. Voor elke dealkubus $A = [a, b) \subset [0, 1)^n$, waarbij $x \in A$ als en slechts als $a_i \leq x_i < b_i$, geldt dat

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\{n < N \mid n\alpha \bmod 1 \in A\}|}{N} = \prod (b_i - a_i).$$

Dit betekent dat de rij $(N\alpha_1 \bmod 1, \dots, N\alpha_n \bmod 1)_{N \in \mathbb{N}}$ dicht is in de eenheidskubus, en deze gelijkmatig opvult. De stelling van Kronecker is dat wanneer α_i linear onafhankelijk zijn over $\mathbb{Q}$, de vector $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ aanleiding geeft tot een gelijk verdeelde rij.* Voor de toepassingen die wij beogen, is linear onafhankelijkheid echter een te sterke eis. Indien we deze voorwaarde laten vallen, kunnen we nog steeds een soort *gelijk verdeeldheid* van de rij aantonen; dit ten opzichte van de verzameling V in de eenheidskubus die de rij daadwerkelijk opvult.

3.2.1 Stelling. *Zij $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ een gegeven vector. Zij $V \subset [0, 1)^n$ de sluiting van de verzameling $\{x \in [0, 1)^n \mid \exists t \in \mathbb{R} \text{ met } x = t\alpha\}$. Dan geldt voor elke deerkubus $A = [a, b)$ dat*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\{n < N \mid n\alpha \bmod 1 \in A\}|}{N} = \frac{\text{Vol}(V \cap [a, b))}{\text{Vol}(V)}.$$

Bewijs. In de statement van de stelling moet men ervoor opletten de juiste interpretatie aan het volumebegrip te geven. V zal een zekere dimensie hebben, en het volumebegrip moet in die dimensie geïnterpreteerd worden. We schrijven $\{x\}$ in plaats van de zwaardere notatie $x \bmod 1$, waarin in beide gevallen bedoeld wordt dat alle coördinaten gereduceert worden modulo 1. Merk op dat de stelling geherformuleerd kan worden tot het statement dat voor elke indicatorfunctie van een deerkubus er geldt dat

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{[a,b)}(\{j\alpha\}) = \frac{\int_V \mathbb{1}_{[a,b)}(x) dx}{\text{Vol}(V)}$$

Wegens het feit dat continue functies willekeurig goed benaderd kunnen worden met trapfuncties, is dit via een standaard continuïteitsargument equivalent aan de gelijkheid

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(\{j\alpha\}) = \frac{\int_V f(x) dx}{\text{Vol}(V)}$$

voor alle continue functies f . Gezien door klassieke (meerdere dimensionale) fourrierontwikkeling, lineaire combinaties van functies van de vorm $e^{2\pi i \langle h, x \rangle}$, $h \in \mathbb{Z}^n$ dicht zijn in de continue functies van periode 1 in elke variabele, is dit dan ook equivalent aan de gelijkheid

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{2\pi i \langle h, j\alpha \rangle} = \frac{\int_V e^{2\pi i \langle h, x \rangle} dx}{\text{Vol}(V)}$$

*Deze wordt zeer eenvoudig bewezen in [3]; door middel van hun opgebouwde theorie wordt deze Stelling zelfs gedegradieerd tot een Voorbeeld

Dit is een veralgemening van het Weyl criterium, dat we krijgen in het geval dat $V = [0, 1]^n$, of equivalent dat de α_i lineair onafhankelijk zijn over $\mathbb{Q}$. We zullen dit Weyl criterium toepassen op de rij $(j\alpha)_{j \in \mathbb{N}}$. Zij d de dimensie van de $\mathbb{Q}$ -vectorruimte, opgespannen door de α_i . Dan kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ lineair onafhankelijk zijn, en dat er rationale getallen a_{ij} bestaan zodat

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^d a_{ij} \alpha_i \quad \text{voor } j > d.$$

We zullen nu ook de verzameling V precies vastleggen. Het is duidelijk dat $V \subset \{x \in [0, 1]^n \mid x_{d+1} = \sum_i a_{i,d+1} x_i, \dots, x_n = \sum_i a_{i,n} x_i\}$. Kronecker's stelling zegt ons nu dat de projectie van de rij op de eerste d factoren uniform verdeeld is, dus in het bijzonder is $n(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ dicht in $[0, 1]^d$, wat impliceert dat $n\alpha$ dicht is in bovengedefinieerde verzameling, die bijgevolg gelijk is aan V .

Zij N het kleinste gemene veelvoud van alle noemers die in de a_{ij} voorkomen. Indien we $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ vervangen door $\frac{\alpha_1}{N}, \dots, \frac{\alpha_d}{N}$, kunnen we veronderstellen dat alle a_{ij} gehele getallen zijn. Dit verandert de verzameling V niet, en wanneer we de eerste d componenten van a en b eveneens delen door N , delen we linker- en rechterlid van de vergelijking in de stelling door N^d . Voor het rechterlid is dit evident, en voor het linkerlid volstaat het op te merken dat nu geëist wordt dat $\frac{a_i}{N} \leq x_i < \frac{b_i}{N}$, terwijl om aan de originele voorwaarde $a_i \leq x_i < b_i$ te voldoen N^d mogelijkheden bestaan; $[\frac{a_i}{N^d}, \frac{b_i}{N^d}), [\frac{a_i+1}{N^d}, \frac{b_i+1}{N^d}), \dots, [\frac{a_i+N^d-1}{N^d}, \frac{b_i+N^d-1}{N^d})$. Het is dus equivalent de stelling aan te tonen voor $\frac{\alpha_1}{N}, \dots, \frac{\alpha_d}{N}, \alpha_{d+1}, \dots, \alpha_n$ en de aangepaste dealkubus, als voor algemene α . We gaan verder met de aangepaste variant, wat wil zeggen dat we kunnen aannemen dat de a_{ij} geheel zijn.

We berekenen nu beide leden van het Weyl criterium. Het linkerlid is

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{2\pi i \langle h, n\alpha \rangle} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{e^{2\pi i \langle h, (n+1)\alpha \rangle} - 1}{e^{2\pi i \langle h, \alpha \rangle} - 1}$$

wat $\frac{1}{N}$ maal een begrensde factor is en dus naar nul gaat, tenzij

$$\begin{aligned} e^{2\pi i \langle h, \alpha \rangle} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n h_i \alpha_i &\in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^d h_i + \sum_j h_j a_{ij} \alpha_i &\in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow h_i + \sum_j h_j a_{ij} &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, d \end{aligned}$$

De laatste stap wegens de veronderstelde lineair afhankelijkheid van de $\alpha_i, i = 1, \dots, d$ in $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. In dit geval is de limiet gelijk aan 1.

Dan kunnen we de integraal als volgt uitrekenen

$$\begin{aligned} \frac{\int_V e^{2\pi i \langle h, x \rangle} dx}{\text{Vol}(V)} &= \int_{[0,1]^d} e^{2\pi i (\sum_{j=1}^d h_j x_j + \sum_{j=d+1}^n \sum_i h_i a_{ij} x_i)} dx \\ &= \int_{[0,1]^d} e^{2\pi i \sum_{j=1}^d (h_j + \sum_k h_k a_{jk}) x_j} dx \\ &= \prod_j \int_{[0,1]} e^{2\pi i (h_j + \sum_k h_k a_{jk}) x_j} dx_j \\ &= \prod_j \frac{e^{2\pi i (h_j + \sum_k h_k a_{jk})} - 1}{2\pi i (h_j + \sum_k h_k a_{jk})} = 0 \end{aligned}$$

Tenzij elke factor 1 oplevert, dat is wanneer $h_j + \sum_k h_k a_{jk} = 0$ voor elke $j = 1, \dots, d$. Dit bewijst dat aan het Weyl-criterium voldaan is en de stelling volgt. $\square$

3.2.2 Lemma. *De distributiefunctie van een bijna-periodische functie is uniek en continu voor alle ξ behalve in een mogelijks aftelbaar aantal uitzonderingspunten.*

Bewijs. Stap 1.

