

NUMERIEKE METHODEN VOOR HET OPLOSSEN VAN FRACTIONELE DIFFUSIEVERGELIJKINGEN

MET ALS DIDACTISCHE COMPONENT
EINDTERMEN WISKUNDE IN VLAANDEREN EN WALLONIË:
EEN VERGELIJKENDE STUDIE

Lieven De Roeck

Studentennummer: 01704595

Masterproef voorgelegd tot het behalen van de academische graad van
Educatieve Master of Science in de wetenschappen en technologie
(afstudeerrichting wiskunde)

Academiejaar 2021 - 2022

Promotoren:

dr. K. Van Bockstal	Faculteit Ingenieurswetenschappen en Architectuur Vakgroep Elektronica en Informatiesystemen
prof. dr. M. Stodička	Faculteit Ingenieurswetenschappen en Architectuur Vakgroep Elektronica en Informatiesystemen
prof. dr. H. Van Maldeghem	Faculteit Wetenschappen Vakgroep Wiskunde: Algebra en Meetkunde



**UNIVERSITEIT
GENT**

NUMERIEKE METHODEN VOOR HET OPLOSSEN VAN FRACTIONELE DIFFUSIEVERGELIJKINGEN

MET ALS DIDACTISCHE COMPONENT

EINDTERMEN WISKUNDE IN VLAANDEREN EN WALLONIË:
EEN VERGELIJKENDE STUDIE

Lieven De Roeck

Studentennummer: 01704595

Masterproef voorgelegd tot het behalen van de academische graad van
Educatieve Master of Science in de wetenschappen en technologie
(afstudeerrichting wiskunde)

Academiejaar 2021 - 2022

Promotoren:

dr. K. Van Bockstal	Faculteit Ingenieurswetenschappen en Architectuur Vakgroep Elektronica en Informatiesystemen
prof. dr. M. Stodička	Faculteit Ingenieurswetenschappen en Architectuur Vakgroep Elektronica en Informatiesystemen
prof. dr. H. Van Maldeghem	Faculteit Wetenschappen Vakgroep Wiskunde: Algebra en Meetkunde



Voorwoord

Lectori Salutem

Deze masterthesis draagt bij tot de voltooiing van mijn (educatieve) masteropleiding wiskunde aan de Universiteit Gent. Deze masterthesis bestaat uit twee delen: een deel dat handelt over fractionele diffusievergelijkingen en een deel waarin de eindtermen wiskunde vergeleken worden tussen Vlaanderen en Wallonië. Zodoende heb ik deze masterthesis opgesplitst in een *Partim I* en een *Partim II*. Hierbij vond ik het ook fijn om de opmaak van deze thesis te verzorgen in \LaTeX .

Het was aangenaam om mij te verdiepen in de theorie van de fractionele calculus. Ik ervoer dit als een leerrijke ervaring om mijn blik te verruimen. Het heeft me een zicht gegeven op de wereld van wiskundig onderzoek, waaruit nogmaals duidelijk wordt hoe breed het studiegebied wiskunde wel is. Hierbij bedank ik graag dr. K. Van Bockstal en prof. dr. M. Slodička, voor de ondersteuning, het aanreiken van studiemateriaal, de vele wetenswaardigheden, de begeleiding en feedback.

Ik wil eveneens prof. dr. H. Van Maldeghem bedanken voor de feedback en de vrijheid voor de invulling van de didactische component van deze thesis.

Tot slot wil ik mijn familie bedanken voor de steun gedurende mijn studies.

Lieven De Roeck
Lokeren, mei 2022

Toelating tot bruikleen

De auteur geeft de toelating deze masterproef voor consultatie beschikbaar te stellen en delen van de masterproef te kopiëren voor persoonlijk gebruik. Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit deze masterproef.

Lieven De Roeck, mei 2022

Inhoudsopgave

Partim I: Numerieke methoden voor het oplossen van fractionele diffusievergelijkingen	1
Inleiding	3
1. Fractionele calculus	5
1.1. Resultaten uit de analyse	5
1.2. Gammafunctie	10
1.3. Bètafunctie	14
1.4. Functie van Mittag-Leffler	14
1.5. Grünwald-Letnikov fractionele afgeleiden	16
1.6. Riemann-Liouville fractionele afgeleiden	20
1.7. Fractionele integralen	22
1.8. Caputo fractionele afgeleiden	25
1.9. Relatie tussen fractionele afgeleiden	27
1.10. Voorbeeld van fractionele afgeleiden	29
2. De Laplacetransformatie	31
2.1. Definitie	31
2.2. Inverse Laplacetransformatie	32
2.3. Eigenschappen	33
2.4. Toepassingen	36
3. Fractionele diffusievergelijkingen	41
3.1. Eendimensionale diffusievergelijking	41
3.2. Scheiding van veranderlijken	42
3.3. Diffusievergelijking met bron	49
3.4. Eigenschappen van de oplossing	50
4. Numerieke methoden	57
4.1. Discrete convolutiebenadering	58
4.2. L^1 -benadering	60
4.3. Implementatie	62
4.4. Resultaten	68
Conclusie	77

Partim II: Eindtermen wiskunde in Vlaanderen en Wallonië: een vergelijkende studie	79
<hr/>	
Inleiding	81
1. Organisatie en structuur	83
1.1. Vlaanderen	83
1.2. Wallonië	85
2. Eindtermen en eindcompetenties	87
2.1. Basisvorming	87
2.2. Algemene vorming	94
2.3. Wetenschappelijke vorming	106
Conclusie	127
<hr/>	
Appendices	129
<hr/>	
A. English summary	129
B. Eindtermen Vlaanderen	133
B.1. Derde graad TSO/KSO	133
B.2. Derde graad ASO	134
B.3. Derde graad ASO: specifiek gedeelte	137
<hr/>	
Bibliografie	141
<hr/>	

Universiteit Gent
Faculteit Ingenieurswetenschappen en Architectuur
Vakgroep Elektronica en Informatiesystemen
Onderzoeksgroep Numerieke Analyse en Wiskundige Modelling

PARTIM I

NUMERIEKE METHODEN VOOR HET OPLOSSEN VAN FRACTIONELE DIFFUSIEVERGELIJKINGEN

Promotoren: dr. K. Van Bockstal en prof. dr. M. Slodička



Inleiding

De traditionele integraal en afgeleide zijn essentiële begrippen uit de analyse, die enorm veel toepassingsgebieden kennen. Deze concepten zijn ook eenvoudig grafisch te interpreteren: m.b.v. een afgeleide kan de helling in een punt van de grafiek van een functie worden afgelezen en a.d.h.v. een (bepaalde) integraal kan men de georiënteerde oppervlakte berekenen van het gebied dat begrensd wordt door de grafiek van een functie, de x -as en twee verticalen. Deze begrippen worden via de theorie van de fractionele calculus als het ware uitgebreid en veralgemeend naar afgeleiden en integralen van fractionele orde. In die zin is dit vergelijkbaar met de uitbreiding van machten met een natuurlijke exponent naar machten met een niet-natuurlijke exponent. Een macht met een natuurlijke exponent is in feite een verkorte notatie voor de herhaalde vermenigvuldiging van eenzelfde waarde. Dit concept wordt minder interpreteerbaar indien niet-gehele exponenten beschouwd worden. Men kan bijvoorbeeld eenvoudig verifiëren dat $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$, maar voor een macht zoals $x^{3.14}$ kan men dit niet nagaan. Desalniettemin voelt de notie van het concept machtsverheffing heel intuïtief aan. De Duitse wiskundige Gottfried Leibniz (1646 – 1716) voerde de notatie $d^n y/dx^n$ in voor afgeleiden van orde n (daarom wordt deze notatie ook de *Leibniznotatie* genoemd). In een brief van de Franse wiskundige Guillaume de l'Hôpital (1661 – 1704) aan Leibniz werd de volgende vraag gesteld: ‘Wat als $n = 1/2$?’ Leibniz antwoordde hierop dat dit zou leiden tot een paradox, waarover op een dag nuttige conclusies getrokken zouden worden [18].

In dit deel van de masterthesis zullen fractionele afgeleiden aangewend worden in de context van fractionele diffusievergelijkingen. Het doel van dit deel van de masterthesis bestaat erin om fractionele beginwaardeproblemen te bestuderen en numeriek op te lossen.

In Hoofdstuk 1 wordt een inleiding gegeven tot fractionele calculus. Er worden functies geïntroduceerd die courant gebruikt worden in de theorie van de fractionele calculus, zoals de functie van Mittag-Leffler, die in het bijzonder van pas zal komen bij het oplossen van fractionele differentiaalvergelijkingen. Er worden eveneens verschillende definities (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville en Caputo) van fractionele afgeleiden aangewend en het onderlinge verwantschap tussen deze definities wordt bewezen. Op het einde van dit hoofdstuk worden de fractionele afgeleiden van o.a. machtsfuncties berekend.

De Laplacetransformatie wordt geïntroduceerd in Hoofdstuk 2. Dit is een integraaltransformatie die men in diverse contexten kan aanwenden, in het bijzonder voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen. De voornaamste eigenschappen van deze integraaltransformatie worden besproken en bewezen. De focus in dit hoofdstuk zal liggen op transformaties m.b.t. Caputo fractionele afgeleiden, want in de daaropvolgende hoofdstukken worden er fractionele beginwaardeproblemen beschouwd voor Caputo afgeleiden.

Hoofdstuk 3 handelt over fractionele diffusievergelijkingen. Er wordt een eendimensionale diffusievergelijking met een constante diffusiecoëfficiënt beschouwd, die opgelost wordt met behulp van de techniek ‘scheiden van veranderlijken’. Hierbij wordt eveneens gebruikgemaakt van de Laplacetransformatie. Op het einde van dit hoofdstuk wordt er een raamwerk geïntroduceerd om regulariteitseigenschappen van de oplossing te bewijzen.

Tot slot worden er in Hoofdstuk 4 twee numerieke methoden besproken om fractionele beginwaardeproblemen op te lossen: de discrete convolutiebenadering en de L^1 -benadering. Er wordt beschreven hoe beide methoden geïmplementeerd kunnen worden en nadien worden de resultaten besproken voor enkele voorbeelden van fractionele beginwaardeproblemen. De convergentiesnelheid van beide methoden wordt vergeleken a.d.h.v. tabellen en grafieken.

Fractionele calculus

Fractionele calculus is een tak van de wiskundige analyse die afleidings- en integratieoperatoren bestudeert die niet noodzakelijk een natuurlijke orde hebben. Met een afgeleide (resp. integraal) van natuurlijke orde n van een functie bedoelen we de functie die bekomen wordt door de functie n keer af te leiden (resp. te integreren).

Notatie 1.1.

Zij f een functie van één veranderlijke.

De afgeleide van orde n van f zullen we noteren als $f^{(n)}$ of $D^n f$.

De integraal van orde n van f zullen we noteren als $f^{(-n)}$ of $D^{-n} f$.

Er zijn verschillende definities van fractionele afgeleiden ontwikkeld, zoals bijvoorbeeld de definities van Grünwald-Letnikov (GL), Riemann-Liouville (RL) en Caputo (C). Deze worden o.a. besproken in het boek *Fractional Differential Equations* van I. Podlubný [17].

1.1 Resultaten uit de analyse

Aangezien fractionele calculus kan gezien worden als een uitbreiding van de gewone calculus (analyse), is het vanzelfsprekend dat vele resultaten uit de analyse essentieel zullen zijn bij de verdere opbouw van de theorie. In deze paragraaf worden kort enkele lemma's en stellingen aangehaald, al dan niet voorzien van een bewijs.

Het volgende lemma is een gevolg van de Stelling van Fubini:

Lemma 1.2.

Voor een integreerbare functie $f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ geldt:

$$\int_a^b dz \int_a^z f(x, z) dx = \int_a^b dx \int_x^b f(x, z) dz.$$

Bewijs. We definiëren eerst de functie $g : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ als volgt:

$$g : (x, z) \mapsto \begin{cases} 1 & x \leq z \\ 0 & x > z. \end{cases}$$

De functie $h := fg$ is integreerbaar. Wegens de Stelling van Fubini geldt:

$$\int_a^b dz \int_a^b h(x, z) dx = \int_a^b dx \int_a^b h(x, z) dz. \tag{1.1}$$

Wegens de definitie van g is het linkerlid van (1.1) als volgt te schrijven:

$$\int_a^b dz \int_a^b h(x, z) dx = \int_a^b dz \int_a^z f(x, y) dx.$$

Analoog kan het rechterlid van (1.1) herschreven worden:

$$\int_a^b dx \int_a^b h(x, z) dz = \int_a^b dx \int_x^b f(x, z) dz.$$

Dit bewijst het gestelde. □

De volgende stelling staat ook bekend als de **integraalregel van Leibniz**, genoemd naar de Duitse wiskundige Gottfried Leibniz (1646 – 1716). Deze stelling wordt uitvoerig besproken en bewezen in het artikel *Differentiation under the integral sign* van H. Flanders [9].

Stelling 1.3 (Afleiden onder het integraalteken).

Voor een functie $f(x, z)$ geldt^a:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{a(z)}^{b(z)} f(x, z) dx = f(b(z), z) \frac{\partial b(z)}{\partial z} - f(a(z), z) \frac{\partial a(z)}{\partial z} + \int_{a(z)}^{b(z)} \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} dx.$$

In het bijzonder geldt voor $a(z) = a$ en $b(z) = z$:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_a^z f(x, z) dx = f(z, z) + \int_a^z \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} dx.$$

^aHierbij wordt verondersteld dat alle (partiële) afgeleiden bestaan en continu zijn.

De volgende stelling werd bewezen door Henri Lebesgue (1875 – 1941) als onderdeel van zijn nieuwe integratietheorie. De kracht en bruikbaarheid ervan worden gezien als belangrijke voordelen van Lebesgue-integratie ten opzichte van Riemann-integratie. Een bewijs is terug te vinden in vrijwel elke gevorderde cursus over Lebesgue-integratie. Het is eveneens terug te vinden als het bewijs van Theorem 3.2.4 op pagina 83 in het boek *Essentials of Integration Theory for Analysis* [19].

Stelling 1.4 (Gedomineerde convergentiestelling van Lebesgue). Zij (f_k) een rij van meetbare functies op \mathbb{R}^n waarvoor geldt dat $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ bestaat voor alle $x \in \mathbb{R}^n$. Veronderstel verder dat er een functie $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ bestaat zodat $|f_k(x)| \leq g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dan is $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ en mogen limiet en integraal verwisseld worden, i.e.:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx.$$

Het volgende lemma heeft betrekking op rijen, maar is vooral bruikbaar in de context van Grünwald-Letnikov fractionele afgeleiden. Het bewijs van deze stelling is terug te vinden in het boek *Fractional Differential Equations* van I. Podlubný [17], op pagina 49 (Theorem 2.1).