Bemerk dat de distributiefunctie van een continue periodische functie met periode T uniek is omdat het gelijk is aan $\frac{|\{0 \leq t \leq T \mid f(t) \leq \xi\}|}{T}$, wat een goed gedefinieerd getal is voor elke ξ .

Stap 2.

We moeten ook bewijzen dat de distributiefunctie van een functie uit $\mathcal{P}$ uniek is. Hiervoor gebruiken we voorgaande stelling. Zij $f = f_1(x) + \dots f_n(x)$ met f_i periodisch met periode T_i . Definieer $F : [0,1]^n \mapsto \mathbb{R}$ als $F(x) = f_1(T_1 x_1) + \dots + f_n(T_n x_n)$. Dan geldt dat

$$F(t(\frac{1}{T_1}, \dots, \frac{1}{T_n})) = f(t).$$

We passen de voorgaande stelling toe met $\alpha = (\frac{1}{T_1}, \dots, \frac{1}{T_n})$. Zij δ een functie van ε zodanig dat $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ wanneer $|x - y| < \delta$. Merk op dat de stelling evenzeer geldt voor $\delta\alpha$ als voor α , en we dezelfde verzameling V hebben. We tonen nu aan dat de boven- en onderlimiet in de definitie van de distributiefunctie zo dicht bij elkaar kunnen gebracht worden als we willen.

$$\varphi^+(\xi) = \overline{\lim}_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X \mathbb{1}_{\{f(x) \leq \xi\}} dt \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{f(i\delta) \leq \xi + \varepsilon\}}$$

$$\begin{aligned} &\leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{F(i\delta\alpha) \leq \xi + \varepsilon\}} \\ &\leq \frac{\int_V \mathbb{1}_{\{F(x) \leq \xi + \varepsilon\}} dx}{\text{Vol}(V)} \end{aligned}$$

Rest ons nog dat te bewijzen dat de gelijkheid

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{F(i\delta\alpha) \leq \xi + \varepsilon\}} = \frac{\int_V \mathbb{1}_{\{F(x) \leq \xi + \varepsilon\}} dx}{\text{Vol}(V)}$$

geldt. Deze geldt zoals in het vorige bewijs na een limietargumen indien geldt dat we $\mathbb{1}_{\{F(x) \leq \xi + \varepsilon\}}$ willekeurig goed kunnen approximeren door een continue functie. Hoe dit verloopt wordt expliciet gemaakt in de volgende stelling. De analoge afschattingen in de andere richting geven dat

$$\varphi^-(\xi) \geq \int_V \mathbb{1}_{\{F(x) \leq \xi - \varepsilon\}} dx,$$

waardoor $|\varphi^+(\xi) - \varphi^-(\xi)|$ willekeurig klein gemaakt kan worden na het kiezen van een geschikte ε . Dit kan omdat

$$\int_V \mathbb{1}_{\{F(x) = \xi\}} dx_1 \dots dx_n$$

maar voor een aftelbaar aantal ξ niet-nul kan zijn; wanneer dit niet-nul is is dit ook groter dan $\frac{1}{k}$ voor een zekere k , en zo kunnen er maar maximaal k waarden ξ zijn;

$$1 \geq V \geq \sum_{i=1}^n \int_V \mathbb{1}_{\{F(x) = \xi_i\}} dx \geq \frac{n}{k}.$$

Zo zijn er dus in het totaal maar een aftelbaar aantal ξ die we moeten uitsluiten.

Stap 2.

Tenslotte, zij f een bijna-periodische functie, en neem een convergerende rij $f_n \xrightarrow{\mathcal{T}} f$ met $f_n \in \mathcal{P}$. Dan geldt het volgende voor elke ε en n (na het respectievelijk vergroten of verkleinen van de verzamelingen in de definitie van φ .)

$$\begin{aligned} \varphi^+(\xi) &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{0 \leq t \leq x \mid |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\}}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{0 \leq t \leq x \mid f_n(t) < \xi + \varepsilon\}}{x} \\ \varphi^-(\xi) &\geq - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{0 \leq t \leq x \mid |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\}}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{0 \leq t \leq x \mid f_n(t) > \xi - \varepsilon\}}{x} \end{aligned}$$

De eerste termen zijn gelijk aan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \mathbb{1}_{|f_n(t) - f(t)| > \varepsilon} dt \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{|f_n(t) - f(t)|^2}{\varepsilon^2} dt = \frac{1}{\varepsilon^2} \|f - f_n\|_{\mathcal{A}^2} \rightarrow 0$$

indien ε vast is $n \rightarrow \infty$. Het verschil van de tweede termen is

$$\varphi_n(\xi + \varepsilon) - \varphi_n(\xi - \varepsilon),$$

wat naar nul nadert voor vaste n en $\varepsilon \rightarrow 0$ indien we alle discontinuïteitspunten van alle φ_n uitsluiten. Dus

$$|\varphi^+(\xi) - \varphi^-(\xi)| \leq |\varphi_n(\xi + \varepsilon) - \varphi_n(\xi - \varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon^2} \|f - f_n\|_{\mathcal{A}^2}.$$

Echter impliceert dit nog niet onmiddellijk dat dit willekeurig klein gemaakt kan worden. Het is nodig dat de *snelheid* waarmee $\varphi_n(\xi + \varepsilon) - \varphi_n(\xi - \varepsilon)$ naar nul nadert, gelijkaardig is voor grote n . Laten we dus expliciet het verschil berekenen.

$$\begin{aligned} & |\varphi_n(\xi + \varepsilon) - \varphi_m(\xi + \varepsilon)| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X \mathbb{1}_{\{f_n(t) \leq \xi + \varepsilon \& f_m(t) > \xi + \varepsilon\}} + \mathbb{1}_{\{f_m(t) \leq \xi + \varepsilon \& f_n(t) > \xi + \varepsilon\}} dt \\ &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X \mathbb{1}_{\{|f_n(t) - f_m(t)| > \delta\}} + \mathbb{1}_{\{|f_n(t) - \xi - \varepsilon| \leq \delta \& |f_m(t) - \xi - \varepsilon| \leq \delta\}} dt \\ &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X \mathbb{1}_{\{|f_n(t) - f_m(t)| > \delta\}} + \mathbb{1}_{\{|f(t) - \xi - \varepsilon| \leq 2\delta\}} + \mathbb{1}_{\{|f_n(t) - f(t)| > \delta\}} dt \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \|f_m - f_n\|_{\mathcal{A}^2} + \frac{1}{\delta^2} \|f - f_n\|_{\mathcal{A}^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X \mathbb{1}_{\{|f(t) - \xi| \leq 3\delta\}} dt \end{aligned}$$

indien $\varepsilon < \delta$. Dit alles samenvoegend verkrijgen we

$$\begin{aligned} |\varphi^+(\xi) - \varphi^-(\xi)| &\leq |\varphi_m(\xi + \varepsilon) - \varphi_m(\xi - \varepsilon)| + 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X \mathbb{1}_{\{|f(t) - \xi| \leq 3\delta\}} dt \\ &\quad + \frac{2}{\delta^2} \|f_m - f_n\|_{\mathcal{A}^2} + \frac{3}{\varepsilon^2} \|f - f_n\|_{\mathcal{A}^2} \end{aligned}$$

Merk op dat $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X \mathbb{1}_{\{f(t) = \xi\}} dt$ slechts voor een aftelbaar aantal ξ niet nul kan zijn. Immers, voor elke ξ waarvoor dit groter van nul is, is dit dus groter dan $1/k$ voor een zekere k . Voor elke k kunnen er zo maximaal k ξ_i zijn;

$$n/k \leq \sum_{i=1}^n \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X \mathbb{1}_{\{f(t) = \xi_i\}} dt \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X dt \leq 1.$$

Dergelijke ξ sluiten we dus uit. In dat geval kunnen we δ klein genoeg maken om de term

$$2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X \mathbb{1}_{\{|f(t) - \xi| \leq 3\delta\}} dt$$

willekeurig klein te maken. Vervolgens kiezen we m en n zo groot dat $\frac{2}{\delta^2} \|f_m - f_n\|$ willekeurig klein wordt. Vervolgens kiezen we ε (kleiner dan

δ) klein genoeg om $|\varphi_m(\xi + \varepsilon) - \varphi_m(\xi - \varepsilon)|$ willekeurig klein te krijgen, om tenslotte n groot genoeg te kiezen om $\frac{3}{\varepsilon^2} \|f - f_n\|_{\mathcal{A}^2}$ klein genoeg te krijgen. Dit toont aan dat $|\varphi^+(\xi) - \varphi^-(\xi)|$ op een aftelbaar aantal ξ na klein genoeg kan gemaakt worden, i.e. $\varphi^+(\xi) = \varphi^-(\xi)$ $\square$

Bovenop deze ietwat vage notie van regulariteit kunnen we echter een meer precieze beschrijving geven van hoe de functie boven en onder een bepaalde waarde ξ duikt, en dit in de taal van de bijna-periodische functies.

3.2.3 Stelling. *Zij f een bijna-periodische functie, dan geldt voor alle ξ behalve een aftelbaar aantal dat $\mathbb{1}_{\{f(t) \leq \xi\}}$ bijna-periodisch is.*

Bewijs. Beschouw $\mathbb{1}_{\{f_n(t) \leq \xi\}}$. Voor periodische f_n is dit wederom periodisch, vandaar het idee om dit uit te breiden tot bijna-periodische functies. Laat $f_n \xrightarrow{\mathcal{T}} f$ en laat ξ een continuïteitspunt van φ_f zijn. We bewijzen dat in dat geval $\mathbb{1}_{\{f_n(t) \leq \xi\}} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbb{1}_{\{f(t) \leq \xi\}}$. Wat betreft de $\mathcal{A}^2$ -convergentie van de $\mathbb{1}_{\{f_n(t) \leq \xi\}}$ gebruiken we het feit dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{0 \leq t \leq x \mid |f(t) - \xi| \leq \varepsilon\}}{x} = \varphi(\xi + \varepsilon) - \varphi(\xi - \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ als } \varepsilon \rightarrow 0$$

Daaruit volgt dan dat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\mathbb{1}_{\{f_n(t) \leq \xi\}} - \mathbb{1}_{\{f(t) \leq \xi\}}|^2 dt \\ \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \mathbb{1}_{\{|f(t) - \xi| \leq \varepsilon\}} + \mathbb{1}_{\{|f(t) - f_n(t)| > \varepsilon\}} dt \\ \leq \varphi(\xi + \varepsilon) - \varphi(\xi - \varepsilon) + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{|f(t) - f_n(t)|^2}{\varepsilon^2} dt \end{aligned}$$

De eerste twee termen kunnen willekeurig klein gemaakt worden door ε klein genoeg te kiezen, en voor die vaste ε kan de tweede term willekeurig klein gemaakt worden door n groot genoeg te kiezen (door de $\mathcal{A}^2$ -convergentie). Wat betreft de $\mathbf{L}^2[a, b]$ -convergentie hebben we nood aan het begrip van een lokale distributiefunctie;

$$\varphi_{[a,b]}(\xi) := \frac{|\{t \in [a, b] \mid f(t) \leq \xi\}|}{b - a}.$$

Deze functies zijn goed gedefinieerd en zoals in het algemeen ook continu, op mogelijks een aftelbare set van sprongen na. Zij A de unie van alle discontinuïteiten van alle $\varphi_{[r,s]}$ waar $r, s \in \mathbb{Q}$. Dan is A nog steeds aftelbaar, en voor alle $\xi \notin A$ geldt dat

$$\int_a^b |\mathbb{1}_{f(t) \leq \xi} - \mathbb{1}_{f_n(t) \leq \xi}|^2 dt \leq \int_r^s |\mathbb{1}_{f(t) \leq \xi} - \mathbb{1}_{f_n(t) \leq \xi}|^2 dt + |b - s| + |a - r|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_r^s \mathbb{1}_{\{|f(t)-\xi|\leq \varepsilon\}} + \mathbb{1}_{\{|f(t)-f_n(t)|>\varepsilon\}} dt + |b-s| + |a-r| \\
&\leq \varphi_{[r,s]}(\xi + \varepsilon) - \varphi_{[r,s]}(\xi - \varepsilon) \\
&\quad + \int_r^s \frac{|f(t) - f_n(t)|^2}{\varepsilon^2} dt + |b-s| + |a-r|
\end{aligned}$$

Nu kiezen we eerst voor een vast interval $[a, b]$ een voldoende dichtbij rationaal interval $[r, s]$, vervolgens kiezen we ε klein genoeg en tenslotte n groot genoeg (waar de laatste stap werkt als gevolg van de $L^2[a, b]$ -convergentie van de f_n).

Daarmee hebben we bewezen dat

$$\mathbb{1}_{\{f_n(t) \leq \xi\}} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbb{1}_{\{f(t) \leq \xi\}}$$

en is dus het bewijs rond, behalve dan dat de approximerende rij indicatorfuncties niet lid van $\mathcal{P}$ zijn, omdat ze niet continu zijn, en ook niet op een voordehandliggende manier de som van periodische functies zijn. Dit laatste is het grootste struikelblok; inderdaad, zelfs na *smoothing* liggen bovenstaande indicatorfuncties in het algemeen niet in $\mathcal{P}$. Echter zijn ze wel lid van $\mathcal{A}$, dus het argument is nog steeds geldig aangezien $\mathcal{A}$ een gesloten ruimte is. Om dit aan te tonen construeren we een rij van functies uit $\mathcal{P}$ die de benodigde indicatorfuncties (namelijk $\mathbb{1}_{\{f(t) \leq \xi\}}$ waar $f \in \mathcal{P}$) wel degelijk approximeren. Zij $f = \sum^n f_i$, met f_i periodisch en continu. We tonen eerst de constructie in het geval $n = 2$. We zullen approximaties geven in 4 stappen, wat werkt gezien het feit dat $\mathcal{A}$ gesloten is. Merk op dat we zonder problemen kunnen aannemen dat het infimum van beide f_1 en f_2 nul is. In een eerste stap approximeren we als volgt

$$\mathbb{1}_{\{f(t) \leq \xi\}} \sim \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{\frac{k}{n}\xi \leq f_1(t) \leq \frac{k+1}{n}\xi\}} \mathbb{1}_{\{f_2(t) \leq \frac{n-k-1}{n}\xi\}}$$

Er is gelijkheid in de meeste punten; de enige manier waarop het kan mislopen is dat rechts 1 staat en links 0, maar t waarvoor dit zo is voldoen aan $|f(t) - \xi| \leq \frac{\xi}{n}$. Dergelijke punten zijn inderdaad exceptioneel aangezien eerder aangetoond werd dat $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbb{1}_{\{|f(t)-\xi| \leq \varepsilon\}}\| = 0$ in $L^2[a, b]$ en $\mathcal{A}^2$, behalve voor een aftelbaar aantal ξ , die we reeds hebben uitgesloten hierboven. Bijgevolg approximeert het rechterlid het linkerlid zo goed als we willen, en dit in alle normen.

Nu tonen we aan dat een periodische indicatorfunctie geapproximeerd kan worden door een continue variant van de functie. Dit kan gemakkelijk expliciet uitgewerkt worden. Wanneer een indicatorfunctie nul is in t , geldt dat $f(t) > \xi$. Door de continuïteit van f is er een omgeving van t waar dit eveneens het geval is. Een discontinuïteitspunt heeft dus altijd waarde 1.