Lemma 1.5 (Letnikov). Veronderstel dat $\alpha_{n,k}$ en β_k rijen zijn waarvoor het volgende geldt (met $k = 1, 2, \dots$ en $K \in \mathbb{R}_0^+$):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,k} = 0 \text{ voor alle } k,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} = A \text{ voor alle } k,$$

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_{n,k}| < K \text{ voor alle } n.$$

Dan geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k = A.$$

De volgende stelling betreft de **Taylor-ontwikkeling** van een functie, genoemd naar de Engelse wiskundige Brook Taylor (1685 – 1731). Wanneer de Taylor-ontwikkeling gecentreerd wordt rondom nul, noemt men de Taylor-reeks ook wel een **Maclaurin-reeks**. De originele Taylor-ontwikkeling had enkel betrekking op reële functies, maar ook voor complexe (*holomorfe* of *analytische*) functies is een Taylor-ontwikkeling gedefinieerd. De volgende stelling betreft de Taylor-formule met een integraalgedaante van de restterm. Een bewijs van deze stelling is terug te vinden in vrijwel elk standaardwerk over analyse, zoals bijvoorbeeld [3], op pagina 185.

Stelling 1.6 (Formule van Taylor). Zij $f(x)$ een reële functie die $k+1$ continue afgeleiden bezit in een omgeving U van het punt $x = a$. Dan geldt voor alle $x \in U$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(k+1)}(t) \frac{(x-t)^k}{k!} dt.$$

Fourier-reeksen kunnen gezien worden als een tegenhanger van Taylor-reeksen, aangezien beide reeksen ontwikkelingen zijn van functies in lineaire combinaties van machtsfuncties (dit is het geval bij Taylor-reeksen) of goniometrische functies (dit is het geval bij Fourier-reeksen). Fourier-reeksen

zijn genoemd naar de Franse wiskundige Joseph Fourier (1768 – 1830). De volgende stelling geeft de integraalformule van Fourier, een bewijs hiervan is te vinden in het boek *Introduction to Hilbert Spaces with Applications* [7], op pagina 267.

Stelling 1.7 (Fourier). Zij $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, dan geldt bijna overal:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] dk.$$

Bovendien is er ook een Fourier-ontwikkeling gedefinieerd in hilbertruimten. Deze ontwikkeling wordt een veralgemeende Fourier-reeks genoemd. Een bespreking hiervan is eveneens terug te vinden in [7], op pagina 112–114.

Stelling 1.8. Zij $f \in \mathcal{H}$ en (f_n) een volledige orthonormale rij in \mathcal{H} , met \mathcal{H} een hilbertruimte. Dan kan elke $f \in \mathcal{H}$ uniek geschreven worden als:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n.$$

De inproducten $\langle f, f_n \rangle$ worden de (Fourier-)coëfficiënten van de ontwikkeling genoemd.

Een volledige orthonormale rij kan als volgt gekarakteriseerd worden (zie [7], pagina 115):

Stelling 1.9. In een hilbertruimte is een orthonormale rij (x_n) volledig als en slechts als uit $\langle x, x_n \rangle = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, volgt dat $x = 0$.

De volgende stelling geeft een volledige rij in $L^2([-\pi, \pi])$. Het bewijs (zie [7], pagina 122–127) van deze stelling is vrij uitgebreid.

Stelling 1.10. De volgende rij^a (ϕ_n) (met $n \in \mathbb{Z}$) is volledig in $L^2([-\pi, \pi])$:

$$\phi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

^aDit impliceert dat de elementen van de verzameling $\{1, \sin(nx), \cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}_0 := \{1, 2, 3, \dots\}\}$ eveneens een volledige rij vormen.

Voor zelftoegevoegde operatoren (ook wel zelfgeadjungeerde operatoren genoemd) gedefinieerd op een hilbertruimte geldt de volgende eigenschap (zie [7], pagina 190):

Stelling 1.11. Een zelftoegevoegde operator op een hilbertruimte heeft reële eigenwaarden.

Bewijs. Veronderstel dat λ een eigenwaarde is van de zelftoegevoegde operator \mathcal{L} en dat $u \neq 0$ een overeenkomstige eigenvector is. Dan geldt:

$$\lambda \langle u, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \langle \mathcal{L}(u), u \rangle = \langle u, \mathcal{L}(u) \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle.$$

Aangezien $\langle u, u \rangle > 0$, is $\lambda = \bar{\lambda}$, waardoor $\lambda \in \mathbb{R}$. □

In de volgende stelling worden de oplossingen voor een lineaire homogene differentiaalvergelijking van tweede orde besproken. Deze stelling (met bewijs) is bijvoorbeeld terug te vinden in [3], op pagina 141.

Stelling 1.12. Beschouw de volgende lineaire homogene differentiaalvergelijking van tweede orde, met p en q reële constanten:

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (1.2)$$

Afhankelijk van de wortels van de *karakteristieke veelterm*^a kan men twee onafhankelijke (reëelwaardige) oplossingen over \mathbb{R} van (1.2) onderscheiden:

1. e^{r_1x} en e^{r_2x} , als de karakteristieke veelterm twee verschillende reële wortels r_1 en r_2 heeft;
2. e^{rx} en xe^{rx} , als de karakteristieke veelterm een dubbelwortel r heeft;
3. $e^{ax} \cos(bx)$ en $e^{ax} \sin(bx)$, als de karakteristieke veelterm twee verschillende complexe wortels $a \pm bi$ (dus met $b \neq 0$) heeft.

^aDe karakteristieke veelterm van de differentiaalvergelijking (1.2) is de veelterm $x^2 + px + q$.

De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz stelt dat het kwadraat van de absolute waarde van het inproduct van twee willekeurige vectoren x en y in een inproductruimte kleiner dan of gelijk is aan het product van de inproducten van x met zichzelf en y met zichzelf, i.e. $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$. De volgende stelling geldt in het bijzonder voor een reële inproductruimte:

Stelling 1.13. Zij $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ reële getallen. Dan geldt (ook voor $n \rightarrow \infty$):

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

Bewijs. Beschouw de reële functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2$.

Er geldt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^n a_k^2 x^2 + 2a_k b_k x + b_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 x^2 + \sum_{k=1}^n 2a_k b_k x + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right) x + \sum_{k=1}^n b_k^2. \end{aligned}$$

De functie $f(x)$ is een kwadratische veelterm in $x \in \mathbb{R}$. Aangezien $f \geq 0$, is de discriminant van

deze kwadratische veelterm kleiner dan of gelijk aan 0:

$$\left(2 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)\right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \leq 0.$$

Dit bewijst het gestelde. □

1.2 Gammafunctie

De gammafunctie, genoteerd als $\Gamma(z)$, is een veralgemening van de faculteitsfunctie $n!$. Ze wordt gedefinieerd voor een complex argument met een (strikt) positief reëel deel (i.e. $\Re(z) > 0$):

Definitie 1.14 (Gammafunctie). Zij $z \in \mathbb{C}$ met $\Re(z) > 0$, dan wordt de gammafunctie gegeven door:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{1.3}$$

De gammafunctie is goed gedefinieerd, want de integraal convergeert inderdaad in het complexe halfvlak $\Re(z) > 0$. Dit wordt bewezen in de volgende stelling:

Stelling 1.15. De integraal (1.3) is (absoluut) convergent voor $\Re(z) > 0$.

Bewijs. We herschrijven de integraal (1.3) als $I_1(z) + I_2(z)$, met:

$$I_1(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{en} \quad I_2(z) = \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

- $I_1(z)$ is absoluut convergent, want we kunnen de volgende afchatting maken:

$$|I_1(z)| \leq \int_0^1 |t^{z-1} e^{-t}| dt = \int_0^1 |t^{\Re(z)-1} e^{i\Im(z)\ln(t)} e^{-t}| dt = \int_0^1 t^{\Re(z)-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{\Re(z)-1} dt < \infty.$$

- Om de absolute convergentie van $I_2(z)$ in te zien, merken we eerst op dat voor elke $m \in \mathbb{N}_0$ de volgende afchatting geldt (met $t \geq 0$):

$$\frac{t^m}{m!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t \iff e^{-t} \leq m! t^{-m}.$$

Kies $m \in \mathbb{N}_0$ waarvoor $m > \Re(z)$. Het is duidelijk dat de tweede integraal $I_2(z)$ eveneens absoluut convergent is:

$$|I_2(z)| \leq \int_1^{\infty} |t^{z-1} e^{-t}| dt = \int_1^{\infty} t^{\Re(z)-1} e^{-t} dt \leq m! \int_1^{\infty} t^{\Re(z)-m-1} dt < \infty.$$

□

Een eenvoudige eigenschap van de gammafunctie is de volgende:

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z + 1). \quad (1.4)$$

Deze eigenschap kan bewezen worden m.b.v. partiële integratie:

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \\ &= -t^z e^{-t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

Wegens Definitie 1.14 volgt dat $\Gamma(1) = 1$. Daardoor hebben we achtereenvolgens, door gebruik te maken van (1.4), dat:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!$$

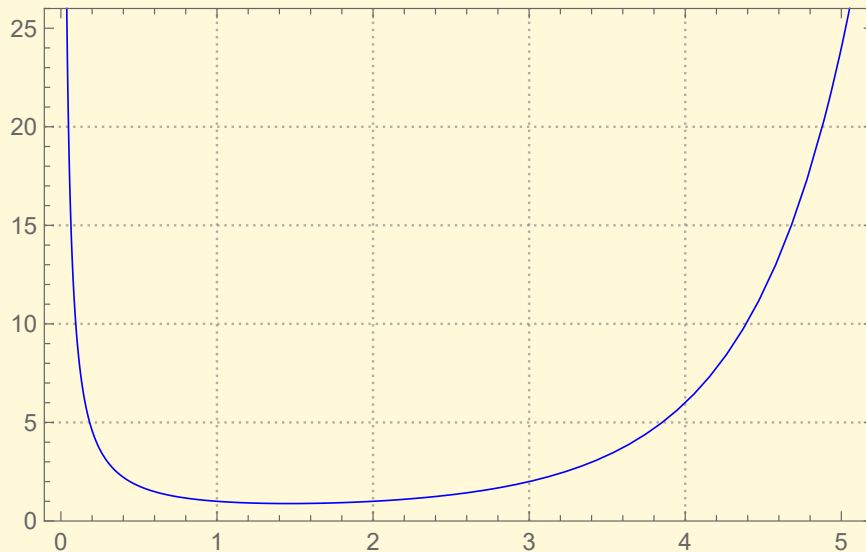
$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n + 1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n - 1)! = n!.$$

Deze waarden zijn ook af te lezen in de grafiek (Figuur 1.16) van de gammafunctie.



Figuur 1.16.: Grafiek van de gammafunctie $\Gamma(z)$ voor reële $z > 0$.

De gammafunctie kan ook als een limiet geschreven worden:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \quad (1.5)$$

Een bewijs van deze gelijkheid is terug te vinden in het boek van I. Podlubný [17] in paragraaf 1.1.3 (op pagina 4 e.v.). Dit bewijs steunt o.a. op het verwisselen van een limiet en een integraal. In dat opzicht is er ook een alternatief bewijs mogelijk, dat gebruikmaakt van de **Gedomineerde convergentiestelling van Lebesgue** (Stelling 1.4). In het volgende lemma wordt deze alternatieve aanpak (zie bijvoorbeeld [3], pagina 100 e.v.) uitgewerkt, waarbij men de gammafunctie als een limiet van een integraal schrijft:

Lemma 1.17. Zij $z \in \mathbb{C}$ met $\Re(z) > 0$, dan geldt:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Bewijs. Definieer

$$f(t) = t^{z-1} e^{-t}$$

en definieer $f_n(t)$ als volgt:

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & 0 < t \leq n \\ 0 & t > n. \end{cases}$$

Definieer de volgende rij:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} := \left(\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}_0}. \quad (1.6)$$

De rij (1.6) is stijgend vanaf een voldoende grote n , meer specifiek indien $n \geq t$. Om dit in te zien, beschouwen we de Taylor-ontwikkeling¹ van de functie $\ln(1-x)$ met $0 < x < 1$:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \dots = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}.$$

Indien beide leden gedeeld worden door x , vinden we:

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{i} = -1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i+1}.$$

Hieruit volgt dat voor $x \xrightarrow{>} 0$ geldt:

$$\frac{\ln(1-x)}{x} \nearrow -1. \quad (1.7)$$

Indien $x = \frac{t}{n}$ gesteld wordt met $0 < t \leq n$, volgt uit (1.7) dat voor $n \rightarrow \infty$:

$$n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) = t \left[\frac{n}{t} \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \right] \nearrow -t.$$

De rij (1.6) convergeert aldus naar e^{-t} . Hieruit volgt dat voor $t > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t).$$

¹ Zie Stelling 1.6. In feite is dit een Maclaurin-reeks.

Definieer de functie $g(t) = t^{\Re(z)-1}e^{-t}$. Zoals in het bewijs van Stelling 1.15 volgt dat deze functie integreerbaar is en er bovendien geldt voor $t > 0$:

$$|f_k(t)| \leq g(t).$$

Uit de **Gedomineerde convergentiestelling van Lebesgue** (Stelling 1.4)² volgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(t) dt = \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \Gamma(z).$$

Dit bewijst het gestelde. □

Dit bovenstaande lemma kan vervolgens gebruikt worden om de limietvoorstelling (1.5) voor de gammafunctie te bewijzen:

Stelling 1.18 (Limietvoorstelling van de gammafunctie). Zij $z \in \mathbb{C}$ met $\Re(z) > 0$, dan geldt:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Bewijs. Beschouw de volgende integraal:

$$\int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n dt.$$

Indien we herhaaldelijk gebruikmaken van partiële integratie, bekommen we het volgende:

$$\begin{aligned} \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n dt &= \frac{1}{z} \int_0^n t^z \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{z} \cdot \frac{n-1}{n(z+1)} \int_0^n t^{z+1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} dt \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{1}{z} \cdot \frac{n-1}{n(z+1)} \cdot \frac{n-2}{n(z+2)} \cdots \frac{1}{n(z+n-1)} \int_0^n t^{z+n-1} dt \\ &= \frac{1}{z} \cdot \frac{n-1}{n(z+1)} \cdot \frac{n-2}{n(z+2)} \cdots \frac{1}{n(z+n-1)} \cdot \frac{n^{z+n}}{z+n} \\ &= \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \end{aligned}$$

Het gestelde volgt wegens Lemma 1.17, want:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n dt.$$

□

² Als alternatief zou de monotone convergentiestelling eveneens gebruikt kunnen worden.