Indien er een eenzijdige omgeving is van dit punt waar de functie constant waarde 1 heeft, dan kunnen we de functie glad maken door een continue overgang die minder dan ε in L^2 -norm afwijkt. Indien geen eenzijdige omgeving bestaat rond dit punt dan veranderen we de waarde naar 0. Dit is in orde aangezien een dergelijk punt overeenkomt met een punt t waar $f(t) = \xi$, aangezien $f(t) < \xi$ zou impliceren dat een omgeving van dit punt ook waarde 1 heeft. De verzameling $f^{-1}(\xi)$ heeft echter zoals hierboven opgemerkt maat nul, aangezien het aftelbaar aantal ξ waarvoor dit niet waar is reeds uitgesloten is. Indien we dit doen in een interval $[0, T_i]$ en periodisch uitbreiden, verkrijgen we dus een continue periodische functie $g_i(t)$, die naar de indicatorfunctie nadert met elke vooropgegeven precisie in elke $L^2[a, b]$ en $\mathcal{A}^2$ -norm.

Tenslotte, het product van twee periodische functies in het algemeen zit in $\mathcal{A}$. Beschouw immers de klassieke fourrierreeks $g_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{ik} e^{\frac{2k\pi i}{T_i} t}$. Kies nu R zo groot dat $\sum_{|k| > R} a_{ik} e^{\frac{2k\pi i}{T_i} t}$ kleiner is dan ε , in elke $L^2[a, b]$ en $\mathcal{A}^2$ -norm. Dan wordt het product geapproximeerd als

$$g_i(t)g_j(t) \sim \left(\sum_{|k| \leq R} a_{ik} e^{\frac{2k\pi i}{T_i} t} \right) \left(\sum_{|k| \leq R} a_{jk} e^{\frac{2k\pi i}{T_j} t} \right)$$

met fout kleiner dan

$$\varepsilon \left(\sum_{|k| \leq R} a_{ik} e^{\frac{2k\pi i}{T_i} t} \right) + \left(\sum_{|k| \leq R} a_{jk} e^{\frac{2k\pi i}{T_j} t} \right) + \varepsilon^2 \leq \varepsilon(\max(f_1) + \max(f_2)) + 3\varepsilon^2$$

Dit illustreert hoe men aantoonst dat $\mathbb{1}_{\{f(t) \leq \xi\}} \in \mathcal{A}$ indien $n = 2$. Voor algemene n volgt het resultaat perfect analoog als voor $n = 2$, door te approximeren als

$$\mathbb{1}_{\{f(t) \leq \xi\}} \sim \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{\frac{k}{n}\xi \leq f_1(t) \leq \frac{k+1}{n}\xi\}} \mathbb{1}_{\{f(t) - f_1(t) \leq \frac{n-k-1}{n}\xi\}}$$

en de tweede factoren op dezelfde wijze uit te schrijven, waarna een som van producten van n periodische indicatorfuncties overblijft. Vanaf daar werkt het argument precies hetzelfde, aangezien het product van een eindig aantal periodische functies in $\mathcal{A}$ zit, door truncatie van de fourrierreeks zoals hierboven. $\square$

De lezer merke op dat dit het eerste resultaat impliceert. Bijna-periodische functies zijn per definitie lid van $\mathcal{A}$, en hebben dus een norm, die in dit geval juist overeenkomt met de limiet in de definitie van de distributiefunctie.

3.2.4 Gevolg. $\mathbb{1}_{\{\psi(e^x) \leq e^x + \xi e^{x/2} - e^{x/2} \log(1 - e^{-2x})\}}$ is bijna-periodisch voor alle ξ op een aftelbaar aantal na.

Hoofdstuk 4

Toepassingen met betrekking tot de verdeling van de priemgetallen

4.1 Inleiding

We zullen nu onze kennis over bijna-periodische functies koppelen met enkele bekende feiten van de Riemann-zeta functie en de Dirichlet L-functies om inzicht te verwerven in de verdeling van de priemgetallen. In dit gehele hoofdstuk volgen we de methode van Schlage-Puchta in [6], waar hij het basisgeval $K = \mathbb{Q}$ behandelt.

Zij K een abelse Galoisuitbreiding van $\mathbb{Q}$ van graad n . De norm $N\mathfrak{a}$ van een ideaal $\mathfrak{a}$ van de ring van algebraïsch gehelen $\mathcal{O}_K$ is gedefinieerd als de index $[\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}]$. We definiëren nu de Dedekind-zeta functie van een algebraïsche uitbreiding K van $\mathbb{Q}$, generalisatie van de Riemann-zeta functie die in het geval $K = \mathbb{Q}$ terugkeert, als

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{(N\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - (N\mathfrak{p})^{-s}},$$

waar de eerste som loopt over alle idealen in de ring van algebraïsch gehelen $\mathcal{O}_K$ behalve (0) , (1) , en het product loopt over alle priemidealen. Gelijkheid volgt op geheel dezelfde wijze als voor de Riemann-zeta functie, aangezien de norm multiplicatief is, en unieke factorisatie in priemidealen geldt in de ring van gehelen. Deze formules convergeren voor $\operatorname{Re}(s) > 1$.

4.2 Het splitsen van priemenvelduitbreidingen

Om deze functie te gebruiken voor arithmetische doelen, is het nuttig om te weten welke soort priemgetallen op welke manier toedragen tot deze functie. We herhalen enkele feiten rond het splitsen van priemenvelduitbreidingen. Omdat elk priem ideaal $\mathfrak{p}$ van K boven een rationaal priemgetal $p\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cap \mathfrak{p}$ ligt, worden alle priemidealen van $\mathcal{O}_K$ geleverd door de factorisaties van de rationale priemenveld

$$p\mathbb{Z} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_k^{e_k}$$

Dit impliceert dat

$$p^n = [\mathcal{O}_K : \mathfrak{p}] = [\mathcal{O}_K : \mathfrak{p}_1]^{e_1} \dots [\mathcal{O}_K : \mathfrak{p}_k]^{e_k}$$

Aangezien K Galois is, en G transitief werkt op de p_i , zien we dat alle exponenten e_i gelijk moeten zijn, en ook dat $N\mathfrak{p}_i = [\mathcal{O}_K : \mathfrak{p}_i] = [\mathcal{O}_K : \mathfrak{p}_j] = N\mathfrak{p}_j = p^f$. Dit alles impliceert dat

$$p^n = p^{kfe},$$

zodat de norm van $\mathfrak{p}$ sowieso van de vorm p^f is met $f|n$. Het fenomeen dat $e \neq 1$ is, is zeldzaam, en kan in feite maar voorkomen bij een eindig aantal priemenveld. We noemen dergelijke priemenveld *ramificerende* priemenveld, en noteren deze verzameling als R . Dus op dit eindig aantal uitzonderingspriemenveld na, komen de priemidealen van K voor in tuples $(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k)$, banen onder G werkend op de priemidealen, met $p\mathbb{Z} = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_k$ and $N\mathfrak{p}_i = p^{n/k}$. Zij S_k de verzameling rationale priemenveld die in k priemenveld factoriseren, dan kunnen we de Dedekind-zeta functie als volgt ontbinden.

$$\zeta_K(s) = \prod_{p \in R} \frac{1}{1 - (N\mathfrak{p})^{-s}} \prod_{k|n} \left(\prod_{p \in S_k} \frac{1}{1 - p^{-\frac{n}{k}s}} \right)^k \quad (4.1)$$

Dit toont dat in zekere zin de priemenveld uit S_n , diegenen die *totaal splitsen*, i.e. $n = k$ het grootste gedeelte uitmaken; dit is de enige factor die voor $s \rightarrow 1$ voor een pool zorgt. Deze observatie doet de vraag naar de dichtheid van de totaal splitsende priemenveld rijzen. Een implicatie van Chebotarev's beroemde stelling is dat deze dichtheid bestaat, en gelijk is aan $\frac{1}{n}$ van alle priemenveld. In deze context willen we echter iets bewijzen rond de *irregulariteit* van de verdeling van de totaal splitsende priemenveld; geen begrenzungen op errortermen, maar ondergrenzen op de oscillaties. Dat is wat Stelling 4.4.2, het hoofdresultaat van dit hoofdstuk in zekere zin verwezenlijkt. Eerst hebben we nood aan meer analytische gegevens van de Dedekind-zeta functie.

4.3 De Dedekind-zeta functie en de functie $\psi_K(x)$

Wat betreft de analytische kant van de Dedekind-zeta functies hebben we de volgende stelling, waarvan men het bewijs bijvoorbeeld in J. Neukirch's boek [5] kan terugvinden.

4.3.1 Stelling. *De Dedekind zeta functie van een galoisuitbreiding $K|\mathbb{Q}$ factoriseert als product van de L-functies geassocieerd aan alle irreduciebele representaties van G (in complexe eindigdimensionale vectorruimtes).*

Mogelijkse meerdimensionale representaties worden geassocieerd met hun zogenaamde Artin L-functies. waarover momenteel nog erg weinig bekend is. Zo is het een belangrijke open vraag die luistert naar de naam *Artin conjecture* of deze functies een analytische uitbreiding bezitten. We gaan op deze L-functies echter niet verder in aangezien - of vandaar dat - we ons gelimiteerd hebben tot abelse uitbreidingen.

4.3.2 Gevolg. *De Dedekind zeta functie van een abelse galoisuitbreiding $K|\mathbb{Q}$ factoriseert als product*

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) \prod_{\chi \in \hat{G}} L(s, \chi)$$

Bewijs. Representaties van een abelse groep zijn altijd reducibel tenzij ze reeds eendimensionaal zijn. Een eendimensionale representatie is niets anders dan een karakter. $\square$

Analoog aan wat we met de Riemann-zeta en de L-functies gedaan hebben, beschouwen we nu een ψ -functie waarmee we de priemenvan K zullen bestuderen. We tonen eveneens een expliciete formule voor deze functie.

4.3.3 Stelling. *Zij*

$$\psi_K(x) = \sum_{\substack{p \in R \\ N\mathfrak{p}^m < x}} \log(N\mathfrak{p}) + n \sum_{k|n} \sum_{p \in S_k} \sum_{p^{\frac{n}{k}m} < x} \log(p)$$

Dan geldt voor alle $x > 1$ dat

$$\psi_K(x) = x - \sum_{i=1}^n \sum_{L_i(\rho)=0} \frac{x^\rho}{\rho} + |G| \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) + O(|G|(1 + \log x)).$$

Bewijs. We nemen min de logaritmische afgeleide van

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) \prod_{\chi \in \hat{G}} L(s, \chi),$$

waarna we deze zoals in Stelling 2.2.1 met x^s vermenigvuldigen en integreren op volgende wijze.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'_K(s)}{\zeta_K(s)} x^s \frac{ds}{s}$$

Daar de logaritmische afgeleide van $\zeta_K(s)$ gelijk is aan de som $\log(\zeta(s))' + \sum_{\chi} \log(L(s, \chi))'$, is deze integraal gelijk aan de som van de integralen van $\zeta(s)$ en de $L(s, \chi)$. Vullen we voor hen de bewezen expliciete formules in, dan krijgen we dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\zeta'_K(s)}{\zeta_K(s)} x^s \frac{ds}{s} = x + \sum_{\chi} \sum_{L_{\chi}(\rho)=0} \frac{x^{\rho}}{\rho} + |G| \frac{1}{2} \log(1-x^{-2}) + O(|G|(1+\log x))$$

waar onderverstaan wordt dat de som over de wortels van de Riemann-zeta overeenkomt met $\chi = 1$.

Langs de andere kant kunnen we dit via de product formule in de vorm 4.1 ook expliciet maken. Inderdaad,

$$-\log(\zeta_K(s)) = \sum_{p \in R} \log(1 - Np^{-s}) + \sum_{k|n} k \sum_{p \in S_k} \log(1 - p^{-\frac{n}{k}s}),$$

afgeleid geeft dit

$$\sum_{p \in R} \frac{\log(Np) Np^{-s}}{1 - Np^{-s}} + \sum_{k|n} k \sum_{p \in S_k} \frac{\frac{n}{k} \log(p) p^{-\frac{n}{k}s}}{1 - p^{-\frac{n}{k}s}} = \sum_{\substack{p \in R \\ m \geq 1}} \frac{\log(Np)}{Np^{-ms}} + n \sum_{k|n} \sum_{\substack{p \in S_k \\ m \geq 1}} \frac{\log(p)}{p^{-\frac{n}{k}ms}},$$

en na zoals in Stelling 2.2.1 te integreren verkrijgt men de functie

$$\sum_{\substack{p \in R \\ Np^m < x}} \log(Np) + n \sum_{k|n} \sum_{\substack{p \in S_k \\ p^{\frac{n}{k}m} < x}} \log(p),$$

en dit is juist de functie gedefinieerd in de opgave. $\square$

Merk nu op dat $\sum_{p^{\frac{n}{k}m} < x} \log(p) \sim \frac{k}{n} \sum_{p^m < x} \log(p)$, waaruit volgt dat

$$\psi_K(x) \sim \sum_{\substack{p \in R \\ p^m < x}} \log(Np) + n \sum_{\substack{p \in S_n \\ p^m \leq x}} \log(p) + \frac{n}{d_1} \sum_{\substack{p \in S_{n/d_1} \\ p^m \leq x}} \log(p) + \dots + \sum_{\substack{p \in S_1 \\ p^m \leq x}} \log(p)$$

Dit geeft beter weer op welke wijze welk type splitsende priemenvoorwaarden toedragen. Men ziet dat de totaal splitsende priemenvoorwaarden het grootste gedeelte toedragen; n keer hun normale bijdrage (in $\psi(x)$), en de andere types splitsing dragen maar een factor $\frac{n}{k}$ toe van wat ze in de gewone $\psi(x)$ toedragen.

4.4 Oscillaties in de verdeling van de priemgetallen

We zullen nu bewijzen dat $\psi_K(x)$ grote oscillaties bezit, concreet dat $\psi_K(x) = x + \Omega_{\pm}(\sqrt{x} \log_3(x))$. We hebben volgend welbekend lemma nodig over het gedrag van een reeks $\sum_{L_{\chi}(\rho)=0} \frac{x^{\rho}}{\rho}$ nabij 1.

4.4.1 Lemma. *Zij χ een karakter (mod q), en definieer $g_{\chi}(y) = \sum_{\rho} \frac{e^{iy\rho}}{\rho}$.*

$$g_{\chi}(y) + g_{\chi}(-y) = O(1)$$

als $y \rightarrow 1$.

Bewijs. Indien χ reëel is, komen alle wortels in complex toegevoegde paren voor, aangezien $L(s, \chi) = L(\bar{s}, \chi)$. De bijdrage van een dergelijk paar is

$$\frac{e^{iy\rho} + e^{-iy\rho}}{\rho} + \frac{e^{-iy\rho} + e^{iy\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{e^{-iy\rho} + e^{iy\rho}}{|\rho|^2}$$

Dus volgt er dat

$$|g_{\chi}(y) + g_{\chi}(-y)| \leq 2 \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^2},$$

wat het gevraagde aantoont aangezien $\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^2}$ convergeert. Dit volgt gemakkelijk zoals in Lemma 2.4.4 uit de dichtheid van de wortels;

$$\begin{aligned} \sum_{|\rho| < T} \frac{1}{|\rho|^2} &\leq \sum_{n=1}^T \frac{N(n+1) - N(n)}{n^2} \\ &\leq K \sum_{n=1}^T \frac{\log(n)}{n^2} \\ &\leq K \left(\int_1^T \frac{\log(t)}{t^2} dt \right) \\ &\leq K \left(-\frac{\log(T)}{T} + \int_1^T \frac{1}{t^2} dt \right) = O(1) \end{aligned}$$