1.3 Bètafunctie

Definitie 1.19 (Bètafunctie). Zij $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ met $\Re(\alpha) > 0$ en $\Re(\beta) > 0$, dan wordt de bètafunctie als volgt gedefinieerd:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\beta-1} d\tau.$$

Opmerking 1.20. Er is een eenvoudig verwantschap tussen de bètafunctie en de gammafunctie, zie Opmerking 2.18.

Een onmiddellijk gevolg van de definitie is dat de bètafunctie symmetrisch is:

Stelling 1.21. Zij $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ met $\Re(\alpha) > 0$ en $\Re(\beta) > 0$, dan geldt:

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha).$$

Bewijs. Via de transformatie $\tau = 1 - \nu$ volgt onmiddellijk:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\beta-1} d\tau = \int_0^1 (1-\nu)^{\alpha-1}\nu^{\beta-1} d\nu = B(\beta, \alpha).$$

□

1.4 Functie van Mittag-Leffler

De exponentiële functie, e^z , speelt een belangrijke rol bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen. Deze functie heeft namelijk de interessante eigenschap dat de afgeleide ervan gelijk is aan de functie zelf. Net zoals dat de faculteitsfunctie veralgemeend kon worden naar de gammafunctie, kan men ook een veralgemening voor de exponentiële functie definiëren. Beschouw de Maclaurinreeks (zie Stelling 1.6) van de exponentiële functie, i.e.:

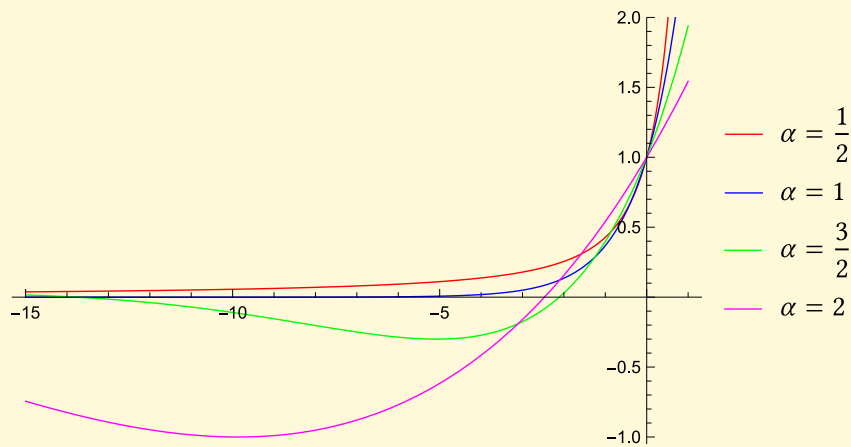
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Indien een parameter α ingevoerd wordt en de faculteitsfunctie vervangen wordt door de gammafunctie, kan men op een natuurlijke wijze de functie van Mittag-Leffler met één parameter introduceren.

Definitie 1.22 (Functie van Mittag-Leffler met één parameter). Zij $z \in \mathbb{C}$ en $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$, dan wordt de functie van Mittag-Leffler (met één parameter) gegeven door:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Het is duidelijk dat voor $\alpha = 1$ geldt dat $E_1(z) = e^z$, zoals te zien in Figuur 1.23.



Figuur 1.23.: Grafiek van de functie $E_\alpha(z)$ voor reële z en verschillende waarden α .

Deze functie kan eveneens veralgemeend worden naar een functie met twee parameters.

Definitie 1.24 (Functie van Mittag-Leffler met twee parameters). Zij $z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ en $\beta \in \mathbb{R}_0^+$, dan wordt de **functie van Mittag-Leffler** (met twee parameters) gegeven door:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Het is duidelijk dat $E_{1,1}(z) = e^z$ en $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$.

Indien men $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ zodanig kiest dat $\alpha < 2$, kan de volgende afchatting bewezen worden voor de functie van Mittag-Leffler (Podlubný [17], Theorem 1.6, pagina 35):

Stelling 1.25. Zij $z \in \mathbb{C}$, $0 < \alpha < 2$, $\beta \in \mathbb{R}_0^+$, μ een reëel getal waarvoor $\pi\alpha/2 < \mu < \min(\pi, \pi\alpha)$ en C een reële constante. Als $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$, dan bestaat er een constante $C \in \mathbb{R}$ waarvoor:

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1 + |z|}.$$

Opmerking 1.26. Indien in het bijzonder $r \in \mathbb{R}_0^+$ (dan is $|\arg(-r)| = \pi$), bestaat er volgens Stelling 1.25 een constante $C \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt (met $0 < \alpha < 2$, $\beta \in \mathbb{R}_0^+$):

$$|E_{\alpha,\beta}(-r)| \leq \frac{C}{1 + r}.$$

1.5 Grünwald-Letnikov fractionele afgeleiden

De resultaten uit deze paragraaf zijn ook terug te vinden in het boek van I. Podlubný [17], paragraaf 2.2 (pagina 43 e.v.).

Beschouw een continue functie $y = f(t)$. De afgeleide $f'(t)$ van de functie $f(t)$ wordt in de klassieke analyse gedefinieerd als:

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \quad (1.8)$$

Een afgeleide van de tweede orde wordt bekomen door de definitie twee keer toe te passen:

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Door gebruik te maken van (1.8) en (1.9), verkrijgen we:

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}.$$

A.d.h.v. inductie wordt de volgende uitdrukking bekomen:

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh).$$

Beschouw de definitie van de binomiaalcoëfficiënt (met $r \in \mathbb{N}$):

$$\binom{p}{r} = \frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-r+1)}{r!}. \quad (1.10)$$

Beschouw eveneens voor natuurlijke $p > 0$ de volgende uitdrukking:

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh). \quad (1.11)$$

Aangezien $\binom{p}{p+1}, \dots, \binom{p}{n}$ nul zijn voor $p < n$, geldt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p}.$$

Men kan ook het geval $n \rightarrow \infty$ beschouwen (behorend bij de limiet $h \rightarrow 0$), door de volgende relatie op te leggen tussen h en n :

$$h = \frac{t-a}{n}.$$

Hierbij is a een reële constante. In deze context wordt in de literatuur (zie bijvoorbeeld [17]) vaak naar a en t verwezen als de **terminals** van fractionele afgeleiden. Dit leidt tot een veralgemening voor reële waarden van p , die gegeven wordt in Definitie 1.27.

Definitie 1.27. De Grünwald-Letnikov fractionele afgeleide van p -de orde (met $p > 0$) wordt gedefinieerd als:

$${}^{\text{GL}}D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh).$$

Hierbij wordt de definitie van binomiaalcoëfficiënten (1.10) eveneens uitgebreid naar reële waarden: in plaats van enkel natuurlijke waarden voor p te beschouwen, worden nu ook reële waarden voor p toegelaten. Merk op dat de volgende gelijkheid geldt:

$$\Gamma(p+1) = p(p-1)(p-2) \cdots (p-r+1)\Gamma(p-r+1).$$

Hieruit volgt een uitdrukking voor de veralgemeende binomiaalcoëfficiënten (met $p > r-1$):

$$\binom{p}{r} = \frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-r+1)}{r!} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(p-r+1)}.$$

De volgende stelling geeft een concrete uitdrukking voor de limiet in Definitie 1.27:

Stelling 1.28. Voor de Grünwald-Letnikov fractionele afgeleide van p -de orde (met $p > 0$) geldt (met $m \in \mathbb{N}$ en $m > p-1$ ^a):

$${}^{\text{GL}}D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(1+k-p)} + \frac{1}{\Gamma(1+m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau.$$

^aDe kleinste mogelijke waarde van m die hieraan voldoet is $m \leq p < m+1$.

Bewijs. Beschouw de formule van Stifel-Pascal:

$$\binom{p}{r} = \binom{p-1}{r-1} + \binom{p-1}{r}. \quad (1.12)$$

Indien we de uitdrukking (1.11) hernemen³, kunnen we het volgende schrijven:

$$\begin{aligned} f_h^{(p)}(t) &= h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p-1}{r} f(t-rh) + h^{-p} \sum_{r=1}^n (-1)^r \binom{p-1}{r-1} f(t-rh) \\ &= h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p-1}{r} f(t-rh) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} \binom{p-1}{r} f(t-(r+1)h) \\ &= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{p-1}{r} \Delta f(t-rh). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Hierbij is $\Delta f(t-rh) = f(t-rh) - f(t-(r+1)h)$, i.e. een achterwaartse differentie van de functie $f(\tau)$ in het punt $\tau = t-rh$. Door m keer gebruik te maken van de formule van Stifel-Pascal (1.12),

³Met $h = \frac{t-a}{n}$.

kunnen we (1.13) als volgt herschrijven:

$$\begin{aligned}
 f_h^{(p)}(t) &= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) + (-1)^{n-1} \binom{p-2}{n-1} h^{-p} \Delta f(a+h) \\
 &\quad + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{p-2}{r} \Delta^2 f(t-rh) \\
 &= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) + (-1)^{n-1} \binom{p-2}{n-1} h^{-p} \Delta f(a+h) \\
 &\quad + (-1)^{n-2} \binom{p-3}{n-3} h^{-p} \Delta^2 f(a+2h) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-3} (-1)^r \binom{p-3}{r} \Delta^3 f(t-rh) \\
 &\quad \vdots \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) \\
 &\quad + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(t-rh).
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Hierbij is Δ^k de achterwaartse differentie van orde k , inductief gedefinieerd door:

$$\Delta^k = \Delta(\Delta^{k-1}).$$

In de definitie van Grünwald-Letnikov fractionele afgeleiden (Definitie 1.27) wordt de limiet genomen van $f_h^{(p)}(t)$. De limiet van de k -de term in de eerste som van (1.14) wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \\
 &\quad \cdot \left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k} (nh)^{k-p} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
 &= (t-a)^{k-p} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \\
 &\quad \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
 &= \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(1+k-p)}.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

De laatste gelijkheid geldt omdat de limieten vereenvoudigd kunnen worden (voor de eerste limiet maken we gebruik van de [Limietvoorstelling van de gammafunctie](#), Stelling 1.18):

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-p+k)}{(-p+k)} \cdot \frac{(-p+k+1)(-p+k+2) \cdots (-p+n)}{(n-k)^{-p+k}(n-k)!} \\
 &= \frac{1}{(-p+k)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-p+k)} = \frac{1}{\Gamma(1+k-p)}, \\
 \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k} &= 1,
 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(a + kh)}{h^k} = f^{(k)}(a).$$

De tweede som van (1.14) kan als volgt herschreven worden:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(1+m-p)} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p} \cdot h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+m-p)} \sum_{r=0}^{n-m-1} \alpha_{n,r} \beta_r. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Hierbij is:

$$\begin{aligned} \alpha_{n,r} &= h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}}, \\ \beta_r &= (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p}. \end{aligned}$$

We evalueren enerzijds $\lim_{r \rightarrow \infty} \beta_r$, opnieuw gebruikmakend van de [Limietvoorstelling van de gammafunctie](#) (Stelling 1.18):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_r &= \lim_{r \rightarrow \infty} (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma(-p+m+1) \cdot \frac{(-p+m)}{(-p+m)} \cdot \frac{(-p+m+1)(-p+m+2) \cdots (-p+m+r)}{r^{-p+m} r!} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma(-p+m+1) \cdot \frac{1}{(-p+m)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-p+m)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Anderzijds geldt, wegens de limietovergang:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-m-1} \alpha_{n,r} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^{n-m-1} h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}} \\ &= \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Aldus zijn de voorwaarden van Lemma 1.5 vervuld, waardoor dit lemma toegepast kan worden om de limiet van de tweede som uit (1.14) te evalueren. Via (1.16) volgt:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(1+m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (1.17)$$

Gebruikmakend van (1.15) en (1.17), vinden we de volgende uitdrukking voor de Grünwald-Letnikov fractionele afgeleide:

$$\begin{aligned} {}^{\text{GL}}D_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(1+k-p)} + \frac{1}{\Gamma(1+m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

□

1.6 Riemann-Liouville fractionele afgeleiden

Veronderstel dat een functie $f(\tau)$ continu en integreerbaar is in elk eindig interval $]a, t[$. Dan bestaat de volgende integraal:

$$f^{(-1)}(t) = \int_a^t f(\tau) \, d\tau.$$

Vervolgens beschouwen we de dubbele integraal en passen we Lemma 1.2 toe:

$$\begin{aligned} f^{(-2)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau) \, d\tau \\ &= \int_a^t f(\tau) \, d\tau \int_{\tau}^t d\tau_1 \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) \, d\tau. \end{aligned}$$

Voor de drievoudige integraal geldt bijgevolg (opnieuw wegens Lemma 1.2):

$$\begin{aligned} f^{(-3)}(t) &= \int_a^t f^{(-2)}(\tau) \, d\tau \\ &= \int_a^t d\tau \int_a^{\tau} (\tau - \tau_1) f(\tau_1) \, d\tau_1 \\ &= \int_a^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t (\tau - \tau_1) f(\tau_1) \, d\tau \\ &= \int_a^t \frac{1}{2} (t - \tau_1)^2 f(\tau_1) \, d\tau_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_a^t (t - \tau)^2 f(\tau) \, d\tau. \end{aligned}$$

Per inductie kan de volgende formule gevonden worden (Cauchy):

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) \, d\tau. \quad (1.18)$$

Stelling 1.29 (Cauchy-formule voor meervoudige integratie).

De bovenstaande formule (1.18) geldt, voor $n \geq 1$. Hierbij is $\Gamma(n)$ de gammafunctie.

Bewijs. Veronderstel dat de formule (1.18) geldt voor $n = k$. Dan geldt voor $n = k + 1$ dat:

$$\begin{aligned} f^{(-k-1)}(t) &= \int_a^t f^{(-k)}(\tau) \, d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^t d\tau \int_a^{\tau} (\tau - \tau_1)^{k-1} f(\tau_1) \, d\tau_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t (\tau - \tau_1)^{k-1} f(\tau_1) \, d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t \frac{1}{n} (t - \tau_1)^n f(\tau_1) d\tau_1 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_a^t (t - \tau)^n f(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

□

Opmerking 1.30. Als alternatief kan de stelling ook per inductie bewezen worden via [Afleiden onder het integraalteken](#) (Stelling 1.3):

$$\begin{aligned}
 f^{(-k-1)}(t) &= \int_a^t f^{(-k)}(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t d\tau \int_a^\tau (\tau - \tau_1)^{n-1} f(\tau_1) d\tau_1 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{n} \int_a^\tau (\tau - \tau_1)^n f(\tau_1) d\tau_1 \right) d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_a^t (t - \tau)^n f(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Voor de laatste gelijkheid werd gebruikgemaakt van de hoofdstelling van de integraalrekening.

Veronderstel enerzijds dat $n \geq 1$ vast is. Indien een natuurlijk getal $k \geq 0$ beschouwd wordt, geldt uiteraard de onderstaande uitdrukking (cf. Notatie 1.1):

$$f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.19)$$

Anderzijds wordt de $(k - n)$ -de afgeleide van een functie $f(t)$ voor een vaste $n \geq 1$ en natuurlijk getal $k \geq n$ gegeven door:

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.20)$$

Formules (1.19) en (1.20) zijn sterk verwant en kunnen gezien worden als gevallen van (1.20), waarbij n ($n \geq 1$) vast is. Inderdaad, deze formule komt overeen met integralen van orde $1, 2, 3, \dots$ als $k = n - 1, n - 2, n - 3, \dots$; voor $k = n$ komt de formule overeen met $f(t)$; voor $k = n + 1, n + 2, n + 3, \dots$ komt de formule overeen met afgeleiden van orde $k - n = 1, 2, 3, \dots$ van de functie $f(t)$.

De uitdrukking (1.20) kan veralgemeend worden door reële waarden α op te leggen voor n . Merk op dat de restricties $0 < \alpha \leq 1$ en $k \in \mathbb{N}_0$ impliceren dat $k - \alpha \in \mathbb{R}^+$.

Definitie 1.31. De Riemann-Liouville fractionele afgeleide van orde $k - \alpha$ (met $0 < \alpha \leq 1$ en $k \in \mathbb{N}_0$) wordt gedefinieerd als:

$${}^{\text{RL}}D_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Indien $p = k - \alpha$ gesteld wordt, geldt (met $k - 1 \leq p < k$):

$${}^{\text{RL}}D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau.$$

Deze definitie is eveneens een uitbreiding van afgeleiden van natuurlijke orde $p \in \mathbb{N}_0$:

$${}^{\text{RL}}D_t^p f(t) = f^{(p)}(t).$$

1.7 Fractionele integralen

Net zoals er verschillende fractionele afgeleiden gedefinieerd worden, kunnen er eveneens fractionele integralen gedefinieerd worden. Om de Grünwald-Letnikov fractionele integraal te definiëren, zullen we ook negatieve waarden van p moeten toelaten in de binomiaalcoëfficiënt (1.10). Hiertoe wordt de volgende uitdrukking gedefinieerd voor negatieve waarden van p :

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} := \frac{p(p+1) \cdots (p+r-1)}{r!}. \tag{1.21}$$

Dan geldt voor $p < 0$:

$$\begin{aligned} \binom{-p}{r} &= \frac{-p(-p-1) \cdots (-p-r+1)}{r!} \\ &= (-1)^r \frac{p(p+1) \cdots (p+r-1)}{r!} \\ &= (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Als we in (1.11) nu p door $-p$ vervangen, krijgen we:

$$\begin{aligned} f_h^{(-p)}(t) &= \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{-p}{r} f(t-rh) \\ &= h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh). \end{aligned}$$

Indien n vast wordt gekozen, zal $f_h^{(-p)}(t) \rightarrow 0$ als $h \rightarrow 0$. Voor $n \rightarrow \infty$ geldt dit echter niet, dus maken we opnieuw gebruik van de terminals en stellen we h gelijk aan het volgende (met $a \in \mathbb{R}$):

$$h = \frac{t-a}{n}.$$

Als $p = 1$ wordt gesteld, is $\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = 1$, waardoor:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-1)}(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h \sum_{r=0}^n f(t-rh) \\ &= \int_0^{t-a} f(t-z) dz \\ &= \int_a^t f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Via inductie kan men de volgende stelling aantonen.

Stelling 1.32. Voor $p \in \mathbb{N}_0$ geldt:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-x)^{p-1} f(x) dx.$$

Bewijs. Voor $p = 1$ werd deze uitdrukking reeds aangetoond. Veronderstel dat deze vergelijking voor p geldt, dan moet aangetoond worden dat ze ook voor $p + 1$ geldt. We beschouwen, net zoals in paragraaf 1.6, de functie $f^{(-1)}(t)$:

$$f^{(-1)}(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Uiteraard geldt het volgende:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(-1)}(t) - f^{(-1)}(t-h)}{h} = f(t).$$

Hiermee kan het volgende herschreven worden:

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{p+1} \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f^{(-1)}(t-rh) - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f^{(-1)}(t-(r+1)h). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Om deze som te herschrijven, gebruiken we volgende eigenschap:

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix}.$$

Deze wordt bekomen door gebruik te maken van de eigenschap (1.22) en formule van Stifel-Pascal:

$$\binom{p}{r} = \binom{p-1}{r-1} + \binom{p-1}{r}.$$

Hierbij stellen we $\begin{bmatrix} p+1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$. Vervolgens herschrijven we (1.23):

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f^{(-1)}(t-rh) + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \left(h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f^{(-1)}(t-rh) - h^p \sum_{r=1}^{n+1} \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f^{(-1)}(t-rh) \right) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f^{(-1)}(t-rh) + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \left(h^p \begin{bmatrix} p+1 \\ -1 \end{bmatrix} f^{(-1)}(t) - h^p \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} f^{(-1)}(t-(n+1)h) \right) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f^{(-1)}(t-rh) - (t-a)^p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} f^{(-1)}\left(a - \frac{t-a}{n}\right). \end{aligned}$$

Om de eerste term te vereenvoudigen, maken we gebruik van de inductiehypothese:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f^{(-1)}(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-x)^{p-1} f^{(-1)}(x) dx.$$

Vervolgens kunnen we gebruikmaken van de [Cauchy-formule voor meervoudige integratie](#) (Stelling 1.29), waardoor deze term zich herleidt tot:

$$\frac{1}{p!} \int_a^t (t-x)^p f(x) dx.$$

Voor de tweede term merken we eenvoudigweg het volgende op:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(-1)}\left(a - \frac{t-a}{n}\right) = f^{(-1)}(a) = 0.$$

Eveneens geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \frac{(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}{n!} = \frac{1}{p\Gamma(p)} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}.$$

Hierdoor valt deze tweede term weg en is het gestelde bewezen. □

Dankzij Stelling 1.32, kan men concluderen dat ${}^{\text{GL}}D_t^p f(t)$ (zie Definitie 1.27) ook gedefinieerd kan worden voor gehele $p < 0$. Men kan deze uitdrukking eveneens veralgemenen voor reële waarden van p .

Definitie 1.33. De Grünwald-Letnikov fractionele integraal van p -de orde (met $p > 0$) wordt gedefinieerd als:

$${}^{\text{GL}}D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n (-1)^r \begin{bmatrix} -p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh).$$

Analoog kan men een Riemann-Liouville fractionele integraal definiëren a.d.h.v. de [Cauchy-formule voor meervoudige integratie](#) (Stelling 1.29), door n te vervangen door een reële $p > 0$.

Definitie 1.34. De Riemann-Liouville fractionele integraal van orde $p > 0$ wordt gedefinieerd als:

$${}^{\text{RL}}D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau.$$

1.8 Caputo fractionele afgeleiden

Beschouw een fractioneel beginwaardeprobleem van de volgende vorm (met $p \in]0, 1[$ en $t > 0$):

$${}^{\text{RL}}_0 D_t^p y(t) = f(t, y).$$

Bij dit probleem hoort typisch ook een beginvoorwaarde die een fractionele afgeleide van juist één orde lager omvat (in dit geval dus een fractionele integraal):

$$\lim_{t \rightarrow 0} ({}^{\text{RL}}_0 D_t^{p-1} y(t)) = c.$$

Vaak is het echter wenselijk (bijvoorbeeld voor de interpreteerbaarheid) dat de beginvoorwaarden geformuleerd worden a.d.h.v. afgeleiden van gehele ordes. Concreet zou men in dit geval eerder opteren voor een beginvoorwaarde van de volgende vorm:

$$y(0) = c.$$

De Italiaan M. Caputo stelde voor het eerst een aangepaste definitie van fractionele afgeleiden voor in zijn artikel [4], waarbij de beginvoorwaarden geformuleerd kunnen worden a.d.h.v. afgeleiden van een gehele orde.

Definitie 1.35. De **Caputo fractionele afgeleide** van orde $k - \alpha$ (met $0 < \alpha < 1$ en $k \in \mathbb{N}_0$) wordt gedefinieerd als:

$${}_a^C D_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f^{(k)}(\tau) d\tau.$$

Indien $p = k - \alpha$ gesteld wordt, geldt (met $k - 1 < p < k$):

$${}_a^C D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f^{(k)}(\tau) d\tau.$$

Merk op dat in deze definitie $0 < \alpha < 1$ werd genomen, zodat $p = k - \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$. Echter, als $p \underset{<}{\rightarrow} k$ (of equivalent, $\alpha \underset{>}{\rightarrow} 0$), zal de Caputo fractionele afgeleide overeenkomen met een 'gewone' afgeleide van natuurlijke orde.

De volgende stelling illustreert dit:

Stelling 1.36. Zij $k \in \mathbb{N}_0$, dan geldt^a:

$$\lim_{p \underset{<}{\rightarrow} k} {}_a^C D_t^p f(t) = f^{(k)}(t).$$

^aHierbij wordt verondersteld dat de functie $f(t)$ continue en begrensde afgeleiden van orde $1, \dots, k + 1$ heeft in het interval $[a, T]$, voor elke $T > a$.

Bewijs. Door partiële integratie toe te passen en door gebruik te maken van de eigenschappen van de gammafunctie geldt:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow k} {}^C D_t^p f(t) &= \lim_{p \rightarrow k} \left(\frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f^{(k)}(\tau) d\tau \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow k} \left(\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(k-p+1)} \int_a^t (t-\tau)^{k-p} f^{(k+1)}(\tau) d\tau \right) \\ &= f^{(k)}(a) + \int_a^t f^{(k+1)}(\tau) d\tau \\ &= f^{(k)}(t). \end{aligned}$$

□

Opmerking 1.37. Indien $p \rightarrow k-1$ (of equivalent, $\alpha \rightarrow 1$) in Definitie 1.35, geldt het volgende:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow k-1} {}^C D_t^p f(t) &= \lim_{p \rightarrow k-1} \left(\frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f^{(k)}(\tau) d\tau \right) \\ &= \int_a^t f^{(k)}(\tau) d\tau \\ &= f^{(k-1)}(t) - f^{(k-1)}(a). \end{aligned}$$

Er is een belangrijk verschil tussen Riemann-Liouville en Caputo fractionele afgeleiden indien men de fractionele afgeleide van een constante beschouwt. De Caputo fractionele afgeleide van p -de orde ($p > 0$) van een constante c is gelijk aan 0:

$${}^C D_t^p c = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} \cdot 0 d\tau = 0. \tag{1.24}$$

Dit geldt echter niet voor Riemann-Liouville fractionele afgeleiden in het geval van een eindige waarde voor de terminal a . De Riemann-Liouville fractionele afgeleide van p -de orde ($p > 0$) van een constante c is gelijk aan:

$$\begin{aligned} {}^{RL} D_t^p c &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} c d\tau \\ &= \frac{c}{\Gamma(k-p+1)} \frac{d^k}{dt^k} (t-a)^{k-p} \\ &= \frac{c \cdot (t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Indien $a \rightarrow -\infty$ wordt gekozen, zien we dat in (1.25) de Riemann-Liouville fractionele afgeleide gelijk aan 0 zal worden, wat wenselijk is voor fysische toepassingen.

1.9 Relatie tussen fractionele afgeleiden

In deze paragraaf wordt de relatie tussen Grünwald-Letnikov en Riemann-Liouville fractionele afgeleiden bewezen, alsook de relatie tussen Caputo en Riemann-Liouville fractionele afgeleiden.

Veronderstel dat voor de functie $f(t)$ geldt dat ze $n - 1$ keer continu afleidbaar is in het interval $[a, T]$ en dat $f^{(n)}(t)$ integreerbaar is over $[a, T]$. Dan valt voor alle p (met $0 < p < n$) de Riemann-Liouville fractionele afgeleide ${}^{\text{RL}}_a D_t^p$ samen met de Grünwald-Letnikov fractionele afgeleide ${}^{\text{GL}}_a D_t^p$. I.h.b. geldt het volgende verwantschap (Podlubný [17], paragraaf 2.3.7, pagina 75 e.v.):

Stelling 1.38 (Relatie tussen Grünwald-Letnikov en Riemann-Liouville fractionele afgeleiden). Het volgende verband geldt (met $0 \leq m - 1 \leq p < m \leq n$ en $a < t < T$):

$${}^{\text{RL}}_a D_t^p f(t) = {}^{\text{GL}}_a D_t^p f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p}}{\Gamma(1+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{p-m+1}}. \quad (1.26)$$

Bewijs. Het is enerzijds duidelijk dat het rechterlid van (1.26) gelijk is aan de Grünwald-Letnikov fractionele afgeleide ${}^{\text{GL}}_a D_t^p f(t)$ wegens Stelling 1.28. Anderzijds kan dit rechterlid nog als volgt herschreven worden, wegens Afleiden onder het integraalteken (Stelling 1.3):

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p}}{\Gamma(1+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{p-m+1}} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{1+j-p}}{(1+j-p) \cdot \Gamma(1+j-p)} + \frac{1}{(m-p) \cdot \Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m)}(\tau) d\tau \right) \\ & \quad \vdots \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{m+j-p}}{\Gamma(1+m+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(2m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Vervolgens wordt m keer partiële integratie toegepast om de integraal te herschrijven:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(2m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\ &= -\frac{f^{(m-1)}(a)(t-a)^{2m-p}}{\Gamma(2m-p-1)} + \frac{1}{\Gamma(2m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{2m-p-2} f^{(m-1)}(\tau) d\tau \\ & \quad \vdots \\ &= -\sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{m+j-p}}{\Gamma(1+m+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Hierdoor kan (1.27) als volgt herschreven worden:

$$\frac{1}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau = {}^{\text{RL}}_a D_t^p f(t).$$

□

In het boek *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* van Kilbas et al. [12] is de volgende relatie tussen Caputo en Riemann-Liouville fractionele afgeleiden te vinden (pagina 91):

Stelling 1.39 (Relatie tussen Caputo en Riemann-Liouville fractionele afgeleiden).