Indien χ complex is komen de wortels niet langer in complex toegevoegde paren voor, maar uit Stelling 2.4.2 volgt wel onmiddellijk dat

$$|\rho_n - \rho_{-n}| = O(1),$$

wanneer we met ρ_n de n -de wortel met positief imaginair deel noteren en vice versa voor ρ_{-n} . Dan geldt

$$\frac{e^{i\gamma_n y} + e^{-i\gamma_n y}}{\rho_n} + \frac{e^{i\gamma_{-n} y} + e^{-i\gamma_{-n} y}}{\rho_{-n}} = (e^{i\gamma_n y} + e^{-i\gamma_n y}) \frac{1}{|\rho_n|^2} - (e^{i\gamma_n y} + e^{-i\gamma_n y}) \frac{1}{\bar{\rho}_n}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^{i\gamma_{-n}y} + e^{i\gamma_{-n}y}}{\rho_{-n}} \\
& = (e^{i\gamma_n y} + e^{-i\gamma_n y}) \frac{1}{|\rho_n|^2} - (e^{i\gamma_n y} + e^{-i\gamma_n y}) \left(\frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_{-n}} \right) \\
& \quad + ((e^{i\gamma_{-n}y} + e^{i\gamma_{-n}y}) - (e^{i\gamma_n y} + e^{-i\gamma_n y})) \frac{1}{\rho_{-n}} \\
& \leq \frac{2}{|\rho|^2} - \frac{2|\rho_{-n} + \rho_n - 1|}{\bar{\rho}_n \rho_{-n}} + \frac{1}{\rho_{-n}} O(y)
\end{aligned}$$

Aangezien y klein verondersteld wordt en

$$|e^{-i\gamma_{-n}y} - e^{i\gamma_n y}| = |e^{-i(\gamma_{-n} + \gamma_n)y} - 1| \leq \min((\gamma_{-n} + \gamma_n)y, 2) = O(\min(1, y)).$$

De eerste term zal na sommatie slechts een constante toedragen, en dit geldt ook voor de tweede term; na invulling van $\rho_{-n} = -\rho_n + O(1)$ krijgen we dat

$$-\frac{2|\rho_{-n} + \rho_n - 1|}{\bar{\rho}_n \rho_{-n}} = \frac{C}{|\rho_n|^2 + c\rho_n},$$

waar men zoals hierboven voor $\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^2}$ gemakkelijk kan bewijzen dat de sommatie hierover convergeert.

Dit is echter niet waar voor de reeks $\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|}$, die divergeert. Zoals in Lemma 2.4.4 kunnen we de term $\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|}$ afschatten gebruik makende van de dichtheid van de wortels

$$\begin{aligned}
\sum_{|\rho| < T} \frac{1}{|\rho|} & \leq \sum_{n=1}^T \frac{N(n+1) - N(n)}{n} \\
& \leq K \sum_{n=1}^T \frac{\log(n)}{n} \\
& \leq K \left(\int_1^T \frac{\log(t)}{t} dt \right) \\
& \leq K \left(\int_1^T \log(t) d(\log(t)) \right) \\
& \leq K \left(\frac{\log^2(T)}{2} \right)
\end{aligned}$$

Nu gebruiken we de volgende bekende grens voor truncatie van de error-term in de expliciete formule voor x dicht bij 1 (zie Stelling 2.2.1)

$$\left| \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \sum_{\rho \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho} \right| \leq C \frac{\log^2(T)}{T} \frac{1}{\log^2(x)}$$

Hieruit kunnen we tenslotte besluiten dat, kiezende $T = \frac{1}{y^3}$

$$\begin{aligned} g(y) + g(-y) &\leq 4 \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^2} + \sum_{|\rho| < T} \frac{y}{|\rho|} + 2C \frac{\log^2(T)}{T} \frac{1}{y^2} \\ &\leq O(1) + \frac{K}{2} y \log^2(T) + 2C \frac{\log^2(T)}{T} \frac{1}{y^2} \\ &= O(1 + y \log^2(\frac{1}{y^3})) = O(1) \end{aligned}$$

Aangezien $9y \log^2(y) \rightarrow 0$ voor $y \rightarrow 0$.

□

We kunnen nu het hoofdresultaat bewijzen. Kort gezegd is dit dat $\psi_K(x) = x + \Omega_{\pm}(\sqrt{x} \log_3(x))$. Littlewood bewees in 1914 reeds dat $\psi(x) = x + \Omega_{\pm}(\sqrt{x} \log_3(x))$, maar dit was een zuiver theoretisch resultaat, volgend uit existentiële stellingen binnen de complexe analyse. Het voordeel aan de methode van bijna-periodes, is dat alle geïmpliceerde constanten expliciet kunnen berekend worden, i.e. de stelling is *effectief*.

4.4.2 Stelling. Zij $K|\mathbb{Q}$ een velduitbreiding van graad n met Galoisgroep G . Laat $\varepsilon > 0$. Definieer

$$\Delta_K(x) = \frac{\psi_K(x) - x}{\sqrt{x}}.$$

Neem de Riemann Hypothese aan voor elke voorkomende L-functie. Dan bestaan er effectief berekenbare constanten $X_0(n, \varepsilon)$ en $C(n)$ zodat voor alle $X > X_0$ er getallen $2 < x_+, x_- < X$ zijn zodat

- $\Delta_K(x_+) > |G|(\frac{1}{2} - \varepsilon) \log_3(X)$
- $\Delta_K(x_-) < -|G|(\frac{1}{2} - \varepsilon) \log_3(X)$
- $x_- < x_+ < x_-(1 + \frac{1}{\log_2^{1-\varepsilon} X})$

Bewijs. Beschouw de expliciete formule

$$\psi_K(x) = x - \sum_{i=1}^n \sum_{L_i(\rho)=0} \frac{x^{\rho}}{\rho} + |G| \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) + O(|G|(1 + \log(x))).$$

Het is duidelijk dat, om grote oscillaties van $\Delta_K(x)$ te vinden, men de aandacht moet toespitsen om de term $\sum_{i=1}^n \sum_{L_i(\rho)=0} \frac{x^{\rho}}{\rho}$. Allereerst herleiden we dit probleem dus naar een probleem over de reeks $g(y) = \sum_{i=1}^n \sum_{L_i(\rho)=0} \frac{e^{iy\gamma}}{\rho}$,

waarop we onze opgebouwde theorie over bijna-periodische functie kunnen toepassen. Dit kan omdat de term $\log(1 - x^{-2})$ zeer klein en de term $\log(x)$ eveneens verwaarloosbaar is.

We zullen het volgende bewijzen over $g(y)$: Voor elke $Y > Y_0(\varepsilon)$ zijn er getallen $2 < y_+, y_- < Y$ met de volgende eigenschappen.

- $g(y_+) > |G|(\frac{1}{2} - \varepsilon) \log_2(Y)$
- $g(y_-) < -|G|(\frac{1}{2} - \varepsilon) \log_2(Y)$
- $y_- < y_+ < y_- + \frac{1}{\log^{1-\varepsilon} Y}$

Hieruit kunnen we het originele resultaat terughalen omdat de $\sqrt{x}$ term de $O(\log(x))$ term domineert. Neem $X_0 = e^{Y_0}$. Bij gegeven X passen we bovenstaand resultaat toe op $\log(X) = Y$. Definieer $x_{\pm} = e^{y_{\pm}}$. Dan is

$$\begin{aligned} \Delta_K(x_+) &= g(\log(x_+)) + O\left(\frac{\log(x_+)}{\sqrt{x_+}}\right) > |G|\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \log_2(Y) + O\left(|G|\frac{\log(x_+)}{\sqrt{x_+}}\right) \\ &\geq |G|\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \log_3(X) + O\left(\frac{|G|\log(x_+)}{\sqrt{x_+}}\right) \end{aligned}$$

Rest ons te tonen dat x_+ onbegrensd groeit in functie van X ; dan wordt $O(\frac{\log(x_+)}{\sqrt{x_+}})$ zo klein als je wil, en is vanaf voldoende grote X

$$\Delta_K(x_+) \geq |G|\left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right) \log_3(X).$$

Inderdaad, de triviale afschatting $g(y) = O(|G|y^2)$ betekent dat $y_+ \geq c\sqrt{\log_2(Y)}$, waaruit volgt dat y_+ , en dus ook x_+ , onbegrensd groeien. De ongelijkheid in de andere richting bewijst men analoog. Voor het derde item volgt uit $y_- < y_+$ direct dat $x_- < x_+$, en uit $y_+ < y_- + \frac{1}{\log^{1-\varepsilon} Y}$ volgt dat

$$x_+ - x_- \leq e^{y_+} - e^{y_-} \leq e^{y_-} (e^{\log^{-1+\varepsilon} Y} - 1) \leq x_- \log^{-1+\varepsilon} Y = x_- \log_2^{-1+\varepsilon} X$$

Waar we de gekende ongelijkheid $e^x - 1 > x$ voor positieve x gebruiken.