Het volgende verband geldt (met $p > 0$ en $k - 1 < p < k$ voor een zekere $k \in \mathbb{N}_0$):

$${}^C_a D_t^p f(t) = {}^{RL}_a D_t^p \left(f(t) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (t-a)^i \right).$$

Bewijs. Wegens de definitie van Riemann-Liouville fractionele afgeleiden (Definitie 1.31) geldt:

$$\begin{aligned} {}^{RL}_a D_t^p \left(f(t) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (t-a)^i \right) &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} \left(f(\tau) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (\tau-a)^i \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \left\{ \left[-\frac{(t-\tau)^{k-p}}{k-p} \left(f(\tau) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (\tau-a)^i \right) \right]_{\tau=a}^{\tau=t} \right. \\ &\quad \left. + \int_a^t \frac{(t-\tau)^{k-p}}{k-p} \frac{d}{d\tau} \left(f(\tau) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (\tau-a)^i \right) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Voor de tweede gelijkheid werd partiële integratie toegepast. Vervolgens kan dit verder vereenvoudigd worden met behulp van [Afleiden onder het integraalteken](#) (Stelling 1.3):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t \frac{(t-\tau)^{k-p}}{k-p} \left(f^{(1)}(\tau) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-1)!} (\tau-a)^{i-1} \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left\{ \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{(t-\tau)^{k-p}}{k-p} \left(f^{(1)}(\tau) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-1)!} (\tau-a)^{i-1} \right) d\tau \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} \left(f^{(1)}(\tau) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-1)!} (\tau-a)^{i-1} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Door deze stappen meerdere keren te herhalen bekomt men het gestelde:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} \left(f^{(1)}(\tau) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-1)!} (\tau-a)^{i-1} \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} \left(f^{(2)}(\tau) - \sum_{i=2}^{k-1} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-2)!} (\tau-a)^{i-2} \right) d\tau \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} \left(f^{(k-1)}(\tau) - f^{(k-1)}(a) \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f^{(k)}(\tau) d\tau = {}^C_a D_t^p f(t). \end{aligned}$$

□

Hieruit volgt dat de Caputo en Riemann-Liouville fractionele afgeleiden samenvallen als $f(t)$ en de eerste $k - 1$ afgeleiden van $f(t)$ (met $k - 1 < p < k$) gelijk zijn aan 0 voor $t = a$.

1.10 Voorbeeld van fractionele afgeleiden

In deze paragraaf wordt een beknopt overzicht gegeven van de fractionele afgeleiden van constanten en machtsfuncties. Voor de eenvoud stellen we de terminal $a = 0$.

Fractionele afgeleide van een constante

De Riemann-Liouville fractionele afgeleide van een constante c werd reeds berekend in §1.8. Wegens (1.25) en de [Relatie tussen Grünwald-Letnikov en Riemann-Liouville fractionele afgeleiden](#) (Stelling 1.38) geldt:

$$\boxed{{}^{\text{GL}}_0D_t^p c = {}^{\text{RL}}_0D_t^p c = \frac{c \cdot t^{-p}}{\Gamma(1-p)}}. \quad (1.28)$$

Voor de Caputo fractionele afgeleide geldt (1.24):

$$\boxed{{}^{\text{C}}_0D_t^p c = 0}. \quad (1.29)$$

Fractionele afgeleide van een machtsfunctie

Per definitie van een Riemann-Liouville fractionele afgeleide van orde p geldt (voor $\gamma > -1$)⁴:

$${}^{\text{RL}}_0D_t^p t^\gamma = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^t \tau^\gamma (t-\tau)^{k-p-1} d\tau.$$

Wegens Stelling 2.17 (cf. infra) kan de bovenstaande uitdrukking nog als volgt herschreven worden:

$$\begin{aligned} {}^{\text{RL}}_0D_t^p t^\gamma &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(k-p)}{\Gamma(\gamma+1+k-p)} t^{\gamma+k-p} \right) \\ &= (\gamma+k-p) \cdot \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+k-p)} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} (t^{\gamma+k-1-p}) \\ &\quad \vdots \\ &= (\gamma+k-p) \cdots (\gamma-p+1) \cdot \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+k-p)} t^{\gamma-p} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-p+1)} t^{\gamma-p}. \end{aligned}$$

De volgende formule werd dus aangetoond:

$$\boxed{{}^{\text{RL}}_0D_t^p t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-p+1)} t^{\gamma-p} \quad \gamma > -1}. \quad (1.30)$$

Wegens de [Relatie tussen Caputo en Riemann-Liouville fractionele afgeleiden](#) (Stelling 1.39) geldt:

$${}^{\text{C}}_0D_t^p t^\gamma = {}^{\text{RL}}_0D_t^p \left(t^\gamma - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(t^\gamma)^{(i)}(0)}{i!} t^i \right).$$

⁴De voorwaarde $\gamma > -1$ is nodig voor de convergentie van de integraal.

Hierbij is $k \in \mathbb{N}_0$ zodanig dat $k - 1 < p < k$. Stel $\gamma > k - 1$. Aangezien dan $(t^\gamma)^{(i)}|_{t=0} = 0$ voor $i \leq k - 1 < \gamma$, geldt eveneens:

$${}^C_0D_t^p t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - p + 1)} t^{\gamma-p} \quad k - 1 < p < k, \gamma > k - 1. \tag{1.31}$$

Analoog geldt de formule (1.30) niet in het algemeen voor Grünwald-Letnikov fractionele afgeleiden, want in sommige gevallen divergeert de som in Definitie 1.27. De formule (1.30) is wel geldig voor Grünwald-Letnikov fractionele afgeleiden indien $k - 1 \leq p < k$ en $\gamma > k - 1$ voor een zekere $k \in \mathbb{N}_0$ (zodat de Relatie tussen Grünwald-Letnikov en Riemann-Liouville fractionele afgeleiden, Stelling 1.38, toepasbaar is).

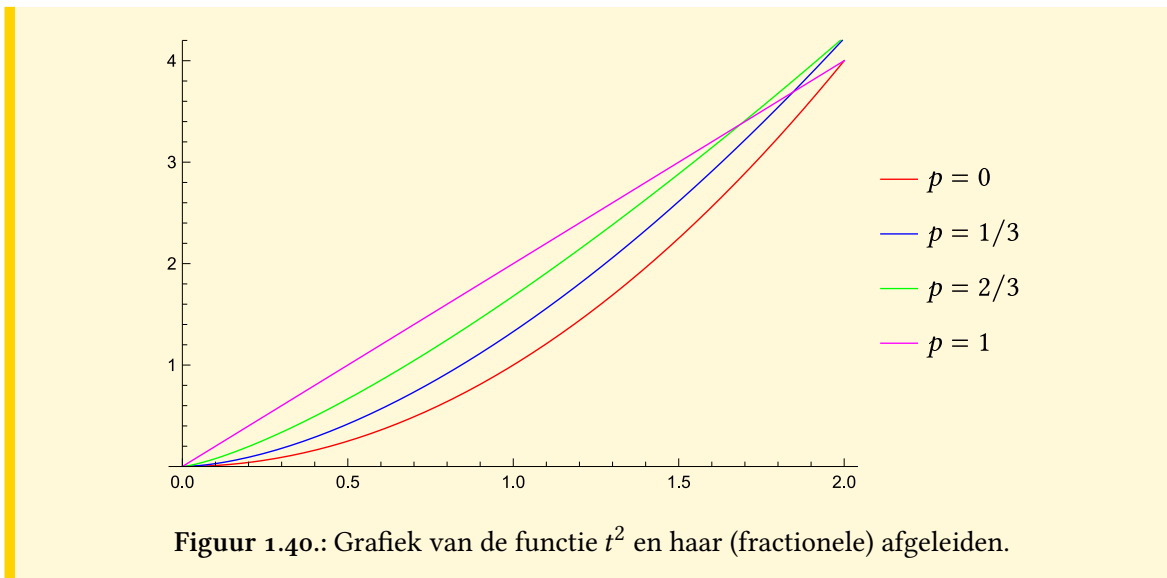
We bespreken het geval $\gamma = 2$. In dit geval wordt de fractionele afgeleide van t^γ gegeven door:

$$D_t^p t^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3 - p)} t^{2-p}.$$

In de tabel hiernaast wordt een overzicht gegeven van de (fractionele) afgeleiden van ordes $p \in \{0, 1/3, 2/3, 1\}$. Het is duidelijk dat de limieten die berekend werden in Stelling 1.36 en Opmerking 1.37 geldig zijn:

$$D_t^p t^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3 - p)} t^{2-p} = \begin{cases} 2t & p \rightarrow 1 \\ t^2 & p \rightarrow 0. \end{cases}$$

p	afgeleide
0	t^2
1/3	$\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(8/3)} t^{5/3} \approx 1.33 t^{5/3}$
2/3	$\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(7/3)} t^{4/3} \approx 1.68 t^{4/3}$
1	$2t$



Figuur 1.40.: Grafiek van de functie t^2 en haar (fractionele) afgeleiden.

2

De Laplacetransformatie

De Laplacetransformatie is een integraaltransformatie die vaak gebruikt wordt om beginwaardeproblemen op te lossen. Hierbij maakt men gebruik van de inverse Laplacetransformatie om een functie te achterhalen waarvan de Laplacegetransformeerde gekend is. Verder worden enkele algemene eigenschappen besproken (L. Debnath en D. Bhatta [6]) en daarna wordt de Laplacegetransformeerde berekend van bepaalde functies, alsook de Laplacegetransformeerde van Caputo fractionele afgeleiden (Podlubný [17]). In Hoofdstuk 3 zullen deze uitdrukkingen gebruikt worden om fractionele differentiaalvergelijkingen op te lossen (m.b.t. de Caputo fractionele afgeleide).

2.1 Definitie

De Laplacetransformatie wordt als volgt gedefinieerd:

Definitie 2.1 (Laplacetransformatie). De Laplacegetransformeerde $\mathcal{L}(f(t))(z)$ van een functie $f(t)$, met $z \in \mathbb{C}$ en $\Re(z) > 0$, wordt gedefinieerd als:

$$\mathcal{L}(f(t))(z) := \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt. \quad (2.1)$$

Uit de definitie volgt onmiddellijk dat de Laplacetransformatie een **lineaire transformatie** is.

De Laplacegetransformeerde wordt uiteraard enkel gedefinieerd als deze bestaat, i.e. als de integraal (2.1) in de definitie convergent is. Een belangrijke klasse van functies waarvoor de integraal (2.1) convergent is, zijn de functies van exponentiële groei.

Definitie 2.2. Een functie $f(t)$ wordt een **functie van exponentiële groei** genoemd indien er positieve reële constanten a, M bestaan zodat voor $t > 0$:

$$|f(t)| \leq Me^{at}.$$

Men kan vervolgens de convergentie aantonen:

Stelling 2.3. Zij $f(t)$ een (stuksgewijs) continue functie gedefinieerd op $]0, T[$. Veronderstel bovendien dat $f(t)$ een functie van exponentiële groei is. Dan bestaat de Laplacegetransformeerde $\mathcal{L}(f(t))(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $\Re(z) > a$.

Bewijs. De integraal (2.1) is (absoluut) convergent voor $\Re(z) > a$, want:

$$|\mathcal{L}(f(t))(z)| = \left| \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-\Re(z)t} |f(t)| dt \leq M \int_0^\infty e^{(a-\Re(z))t} dt = \frac{M}{\Re(z) - a}.$$

□

Het volgende voorbeeld zal nog van pas komen bij het berekenen van de Laplacetransformatie van fractionele afgeleiden.

Voorbeeld 2.4. De Laplacegetransformeerde van de functie t^{a-1} , met $a > 0$, is:

$$\mathcal{L}(t^{a-1})(z) = \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} dt = \frac{1}{z^a} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(a)}{z^a}.$$

Hierbij werd gebruikgemaakt van de substitutie $x = zt$. De vereenvoudiging van de integraal op de laatste regel volgt uit de definitie van de [Gammafunctie](#) (Definitie 1.14).

2.2 Inverse Laplacetransformatie

Uit de definitie van de [Laplacetransformatie](#) (Definitie 2.1) is het duidelijk dat de Laplacegetransformeerde (2.1) enkel afhangt van $f(t)$ voor positieve waarden van t . De Heaviside-functie $H(t)$ is hier enigszins conceptueel aan gerelateerd: wegens de onderstaande definitie zal $f(t)H(t) = 0$ voor $t < 0$, i.e. er zal enkel rekening gehouden worden met $f(t)$ voor positieve waarden van t .

Definitie 2.5 (Heaviside). De Heaviside-functie wordt als volgt gedefinieerd voor reële t :

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Wegens de [Fourier](#)-formule (Stelling 1.7) geldt voor een functie $f_1(x)$, die gedefinieerd wordt voor $-\infty < x < \infty$, dat:

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} dk \int_{-\infty}^\infty e^{-ikt} f_1(t) dt. \quad (2.2)$$

Stel $f_1(x) \equiv 0$ voor $-\infty < x < 0$ en voer de functie $f(x)$ als volgt in voor $x > 0$:

$$f_1(x) = e^{-cx} f(x).$$

Hierbij is c een strikt positieve reële constante. Nu kan (2.2) als volgt herschreven worden:

$$f(x) = \frac{e^{cx}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} dk \int_0^\infty e^{-t(c+ik)} f(t) dt. \quad (2.3)$$

Na de substitutie $z = c + ik$ (dus $dz = i dk$), kunnen we (2.3) opnieuw herschrijven:

$$f(x) = \frac{e^{cx}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{(z-c)x} dz \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt}_{=: F(z)}. \quad (2.4)$$

Merk op dat $\Re(z) = c > 0$ en het volgende geldt:

$$F(z) = \mathcal{L}(f(t))(z).$$

A.d.h.v. (2.4) kan de volgende definitie ingevoerd worden:

Definitie 2.6 (Inverse Laplacetransformatie). De inverse Laplacegetransformeerde $\mathcal{L}^{-1}(F(z))(t)$ wordt gedefinieerd als (met $c > 0$):

$$\mathcal{L}^{-1}(F(z))(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} F(z) dz. \quad (2.5)$$

Hierbij is $F(z) = \mathcal{L}(f(t))(z)$.

Opmerking 2.7. Het bepalen van de inverse Laplacegetransformeerde is doorgaans niet eenvoudig. Uiteraard kan men via een tabel Laplacegetransformeerden bijhouden en vervolgens deze tabel in een omgekeerde richting gebruiken om eenvoudige inversies te maken. Zo geldt wegens Voorbeeld 2.4 voor $a > 0$:

$$\mathcal{L}^{-1}(z^{-a})(t) = \frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}.$$

Vaak is het niet mogelijk om de functie te herschrijven naar elementaire functies. Men zou numeriek te werk kunnen gaan, maar het is vaak wenselijker om toch analytische uitdrukkingen te zoeken. Dit kan door evaluatie van de integraal (2.5), via de zogenaamde *Bromwich*-contour (zie bijvoorbeeld [6], pagina 173).

2.3 Eigenschappen

Uit de definitie van de *Heaviside*-functie (Definitie 2.5) volgt in het bijzonder dat $f(t-a)H(t-a) = 0$ voor $t < a$ en $f(t-a)H(t-a) = f(t-a)$ voor $t > a$. De volgende stelling gebruikt deze eigenschap:

Stelling 2.8. Voor reële $a > 0$ geldt:

$$\mathcal{L}(f(t-a)H(t-a))(z) = e^{-za} \mathcal{L}(f(t))(z).$$

Bewijs. Er geldt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t-a)H(t-a))(z) &= \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t-a)H(t-a) dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-zt} f(t-a) dt \\ &\stackrel{(*)}{=} e^{-za} \int_0^{\infty} e^{-z\tau} f(\tau) d\tau \\ &= e^{-za} \mathcal{L}(f(t))(z).\end{aligned}$$

Hierbij werd gebruikgemaakt van de substitutie $\tau = t - a$ op positie (*). □

Een andere eigenschap betreft de Laplacegetransformeerde van afgeleiden.

Stelling 2.9 (Laplacegetransformeerde van afgeleiden).

Zij $f(t)$ een continue functie van exponentiële groei (zodat de Laplacegetransformeerde bestaat, cf. Stelling 2.3) waarvoor geldt dat de afgeleiden $f'(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ eveneens continue functies van exponentiële groei zijn. Dan geldt:

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(z) = z^n \mathcal{L}(f(t))(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} f^{(k)}(0).$$

Bewijs. Deze stelling kan bewezen worden via inductie. Het geval $n = 0$ is triviaal en voor $n = 1$ geldt het volgende wegens partiële integratie:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t))(z) &= \int_0^{\infty} e^{-zt} f'(t) dt \\ &= e^{-zt} f(t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt \\ &= z \mathcal{L}(f(t))(z) - f(0).\end{aligned}$$

Analoog geldt voor $n + 1$ wegens de inductiehypothese:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f^{(n+1)}(t))(z) &= \int_0^{\infty} e^{-zt} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= e^{-zt} f^{(n)}(t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-zt} f^{(n)}(t) dt \\ &= z \mathcal{L}(f^{(n)}(t))(z) - f^{(n)}(0) \\ &= z \left(z^n \mathcal{L}(f(t))(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} f^{(k)}(0) \right) - f^{(n)}(0) \\ &= z^{n+1} \mathcal{L}(f(t))(z) - \sum_{k=0}^n z^{n-k} f^{(k)}(0).\end{aligned}$$

Dit bewijst het gestelde. □

Om eigenschappen te bewijzen, zal men vaak integralen schrijven als een convolutie. Een convolutie wordt in deze context als volgt gedefinieerd:

Definitie 2.10 (Convolutie). De convolutie van de functies $f(t)$ en $g(t)$ wordt gedefinieerd als:

$$(f * g)(t) := f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Als f en g *causale* functies zijn, i.e. als $f(t) = 0$ voor $t < 0$ en $g(t) = 0$ voor $t < 0$, verkrijgt men de gebruikelijke integraaluitdrukking voor de convolutie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Opmerking 2.11.

De convolutie is commutatief. Wegens substitutie $v = t - u$ geldt:

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t f(t - u)g(u) du \\ &= - \int_t^0 f(v)g(t - v) dv \\ &= \int_0^t f(v)g(t - v) dv \\ &= g(t) * f(t). \end{aligned}$$

Zij f en g continue functies gedefinieerd op \mathbb{R} waarvoor hun afgeleide eveneens continu is. Dan geldt niet noodzakelijk dat $(f * g)' = f' * g$. Inderdaad, wegens [Afleiden onder het integraalteken](#) (Stelling 1.3) geldt het volgende voor de afgeleide van een convolutie:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f * g)(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau \\ &= f(0)g(t) + \int_0^t f'(t - \tau)g(\tau) d\tau \\ &= f(0)g(t) + (f' * g)(t). \end{aligned}$$

Een veelgebruikte eigenschap van Laplacetransformaties is dat de Laplacegetransformeerde van een convolutie is gelijk aan het product van de Laplacegetransformeerden.

Stelling 2.12 (Laplacegetransformeerde van een convolutie). Zij $f(t)$ en $g(t)$ continue functies van exponentiële groei (zodat de Laplacegetransformeerde bestaat), dan geldt:

$$\mathcal{L}(f(t) * g(t)) = \mathcal{L}(f(t)) \mathcal{L}(g(t)).$$

Bewijs. Uit de definitie van een convolutie volgt:

$$\mathcal{L}(f(t) * g(t)) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau \right] dt. \quad (2.6)$$

De uitdrukking (2.6) kan nog herschreven worden m.b.v. de Stelling van Fubini en Stelling 2.8:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t) * g(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-zt} dt \int_0^{\infty} f(t-\tau)H(t-\tau)g(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} g(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t-\tau)H(t-\tau) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-z\tau} \mathcal{L}(f(t))(z) g(\tau) d\tau \\ &= \mathcal{L}(f(t)) \int_0^{\infty} e^{-z\tau} g(\tau) d\tau \\ &= \mathcal{L}(f(t)) \mathcal{L}(g(t)). \end{aligned}$$

□

2.4 Toepassingen

De volgende stelling is het analogon voor Caputo fractionele afgeleiden met terminal $a = 0$ van de Laplacegetransformeerde van afgeleiden (Stelling 2.9):

Stelling 2.13 (Laplacegetransformeerde van Caputo fractionele afgeleiden).

Zij $f(t)$ een continue functie van exponentiële groei (zodat de Laplacegetransformeerde bestaat, cf. Stelling 2.3) waarvoor geldt dat de afgeleiden $f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ eveneens continue functies van exponentiële groei zijn. Voor de Laplacegetransformeerde van de Caputo fractionele afgeleide van p -de orde (met $p > 0$ en $k-1 < p < k$ voor een zekere $k \in \mathbb{N}_0$) geldt:

$$\mathcal{L}({}_0^C D_t^p f(t))(z) = z^p \mathcal{L}(f(t))(z) - \sum_{i=0}^{k-1} z^{p-1-i} f^{(i)}(0).$$

Bewijs. Voor de Caputo fractionele afgeleide geldt per definitie:

$${}_0^C D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_0^t (t-\tau)^{k-p-1} f^{(k)}(\tau) d\tau.$$

Dit kan herschreven worden als een convolutie, i.e.:

$${}_0^C D_t^p f(t) = \frac{t^{k-p-1} * f^{(k)}(t)}{\Gamma(k-p)}.$$

Uit de Laplacegetransformeerde van een convolutie (Stelling 2.12) volgt:

$$\mathcal{L}({}_0^C D_t^p f(t))(z) = \frac{\mathcal{L}(t^{k-p-1})(z) \mathcal{L}(f^{(k)}(t))(z)}{\Gamma(k-p)}.$$

Gebruikmakend van Voorbeeld 2.4, kan dit vereenvoudigd worden:

$$\mathcal{L}\left({}_0^C D_t^p f(t)\right)(z) = z^{p-k} \mathcal{L}\left(f^{(k)}(t)\right)(z).$$

Uit de Laplacegetransformeerde van afgeleiden (Stelling 2.9) volgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left({}_0^C D_t^p f(t)\right)(z) &= z^{p-k} \left(z^k \mathcal{L}\left(f(t)\right)(z) - \sum_{i=0}^{k-1} z^{k-1-i} f^{(i)}(0) \right) \\ &= z^p \mathcal{L}\left(f(t)\right)(z) - \sum_{i=0}^{k-1} z^{p-1-i} f^{(i)}(0). \end{aligned}$$

□

In de volgende stelling wordt de Laplacegetransformeerde berekend van een uitdrukking die de **Functie van Mittag-Leffler met twee parameters** $E_{\alpha,\beta}(z)$ (Definitie 1.24) omvat. Een alternatief bewijs van deze stelling voor het geval $k = 0$ is terug te vinden in [11] (Lemma 3).

Stelling 2.14. Zij z zodanig dat $\Re(z) > 0$ en $|az^{-\alpha}| < 1$, dan geldt:

$$\mathcal{L}\left(t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm at^\alpha)\right)(z) = \frac{z^{\alpha - \beta} k!}{(z^\alpha \mp a)^{k+1}}. \quad (2.7)$$

Hierbij is $E_{\alpha,\beta}^{(k)}$ de k -de afgeleide naar de variabele a .

Bewijs. Zij z zodanig dat $|az^{-\alpha}| < 1$. We tonen eerst het volgende aan:

$$\mathcal{L}\left(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha)\right)(z) = \frac{z^{\alpha-\beta}}{z^\alpha \mp a}. \quad (2.8)$$

Er geldt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha)\right)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-zt} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\pm at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\pm a)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \underbrace{\int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha k + \beta - 1} dt}_{= \mathcal{L}\left(t^{\alpha k + \beta - 1}\right)(z)}. \end{aligned}$$

Het omwisselen van reeks en integraal op positie (*) is toegelaten wegens de Stelling van Fubini (absolute convergentie van de reeks). Gebruikmakend van Voorbeeld 2.4, kan deze uitdrukking verder vereenvoudigd worden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha)\right)(z) &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(\pm a)^k}{z^{\alpha k + \beta}} \\ &= \frac{1}{z^\beta} \sum_{k=0}^\infty \left(\pm \frac{a}{z^\alpha}\right)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{z^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\pm \frac{a}{z^\alpha} \right)^k \\
&= \frac{1}{z^\beta} \cdot \frac{1}{1 \mp \frac{a}{z^\alpha}} \\
&= \frac{z^{\alpha-\beta}}{z^\alpha \mp a}.
\end{aligned}$$

We leiden nu beide leden van (2.8) een k -tal keer af naar de variabele a . Voor het linkerlid van (2.8) wordt het volgende bekomen:

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{da^k} \mathcal{L} \left(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha) \right) (z) &= \frac{d^k}{da^k} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-zt} t^{\beta-1} (\pm t^\alpha)^k E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm at^\alpha) dt \\
&= (\pm 1)^k \mathcal{L} \left(t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm at^\alpha) \right) (z).
\end{aligned}$$

Voor het rechterlid van (2.8) bekomt men:

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{da^k} \left(\frac{z^{\alpha-\beta}}{z^\alpha \mp a} \right) &= z^{\alpha-\beta} \cdot \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} \left(\frac{\pm 1}{(z^\alpha \mp a)^2} \right) \\
&= z^{\alpha-\beta} \cdot \frac{d^{k-2}}{da^{k-2}} \left(\frac{(\pm 1)^2 2!}{(z^\alpha \mp a)^3} \right) \\
&\quad \vdots \\
&= z^{\alpha-\beta} \cdot \frac{(\pm 1)^k k!}{(z^\alpha \mp a)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Door beide leden aan elkaar te stellen is het gestelde (2.7) hierdoor bewezen:

$$\mathcal{L} \left(t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm at^\alpha) \right) (z) = \frac{z^{\alpha-\beta} k!}{(z^\alpha \mp a)^{k+1}}.$$

□

Het volgende kan nu bewezen worden:

Stelling 2.15 (Afgeleide van de functie van Mittag-Leffler met één parameter).

$$\frac{d}{dt} E_\alpha(\pm at^\alpha) = \pm at^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\pm at^\alpha).$$

Bewijs. Wegens de Laplacegetransformeerde van afgeleiden (Stelling 2.9) en Stelling 2.14 geldt:

$$\mathcal{L} \left(\frac{d}{dt} E_\alpha(\pm at^\alpha) \right) (z) = z \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha \mp a} - 1 = \frac{\pm a}{z^\alpha \mp a}.$$

Het rechterlid kan nog als volgt herschreven worden wegens Stelling 2.14:

$$\frac{\pm a}{z^\alpha \mp a} = \pm a \mathcal{L} \left(t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\pm at^\alpha) \right) (z).$$

Het gestelde volgt door toepassing van de inverse Laplacetransformatie. □

Een analoge uitdrukking voor een Caputo fractionele afgeleide van orde $0 < \alpha < 1$ kan eveneens gevonden worden:

Stelling 2.16 (Caputo fractionele afgeleide van de functie van Mittag-Leffler met één parameter). Zij $0 < \alpha < 1$. Dan geldt:

$${}^C_0D_t^\alpha E_\alpha(\pm at^\alpha) = \pm a E_\alpha(\pm at^\alpha).$$

Bewijs. Wegens de [Laplacegetransformeerde van Caputo fractionele afgeleiden](#) (Stelling 2.13), Stelling 2.14 en $E_\alpha(0) = 1$ geldt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left({}^C_0D_t^\alpha E_\alpha(\pm at^\alpha)\right)(z) &= z^\alpha \mathcal{L}\left(E_\alpha(\pm at^\alpha)\right)(z) - z^{\alpha-1} E_\alpha(0) \\ &= z^\alpha \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha \mp a} - z^{\alpha-1} \\ &= z^\alpha \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha \mp a} - z^{\alpha-1} \frac{z^\alpha \mp a}{z^\alpha \mp a} \\ &= z^{\alpha-1} \frac{z^\alpha - (z^\alpha \mp a)}{z^\alpha \mp a} \\ &= \pm a \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha \mp a}. \end{aligned}$$

Dit laatste kan nog als volgt herschreven worden wegens Stelling 2.14:

$$\pm a \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha \mp a} = \pm a \mathcal{L}\left(E_\alpha(\pm at^\alpha)\right)(z).$$

Het gestelde volgt door toepassing van de inverse Laplacetransformatie. \square

De volgende stelling kan eveneens bewezen worden via de Laplacetransformatie:

Stelling 2.17. Zij $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Dan geldt:

$$\int_0^t \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} d\tau = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} t^{\alpha+\beta-1}.$$

Bewijs. Noteer de integraal uit de formulering van de stelling als volgt:

$$b_{\alpha,\beta} := \int_0^t \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} d\tau.$$

Merk op dat $b_{\alpha,\beta}$ als een convolutie te schrijven is:

$$b_{\alpha,\beta} = t^{\alpha-1} * t^{\beta-1}.$$

Vervolgens nemen we de Laplacegetransformeerde van beide leden. Wegens de [Laplacegetransformeerde van een convolutie](#) (Stelling 2.12) geldt:

$$\mathcal{L}\left(b_{\alpha,\beta}\right)(z) = \mathcal{L}\left(t^{\alpha-1}\right)(z) \cdot \mathcal{L}\left(t^{\beta-1}\right)(z).$$

Dit kan nog herschreven worden met behulp van Voorbeeld 2.4:

$$\mathcal{L}(b_{\alpha,\beta})(z) = \frac{\Gamma(\alpha)}{z^\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{z^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{z^{\alpha+\beta}}.$$

Indien we nu de inverse Laplacegetransformeerde nemen van beide leden, bekomen we, opnieuw met behulp van Voorbeeld 2.4:

$$b_{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} t^{\alpha+\beta-1}.$$

□

Opmerking 2.18. Via Stelling 2.17 kan men een uitdrukking voor de bètafunctie (Definitie 1.19) vinden. Voor $t = 1$ geldt immers:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

3

Fractionele diffusievergelijkingen

Beschouw de volgende fractionele diffusievergelijking ($0 < \alpha < 1$) in de algemene vorm:

$$(D_t^\alpha u)(t) = -\mathcal{L}(u) + F(x, t). \quad (3.1)$$

Hierbij is $G \subset \mathbb{R}^n$ een open en begrensd gebied en $(x, t) \in \Omega_T := G \times]0, T[$. Voor deze vergelijking zullen we een beginvoorwaarde en randvoorwaarden (van Dirichlet) beschouwen.