Onze taktiek om de grootte van oscillaties van g aan te tonen bestaat nu uit 4 stappen.

- (i) Uit de expliciete formule halen we dat $g(y)$ zeer groot wordt voor y zeer klein en positief. Uit Lemma 4.4.1 volgt dat $g(y)$ negatief zeer groot wordt voor y negatief en zeer dicht bij nul.

- (ii) Uit Lemma 2.4.4 en een begrenzing op de dichtheid van de wortels, halen we dat $g_N(y)$ voor gepaste N ongeveer dezelfde grootteorde bezit als $g(y)$.
- (iii) Gezien we nu met een eindige trigonometrische polynoom zitten, gebruiken we Stelling 1.2.2 om een bijna-periode s te vinden zodat $g_N(y + s)$ ongeveer dezelfde grootteorde bezit als $g_N(y)$.
- (iv) We gebruiken terug Lemma 2.4.4 om te besluiten dat $g(y + s)$ dezelfde grootteorde bezit als $g_N(y + s)$.

Dit zal impliceren dat rechts van s de functie g zo groot wordt als we willen, en dat links van s g zo klein wordt als we willen. Van vitaal belang voor de precieze vorm van de functie $(\frac{1}{2} - \varepsilon) \log_2(x)$ zijn de afschattingen die specifiek voor $g(x)$ bewezen werden. Inderdaad, voor een algemene bijna-periodische functie f die links en rechts van 0 zeer groot respectievelijk negatief zeer groot wordt, kunnen we dezelfde algemene procedure kan volgen, met in de plaats van de specifieke lemmata gewoon de Bohr-periodiciteit. Op dergelijke manier is het mogelijk te verkrijgen dat er willekeurig grote y zijn waarvoor $g(y) > \omega(y)$ geldt, en dat er willekeurig grote y zijn waarvoor $g(y) < -\omega(y)$ geldt, maar kunnen we geen enkele afschatting op $\omega(x)$ geven, behalve dan dat $\omega(x) \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow \infty$. Om dit concreter te maken tot $\omega(x) = |G|(\frac{1}{2} - \varepsilon) \log_2(x)$ zijn heel wat lemmata benodigd, maar in essentie hebben we telkens enkel de afschatting op de dichtheid van de wortels gebruikt. We zullen ook trachten duidelijk te maken waarom $\log_2(x)$ de best mogelijke afschatting is met deze methoden.

Stap 1.

Beschouw de expliciete formule, waar we de substitutie $x = e^y$ doorgevoerd hebben.

$$\psi_K(e^y) = e^y + e^{y/2} \sum_i \sum \frac{e^{i\gamma y}}{\rho} + \frac{|G|}{2} \log(1 - e^{-2y}) + O(|G|(1 + y))$$

Aangezien deze formule geldig is voor alle $y > 0$, en enkel $e^{y/2}g(y)$ en $\frac{|G|}{2} \log(1 - e^{-2y})$ niet begrensd zijn, geldt

$$\begin{aligned} g(y) &\geq \frac{|G|e^{-y/2}}{2} \log(1 - e^{-2y}) + O(1) \\ &\geq \frac{|G|}{2} \log(1 - e^{-2y}) + |G| \frac{e^{-y/2} - 1}{2} \log(1 - e^{-2y}) + O(1) \\ &\geq \frac{|G|}{2} \log\left(\frac{1}{y}\right) + O(1) \end{aligned}$$

Aangezien

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow 0} (e^{-y/2} - 1) \log(1 - e^{-2y}) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1 - e^{-2y})}{\frac{1}{e^{-y/2} - 1}} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-(e^{-y/2} - 1)^2}{1 - e^{-2y}} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2(e^{-y/2} - 1) \frac{-y}{2} e^{-y/2}}{2ye^{-2y}} = 0
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat voor elke ε

$$g(y) \geq |G| \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \log\left(\frac{1}{y}\right)$$

geldt indien y klein genoeg is. Uit Lemma 4.4.1 volgt dat $|g(y) + g(-y)| = O(1)$. Dus geldt voor elke ε dat

$$g(-y) \leq -|G| \left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon \right) \log\left(\frac{1}{y}\right)$$

indien $|y|$ klein genoeg is.

Stap 2.

Noteer $\sum_{L_i(\rho)=0} \frac{e^{iy\gamma}}{\rho}$ als $g_i(y)$, zodat $g = \sum_i g_i(y)$. We trunceren g door van elke voorkomende gedeelte g_i de eerste N termen te nemen, noteer de resulterende trigonometrische polynoom als g_N . Beschouw lemma 2.4.4, toepasbaar op elk van de $|G|$ stukken van de functies $g(y)$. Het lemma neemt aan dat we trunceren door alle wortels met absolute waarde kleiner dan N te nemen, in tegenstelling tot de eerste N zoals hier gebeurt. Aangezien we weten dat $N(T, \chi) = O(T \log T)$, hebben we in elk van de g_i met de eerste N wortels zeker een absolute waarde van $M = O(\frac{N}{\log N})$ bereikt; immers het aantal wortels met absolute waarde kleiner dan M is dan kleiner dan N aangezien $N(M, \chi) = O(M \log M) = O(N - N^{\frac{\log_2(N)}{\log(N)}})$. Het lemma geeft ons dus

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+1} |g(t) - g_N(t)|^2 &\leq \sum_i \int_x^{x+1} |g_i(t) - g_{i,N}(t)|^2 \\
&\leq |G| \frac{\log^3(M) + \log^2(M)}{M} \\
&= O(|G| \frac{(\log(N) - \log \log(N))^3 + (\log(N) - \log \log(N))^2}{\frac{N}{\log N}}) \\
&= O(|G| \frac{\log^4(N)}{N}).
\end{aligned}$$

We moeten nu N voldoende groot kiezen zodat het rechterlid klein genoeg wordt. In de volgende stap blijkt dat een optimale keuze gegeven wordt door $N = k \log Y$ voor een zekere constante k . Dan is bovenstaand rechterlid kleiner dan $|G|K \frac{(\log_2 Y)^4}{\log Y} \leq \frac{\varepsilon^3 \log^\varepsilon Y}{\log Y}$ voor voldoende grote Y , aangezien $\log(x) = o(x^\delta)$ voor elke δ . Dit impliceert dat, stellende $x = 0$ in bovenstaande integraal, dat $|g_N(y) - g(y)| \leq \varepsilon$ in $y \in]0, 1[$, op maximaal een verzameling van maat $\frac{\varepsilon \log^\varepsilon Y}{\log Y}$ na. Dus, voor alle y klein genoeg; bijvoorbeeld voor alle $y \in]0, \log^{-1+2\varepsilon} Y[$ op een verzameling van maat $\varepsilon \log^{-1+\varepsilon} Y$ na geldt dat

$$g_N(y) > g(y) - \varepsilon \geq |G|(\frac{1}{2} - 2\varepsilon) \log_2(Y)$$

indien Y groot genoeg is. Analoog geldt voor alle $y \in]-\log^{-1+2\varepsilon} Y, 0[$ op een verzameling van maat $\varepsilon \log^{-1+\varepsilon} Y$ na dat

$$g_N(y) < g(y) + \varepsilon \leq -|G|(\frac{1}{2} - 3\varepsilon) \log_2(Y)$$

Stap 3.