$\mathcal{L}(u)$ wordt hierbij gegeven door:

$$\mathcal{L}(u) := -\operatorname{div}(p(x) \operatorname{grad} u) + q(x)u.$$

Hierbij is $0 < p(x) \in C^1(\bar{G})$ en $0 \leq q(x) \in C(\bar{G})$.

We zullen enkel het eindimensionale geval ($n = 1$) beschouwen. Aangezien we voor dit probleem enkel Caputo fractionele afgeleiden zullen aanwenden, wordt de volgende notatie gebruikt:

Notatie 3.1.

De Caputo fractionele afgeleide van orde α met terminal $a = 0$ zullen we noteren als D_t^α .

3.1 Eindimensionale diffusievergelijking

Stel $G =]0, L[\subset \mathbb{R}$. Beschouw het volgende eindimensionale fractionele beginwaardeprobleem:

$$(D_t^\alpha u)(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u + F(x, t) \quad x \in]0, L[, t \in]0, T[\quad (3.2)$$

$$u(0, t) = \phi_1(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.3)$$

$$u(L, t) = \phi_2(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.5)$$

De eerste vergelijking (3.2) stelt een niet-homogene eendimensionale fractionele diffusievergelijking voor. De voorwaarden (3.3)–(3.4) zijn randvoorwaarden van Dirichlet en (3.5) stelt de beginvoorwaarde voor.

Net zoals bij parabolische partiële differentiaalvergelijkingen, i.e. het geval $\alpha = 1$ in (3.2), kan het fractionele beginwaardeprobleem (3.2)–(3.5) omgezet worden naar een probleem met homogene randvoorwaarden. Hiervoor introduceren we de functie v , die als volgt gedefinieerd wordt:

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{x}{L} (\phi_1(t) - \phi_2(t)) - \phi_1(t).$$

We kunnen nu het fractionele beginwaardeprobleem (3.2)–(3.5) herformuleren:

$$(D_t^\alpha v)(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - q(x)v + F_1(x, t) \quad x \in]0, L[, t \in]0, T[\quad (3.6)$$

$$v(0, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.7)$$

$$v(L, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.8)$$

$$v(x, 0) = u_0(x) + \frac{x}{L} (\phi_1(0) - \phi_2(0)) - \phi_1(0) \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.9)$$

Hierbij is $F_1(x, t)$ als volgt gedefinieerd:

$$F_1(x, t) = F(x, t) + \frac{x}{L} (D_t^\alpha (\phi_1 - \phi_2))(t) - (D_t^\alpha \phi_1)(t) - \frac{\phi_1(t) - \phi_2(t)}{L} p'(x) + q(x) \left(\frac{x}{L} (\phi_1(t) - \phi_2(t)) - \phi_1(t) \right).$$

Op deze manier zijn de niet-homogene randvoorwaarden (3.3)–(3.4) voor u omgezet naar homogene randvoorwaarden voor de functie v . Aldus kan men zonder verlies van algemeenheid het fractionele beginwaardeprobleem (3.2)–(3.5) beschouwen met homogene randvoorwaarden, i.e.:

$$\phi_1(t) \equiv \phi_2(t) \equiv 0. \quad (3.10)$$

3.2 Scheiding van veranderlijken

Beschouw het fractionele beginwaardeprobleem (3.2)–(3.5) met $p(x) = a^2$ en $q(x) = 0$, voor een zekere $a > 0$. Dan heeft $\mathcal{L}(u)$ de volgende vorm:

$$\mathcal{L}(u) = -a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.11)$$

Stel $F(x, t) = 0$. Rekeninghoudend met (3.10) kunnen we de volgende vorm veronderstellen:

$$(D_t^\alpha u)(t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in]0, L[, t \in]0, T[\quad (3.12)$$

$$u(0, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.13)$$

$$u(L, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.14)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.15)$$

We zoeken een particuliere oplossing u van vergelijking (3.12) van de volgende vorm:

$$u(x, t) = T(t)X(x). \quad (3.16)$$

Hierbij wordt $(x, t) \in \tilde{\Omega}_T := [0, L] \times [0, T]$ verondersteld. Substitutie van (3.16) in (3.12) levert het volgende:

$$X(x) \cdot (D_t^\alpha T)(t) = a^2 T(t) X''(x).$$

Na scheiding van veranderlijken:

$$\frac{(D_t^\alpha T)(t)}{T(t)} = \frac{a^2 X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \quad (3.17)$$

Hierbij is $\lambda \in \mathbb{C}$ een constante, onafhankelijk van de veranderlijken t en x . Deze vergelijking (3.17), samen met randvoorwaarden (3.13)–(3.14), is equivalent met het volgende:

$$(D_t^\alpha T)(t) + \lambda T(t) = 0 \quad (3.18)$$

$$a^2 X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (3.19)$$

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (3.20)$$

Hierbij is de eerste vergelijking (3.18) een fractionele differentiaalvergelijking. Vergelijkingen (3.19)–(3.20) vormen samen een eigenwaardeprobleem. De karakteristieke vergelijking (Stelling 1.12) die bij dit eigenwaardeprobleem hoort wordt gegeven door:

$$r^2 + \frac{\lambda}{a^2} = 0. \quad (3.21)$$

Merk op dat (3.19) als volgt kan geschreven worden:

$$\mathcal{L}(X) = \lambda X.$$

De operator \mathcal{L} is zelftoegevoegd:

Opmerking 3.2.

In het eindimensionale geval wordt $\mathcal{L}(u)$ gegeven door:

$$\mathcal{L}(u) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(x) u.$$

Deze operator staat bekend als de **Sturm-Liouville operator**. Deze operator is **zelftoegevoegd**. Inderdaad, beschouw twee functies $u(x)$ en $v(x)$ die aan de randvoorwaarden^a (3.20) voldoen, i.e. $u(0) = u(L) = 0$ en $v(0) = v(L) = 0$, dan geldt (in verkorte notatie):

$$\begin{aligned} u\mathcal{L}(v) - v\mathcal{L}(u) &= -u(pv')' + quv + v(pu')' - quv \\ &= v(pu')' - u(pv')' \\ &= (vpu')' - v'pu' - (upv')' + u'pv' \\ &= (vpu')' - (upv')' \\ &= (p(vu' - uv'))'. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\langle \mathcal{L}(u), v \rangle = \langle u, \mathcal{L}(v) \rangle$ (integratie beide leden):

$$\langle u, \mathcal{L}(v) \rangle - \langle \mathcal{L}(u), v \rangle = [p(vu' - uv')]_0^L = 0.$$

Hierbij is $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het standaard inproduct in $L^2([0, L])$.

^aOok voor andere randvoorwaarden kan deze eigenschap aangetoond worden (enkel $[vu']_0^L = [uv']_0^L$ moet gelden).

Uit Stelling 1.11 volgt dat de eigenwaarden λ reëel zijn. Aldus kunnen we de gevallen $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ en $\lambda > 0$ onderscheiden.

- $\lambda < 0$

In dit geval zijn de oplossingen van (3.21) reëel en worden deze gegeven door $r_1 = -\sqrt{-\lambda}/a$ en $r_2 = \sqrt{-\lambda}/a$. Een algemene oplossing van (3.19) heeft dan de volgende vorm:

$$X(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}.$$

Deze oplossing voldoet aan de randvoorwaarden in (3.20) als en slechts als $A = B = 0$. In dat geval is echter $X(x) \equiv 0$, waaruit we besluiten dat de eigenwaarden niet negatief kunnen zijn.

- $\lambda = 0$

In dit geval heeft de karakteristieke vergelijking (3.21) een dubbelwortel 0, waardoor de algemene oplossing van (3.19) lineair is:

$$X(x) = Ax + B.$$

Rekeninghoudend met de randvoorwaarden in (3.20) bekommen we opnieuw dat $A = B = 0$, waardoor men kan besluiten dat 0 geen eigenwaarde is.

- $\lambda > 0$

In dit geval heeft de karakteristieke vergelijking (3.21) twee imaginaire oplossingen, namelijk $-\sqrt{\lambda}i/a$ en $\sqrt{\lambda}i/a$. Stel $r_1 = -\sqrt{\lambda}/a$ en $r_2 = \sqrt{\lambda}/a$. De algemene oplossing van (3.19) wordt gegeven door:

$$X(x) = A \cos(r_1 x) + B \sin(r_2 x).$$

Uit de eerste randvoorwaarde van (3.20), i.e. $X(0) = 0$, volgt dat $A = 0$. Wegens de tweede randvoorwaarde van (3.20), i.e. $X(L) = 0$, geldt:

$$X(L) = B \sin(r_2 L) = 0.$$

Dit leidt tot (anders zou $X(x) \equiv 0$):

$$\sin(r_2 L) = 0. \tag{3.22}$$

De oplossingen van de goniometrische vergelijking $\sin(x) = 0$ worden gegeven door:

$$x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De oplossingen die voldoen aan (3.22) worden gegeven door (wegens $r_2 = \sqrt{\lambda}/a$ en $\lambda > 0$):

$$\lambda_n = \frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.23)$$

Uit deze bespreking volgt dat de volgende eigenfuncties X_n (met $n \in \mathbb{N}_0$) horen bij de positieve eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ van het eigenwaardeprobleem (3.19)–(3.20):

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a} x\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.24)$$

Merk hierbij op dat deze uitdrukking onafhankelijk is van a . Vervolgens bepalen we de oplossing van de fractionele differentiaalvergelijking (3.18). Hiervoor passen op beide leden van (3.18) de Laplacetransformatie toe:

$$\mathcal{L}(D_t^\alpha T)(z) + \lambda \mathcal{L}(T)(z) = 0.$$

Wegens de Laplacegetransformeerde van Caputo fractionele afgeleiden (Stelling 2.13) kunnen we dit als volgt herschrijven:

$$z^\alpha \mathcal{L}(T)(z) - z^{\alpha-1} T(0) + \lambda \mathcal{L}(T)(z) = 0.$$

Hierdoor vinden we een uitdrukking voor de Laplacegetransformeerde van $T(t)$:

$$\mathcal{L}(T)(z) = \frac{z^{\alpha-1} T(0)}{z^\alpha + \lambda}.$$

Deze Laplacegetransformeerde heeft dezelfde vorm als (2.7) (Stelling 2.14), waardoor we via de inverse Laplacetransformatie een uitdrukking voor $T(t)$ bekomen:

$$T(t) = E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) T(0). \quad (3.25)$$

De oplossingen T_n voor elke $\lambda = \lambda_n$ worden dan gegeven door:

$$T_n(t) = c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha).$$

Hierbij is E_α de *Functie van Mittag-Leffler met één parameter* (Definitie 1.22) en werd $c_n = T_n(0)$ gesteld. Aldus wordt een oplossing van (3.12) die aan de randvoorwaarden (3.13)–(3.14) voldoet gegeven door (met $n = 1, 2, \dots$):

$$u_n(x, t) = c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) X_n(x). \quad (3.26)$$

Vervolgens kan men verschillende oplossingen van de vorm (3.26) combineren: de som van deze oplossingen is eveneens een oplossing van (3.12) die voldoet aan de randvoorwaarden (3.13)–(3.14). Hieruit kan men bovendien een *formele* oplossing u construeren die aan de beginvoorwaarde (3.15) voldoet. Merk daarvoor eerst op dat de rij $(X_n / \langle X_n, X_n \rangle)$ (met $n \in \mathbb{N}_0$) orthonormaal is. De orthogonaliteit volgt uit:

$$\langle X_m, X_n \rangle = \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad m \neq n.$$

Om de normalisatiefactor expliciet te bepalen, merken we het volgende op:

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{2} \int_0^L dx = \frac{1}{2} \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L 2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \langle X_n, X_n \rangle.$$

De rij (X_n) (met $n \in \mathbb{N}_0$) is bovendien volledig (Lemma 3.3).

Lemma 3.3. De rij $X_1(x), X_2(x), X_3(x), \dots$ is volledig in $L^2([0, L])$.

Bewijs. We passen Stelling 1.9 toe. Veronderstel dat het volgende geldt voor $f \in L^2([0, L])$:

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Wegens de substitutie $u = \pi x/L$ is deze veronderstelling equivalent met de volgende:

$$\int_0^\pi f\left(\frac{Lu}{\pi}\right) \sin(nu) du = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.27)$$

Definieer de volgende oneven functie over $[-\pi, \pi]$:

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right) & 0 \leq x \leq \pi \\ -f\left(-\frac{Lx}{\pi}\right) & -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

Aangezien $g(x)$ een oneven functie is, geldt wegens de veronderstelling (3.27):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi g(u) \sin(nu) du &= 2 \int_0^\pi f\left(\frac{Lu}{\pi}\right) \sin(nu) du = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \\ \int_{-\pi}^\pi g(u) \cos(nu) du &= 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De functie g staat dus loodrecht op alle elementen van de verzameling $\{1, \sin(nx), \cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Wegens Stelling 1.10 volgt dat de elementen van deze verzameling een volledige orthogonale rij vormen. Daaruit volgt dat $g = 0$ wegens Stelling 1.9. Dan is ook $f = 0$, waardoor het gestelde bewezen is. \square

Aangezien de rij $(X_n / \langle X_n, X_n \rangle)$ een volledige orthonormale rij is, kan Stelling 1.8 toegepast worden. Een functie $f \in L^2([0, L])$ heeft dan de volgende Fourier-ontwikkeling:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle f, \frac{X_n}{\sqrt{\langle X_n, X_n \rangle}} \right\rangle \frac{X_n}{\sqrt{\langle X_n, X_n \rangle}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} X_n. \quad (3.28)$$

Voor $u_0 \in L^2([0, L])$ geldt dan in het bijzonder:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u_0, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} X_n.$$

Nu kan de *formele* oplossing van het fractionele beginwaardeprobleem bepaald worden. Een **formele oplossing** is een formele reeks die aan de voorwaarden van het beginwaardeprobleem voldoet.