We zoeken nu een bijna-periode van de trigonometrische polynoom g_N . We zoeken een natuurlijke $1 \leq s \leq Y$ zodanig dat alle $\frac{s\gamma}{2\pi}$ zeer dicht bij natuurlijke getallen zijn. Dan geldt immers dat

$$\begin{aligned} |g_N(y) - g_N(y+s)|^2 &\leq \left(\sum_i \sum_\rho \left| \frac{e^{iy\gamma}}{\rho} - \frac{e^{i(y+s)\gamma}}{\rho} \right| \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_i \sum_\rho \frac{1}{|\rho|} |e^{is\gamma} - 1| \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_i \sum_\rho \frac{1}{|\rho|} \left| \int_0^{s\gamma} e^{it} dt \right| \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_i \sum_\rho \frac{1}{|\rho|} (s\gamma \bmod 2\pi) \right)^2 \\ &\leq (2.2\pi \sum_i \sum_\rho \frac{1}{|\rho|} \left\| \frac{s\gamma}{2\pi} \right\|_{\mathbb{N}})^2 \\ &\leq (4\pi)^2 |G|A \sum_i \sum_\rho \left\| \frac{s\gamma}{2\pi} \right\|_{\mathbb{N}}^2 \end{aligned}$$

De laatste stap geldt wegens de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz, waar we $\sum_{i \leq N} \frac{1}{|\rho_i|^2} \leq \sum_\rho \frac{1}{|\rho|^2} =: A$ gesteld hebben. Om dit voldoende te begrenzen, bijvoorbeeld kleiner dan 1, moeten we eisen dat $\sum_i \sum_\rho \left\| \frac{s\gamma}{2\pi} \right\|_{\mathbb{N}}^2 < \frac{1}{(4\pi)^2 |G|A}$, of moeten we dus Stelling 1.2.2 toepassen met $\varepsilon = \frac{1}{4\pi\sqrt{|G|A}}$. Een

eerste bijna-periode s wordt dan gevonden kleiner dan $\frac{C}{\varepsilon^{|G|N}}$ voor een zekere constante C . Om een s te vinden kleiner dan Y moeten we er dus voor zorgen dat N niet te groot is; er moet gelden dat

$$C(4\pi\sqrt{|G|A})^{|G|N} = Ce^{|G|N(\frac{1}{2}\log|G|A+\log(4\pi))} < Y.$$

Zo ziet men in dat N kleiner moet zijn dan $\log(Y)$, en het werkt voor een zekere voldoende klein constante k met $N = k \log Y$, voor voldoende grote Y ;

$$\begin{aligned} Ce^{|G|N(\frac{1}{2}\log|G|A+\log(4\pi))} &< Y \\ \Leftrightarrow |G|N(\frac{1}{2}\log|G|A+\log(4\pi)) + \log(C) &< \log(Y) \\ \Leftrightarrow |G|(\frac{1}{2}\log(|G|A) + \log(4\pi)) + \log(C) &< \frac{1}{k} \end{aligned}$$

We concluderen dat voor elke voldoende grote Y er een bijna-periode $1 \leq s \leq Y$ bestaat zodat voor alle $y \in]0, \log^{-1+2\varepsilon} Y[$ op een verzameling van maat $\varepsilon \log^{-1+\varepsilon} Y$ na geldt dat

$$g_N(y+s) > g_N(y) - 1 \geq |G|(\frac{1}{2} - 3\varepsilon) \log_2(Y).$$

Analoog geldt voor elke $y \in]-\log^{-1+2\varepsilon} Y, 0[$ op een verzameling van maat $\varepsilon \log^{-1+\varepsilon} Y$ na dat

$$g_N(y+s) < g_N(y) + 1 \leq |G|(\frac{1}{2} - 4\varepsilon) \log_2(Y).$$

Stap 4.

Analoog als in stap twee gebruiken we nu de hogerbewezen afschatting

$$\int_{s-\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}} |g_N(s+t) - g(s+t)|^2 dt \leq \varepsilon^3 \log^{1-\varepsilon} Y,$$

zodat men ook hier kan besluiten dat $|g(z) - g_N(z)| < \varepsilon$ voor alle $z \in]s - \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2}[$ op een verzameling van maat $\varepsilon \log^{-1+\varepsilon} Y$ na. Dit combinérend met het voorgaande impliceert dat voor alle $z \in]s, s + \log^{-1+2\varepsilon} Y[$ met uitzondering van een verzameling met maat $2\varepsilon \log^{-1+\varepsilon} Y$ geldt dat

$$g(z) > g_N(z) - \varepsilon > |G|(\frac{1}{2} - 4\varepsilon) \log_2(Y)$$

En analoog geldt voor elke $z \in]s - \log^{-1+2\varepsilon} Y, s[$ op een verzameling van maat $2\varepsilon \log^{-1+\varepsilon} Y$ na dat

$$g_N(z) < g_N(z) + 1 \leq |G|(\frac{1}{2} - 5\varepsilon) \log_2(Y).$$

Het bewijs kan nu beeindigd worden door op te merken dat, aangezien ε zo klein mag verondersteld worden dat

$$\log^{-1+2\varepsilon} Y - 2\varepsilon \log^{-1+\varepsilon} Y > 0,$$

men voor y_+ een willekeurig getal uit $]s, s + \log^{-1+2\varepsilon} Y[$ niet in de uitzonderingsverzameling kan kiezen, en analoog voor y_- . Zij voldoen aan de gevraagde eisen, behalve dan dat men met $\frac{\varepsilon}{5}$ had moeten starten. Bij constructie geldt eveneens dat

$$y_- < y_+ < y_- + 2\log^{-1+2\varepsilon} Y < y_- + \log^{-1+4\varepsilon} Y.$$

□

Conclusie

In hoofdstuk 1 hebben we een theorie opgebouwd, waarvan we in hoofdstuk 2 aangetoond hebben dat deze aangepast is voor de behandeling van een klasse in de getaltheorie vaak voorkomende bijna-periodische functies, die op meer mondaine wijzen hun geheimen niet prijsgeven.

In hoofdstuk 3 hebben we enkele methodes rond het bewijzen van eigenschappen voor deze moeilijk grijpbare bijna-periodische functies opgeworpen, en hiermee aangetoond dat hun distributiefunctie zich goed gedraagt. Tenslotte hebben we in hoofdstuk 4 de effectiviteit van deze theorie aangetoond door een sterk resultaat wat betreft hun asymptotische groei te bewijzen, dit door middel van een inzicht in het voorkomen en de kwaliteit van de concrete bijna-periodes van deze bijna-periodische functie.

Het moge duidelijk zijn dat de opgebouwde theorie niet enkel binnen het kader van deze thesis nuttig is maar veelbelovend blijkt om in open problemen zoals het Shanks-Renyi raceprobleem voor een gepast kader te dienen.

Bibliografie

- [1] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1967)
- [2] H.M. Edwards, *Riemann's Zeta Function* (Dover Books, 1974)
- [3] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences* (John Wiley & Sons, 1974)
- [4] C.J. Moreno, *Advanced Analytic Number Theory: L-functions* (American Mathematical Society, 2005)
- [5] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1999)
- [6] J-C. Schlage-Puchta, *On Large Oscillations of the Remainder of the Prime Number Theorems* (Acta Math. Hungar. 46(3), 213-227, 2000.)
- [7] J-C. Schlage-Puchta, *Vergleichende Multiplikative Zahlentheorie* (Doktoratsdissertation, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg am Breisgau, 1997)
- [8] Wikipedia, the free encyclopedia; www.wikipedia.com