Stelling 3.4. De formele oplossing van het fractionele beginwaardeprobleem (3.12)–(3.15) wordt gegeven door de volgende reeks:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u_0, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) X_n(x). \quad (3.29)$$

Hierbij is $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het standaard inproduct in $L^2([0, L])$ en zijn X_n (met $n \in \mathbb{N}_0$) de eigenfuncties die bij de eigenwaarden λ_n horen van het eigenwaardeprobleem (3.19)–(3.20).

Deze formele oplossing voldoet inderdaad aan de beginvoorwaarde (3.15), aangezien (3.29) voor $t = 0$ als volgt kan herschreven worden, daar $E_\alpha(0) = 1$:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u_0, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} X_n = u_0(x).$$

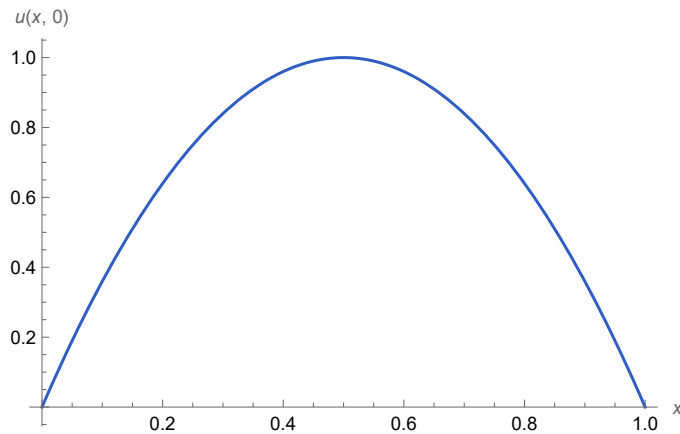
In het artikel [16] van Y. Luchko wordt aangetoond dat de oplossing uniek is.

In het volgende voorbeeld wordt een expliciete beginvoorwaarde gespecificeerd. Op deze manier kan de formele oplossing expliciet berekend worden.

Voorbeeld 3.5.

Voor het fractionele beginwaardeprobleem (3.12)–(3.15) leggen we de volgende parabolische beginvoorwaarde op:

$$u_0(x) = -\frac{b}{L}x^2 + bx \quad b \in \mathbb{R}. \quad (3.30)$$



Figuur 3.5.1: Parabolische beginvoorwaarde, $b = 4$ en $L = 1$.

Stel $s_n := n\pi/L$. We kunnen nu $\langle u_0, X_n \rangle$ expliciet berekenen:

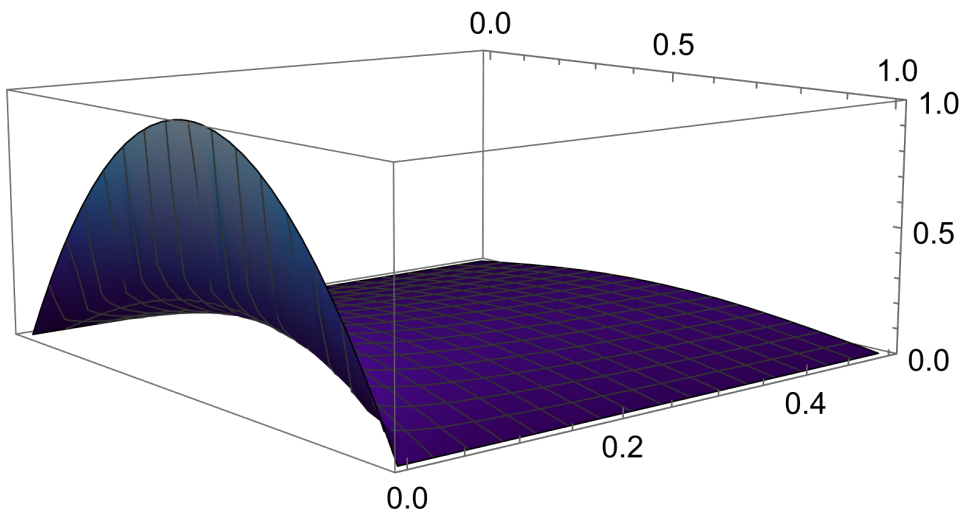
$$\begin{aligned} \langle u_0, X_n \rangle &= \int_0^L \left(-\frac{b}{L}x^2 + bx \right) \sin(s_n x) \, dx \\ &= \left[\left(-\frac{b}{L}x^2 + bx \right) \frac{1}{s_n} (-\cos(s_n x)) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \left(-\frac{2b}{L}x + b \right) \frac{1}{s_n} \cos(s_n x) \, dx \\ &= \left[\left(-\frac{2b}{L}x + b \right) \frac{1}{s_n^2} \sin(s_n x) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \frac{2b}{L} \frac{1}{s_n^2} \sin(s_n x) \, dx \\ &= \left[\frac{2b}{L s_n^3} (-\cos(s_n x)) \right]_{x=0}^{x=L} \\ &= \frac{2bL^2}{n^3 \pi^3} (1 - \cos(n\pi)). \end{aligned}$$

Aangezien $\langle X_n, X_n \rangle = L/2$, bekommen we de volgende coëfficiënten voor de reeks (3.29):

$$\frac{\langle u_0, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} = \begin{cases} 0 & \text{even } n \\ \frac{8bL}{n^3\pi^3} & \text{oneven } n. \end{cases}$$

De formele oplossing van het fractionele beginwaardeprobleem (3.12)–(3.15) met beginvoorwaarde (3.30) wordt dus gegeven door:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8bL}{(2n-1)^3\pi^3} E_{\alpha} \left(-\frac{((2n-1)\pi a)^2 t^{\alpha}}{L^2} \right) \sin \left(\frac{(2n-1)\pi x}{L} \right).$$



Figuur 3.5.2: Plot van $u(x, t)$ voor $x \in [0, L]$ en $t \in [0, 0.5]$. Hierbij is $\alpha = 1/2$, $a = 1$, $b = 4$ en $L = 1$.

Vanaf nu zal verondersteld worden dat de eigenvectoren X_i reeds orthonormaal zijn. We zullen deze orthonormale eigenvectoren als ψ_i noteren.

Opmerking 3.6. Door dezelfde procedures (mutatis mutandis) te volgen als hierboven beschreven, kan men bewijzen (zie [16], pagina 147) dat de formele oplossing van een meer algemene n -dimensionale fractionele diffusievergelijking zonder bron (i.e. (3.1) met $F(x, t) = 0$) met homogene randvoorwaarden gegeven wordt door:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_0, \psi_i \rangle E_{\alpha}(-\lambda_i t^{\alpha}) \psi_i(x).$$

Het bestaan van de eigenwaarden λ_i (met $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$) en bijbehorende orthonormale eigenfuncties ψ_i voor meer algemene $\mathcal{L}(X)$ wordt aangetoond in [24].

3.3 Diffusievergelijking met bron

De fractionele diffusievergelijking van een eendimensionaal beginwaardeprobleem met een bron $F(x, t)$ ziet er als volgt uit:

$$(D_t^\alpha u)(t) = -\mathcal{L}(u) + F(x, t) \quad x \in]0, L[, t \in]0, T[.$$

Veronderstel de volgende vorm (Stelling 1.8) voor $F \in C(\bar{\Omega}_T)$, waarbij $\bar{\Omega}_T = [0, L] \times [0, T]$:

$$F(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) \psi_i(x).$$

Hierbij zijn $\psi_i(x)$ de orthonormale eigenfuncties die bij het overeenkomstig eigenwaardeprobleem horen en is $f_i(t)$ als volgt gedefinieerd:

$$f_i(t) = \langle F, \psi_i \rangle = \int_0^L F(x, t) \psi_i(x) dx.$$

Voor elke T_i bekomen we de volgende niet-homogene fractionele differentiaalvergelijking:

$$\begin{cases} (D^\alpha T_i)(t) = -\lambda_i T_i(t) + f_i(t) \\ T_i(0) = c_i. \end{cases}$$

Wegens de [Laplacegetransformeerde van Caputo fractionele afgeleiden](#) (Stelling 2.13) kunnen we dit als volgt herschrijven:

$$z^\alpha \mathcal{L}(T_i(t))(z) - z^{\alpha-1} c_i = -\lambda \mathcal{L}(T_i(t))(z) + \mathcal{L}(f_i(t))(z).$$

Hierdoor vinden we een uitdrukking voor de Laplacegetransformeerde van $T_i(t)$:

$$\mathcal{L}(T_i(t))(z) = \frac{z^{\alpha-1} c_i}{z^\alpha + \lambda_i} + \frac{\mathcal{L}(f_i(t))(z)}{z^\alpha + \lambda_i}.$$

Net zoals in (3.25) besluiten we dat de eerste term in het rechterlid gelijk is aan $\mathcal{L}(c_i E_\alpha(-\lambda_i t^\alpha))(z)$. We kunnen wegens Stelling 2.14 de tweede term ook herschrijven. Er geldt:

$$\mathcal{L}(T_i(t))(z) = \mathcal{L}(c_i E_\alpha(-\lambda_i t^\alpha))(z) + \mathcal{L}(f_i(t))(z) \mathcal{L}(t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^\alpha))(z).$$

Wegens de [Laplacegetransformeerde van een convolutie](#) (Stelling 2.12) en de inverse Laplacetransformatie bekomen we de volgende uitdrukking voor $T_i(t)$:

$$\begin{aligned} T_i(t) &= c_i E_\alpha(-\lambda_i t^\alpha) + f_i(t) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^\alpha) \\ &= c_i E_\alpha(-\lambda_i t^\alpha) + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i \tau^\alpha) f_i(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

De formele oplossing van het fractionele beginwaardeprobleem met bron ziet er dus als volgt uit:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\langle u_0, \psi_i \rangle E_\alpha(-\lambda_i t^\alpha) + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i \tau^\alpha) f_i(t-\tau) d\tau \right) \psi_i(x). \quad (3.31)$$

3.4 Eigenschappen van de oplossing

De veronderstellingen voor de randvoorwaarden van Dirichlet (3.3)–(3.4) dat $\phi_1(t)$ en $\phi_2(t)$ gladde functies zijn, impliceren geenszins dat de oplossing u van het beginwaardeprobleem eveneens glad is. Dit fenomeen wordt uitvoerig besproken in het artikel [22]. In deze paragraaf worden enkele vaststellingen uit dit artikel i.v.m. de regulariteit van de oplossing besproken. Hiervoor is het nodig dat er extra regulariteitsvoorwaarden opgelegd worden op de beschouwde functies van het fractionele beginwaardeprobleem. Daartoe wordt een raamwerk geïntroduceerd a.d.h.v. fractionele machten van de operator \mathcal{L} , die voor het fractionele beginwaardeprobleem (3.12)–(3.15) werd gegeven door (3.11):

$$\mathcal{L}(u) = -a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Definitie 3.7. Voor de operator \mathcal{L} wordt $D(\mathcal{L}^\gamma)$ voor $\gamma \in \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$D(\mathcal{L}^\gamma) := \left\{ g \in L^2(0, L) : \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2\gamma} |\langle g, \psi_i \rangle|^2 < \infty \right\}.$$

Hierbij zijn ψ_i orthonormale eigenvectoren die bij de eigenwaarden $\lambda_i \in \mathbb{R}_0^+$ horen.

Beschouw een $g \in L^2(0, L)$. Dan is g wegens Stelling 1.8 als volgt te schrijven:

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, \psi_i \rangle \psi_i.$$

Wegens $\mathcal{L}(\psi_i) = \lambda_i \psi_i$ geldt dan:

$$\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle g, \psi_i \rangle \psi_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, \psi_i \rangle \mathcal{L}(\psi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle g, \psi_i \rangle \psi_i.$$

Eenzijds volgt uit de orthonormaliteit van de eigenfuncties ψ_i :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(g), g \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle g, \psi_i \rangle \psi_i, \sum_{k=1}^{\infty} \langle g, \psi_k \rangle \psi_k \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\lambda_i \langle g, \psi_i \rangle \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle g, \psi_k \rangle} \langle \psi_i, \psi_k \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\langle g, \psi_i \rangle|^2. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Anderzijds is, wegens partiële integratie en de randvoorwaarde $g(0) = g(L) = 0$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(g), g \rangle &= \langle -a^2 g'', g \rangle \\ &= a^2 \langle g', g' \rangle. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Uit (3.32) en (3.33) volgt dat:

$$g' \in L^2(0, L) \iff \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\langle g, \psi_i \rangle|^2 < \infty.$$

Aldus kan het volgende opgemerkt worden:

Opmerking 3.8. Voor $\gamma = 1/2$ is $D(\mathcal{L}^\gamma)$ gelijk aan de Sobolev-ruimte $H_0^1(0, L)$:

$$D(\mathcal{L}^{1/2}) = H_0^1(0, L).$$

Er wordt eveneens een norm gedefinieerd voor de ruimte $D(\mathcal{L}^\gamma)$:

Definitie 3.9. Zij $g \in D(\mathcal{L}^\gamma)$. Dan wordt $\|g\|_{\mathcal{L}^\gamma}$ als volgt gedefinieerd:

$$\|g\|_{\mathcal{L}^\gamma} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2\gamma} |\langle g, \psi_i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

In de vorige paragraaf werd de algemene oplossing van een fractioneel beginwaardeprobleem met bron gevonden. Uit (3.31) volgt dat de oplossing van het beginwaardeprobleem de volgende vorm heeft:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (\langle u_0, \psi_i \rangle E_\alpha(-\lambda_i t^\alpha) + J_i(t)) \psi_i(x). \quad (3.34)$$

Hierbij is $J_i(t)$ gelijk aan het volgende:

$$J_i(t) = \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_i \tau^\alpha) f_i(t - \tau) d\tau.$$

We veronderstellen bijkomend het volgende:

- $u_0 \in D(\mathcal{L}^{3/2})^1$,
- $F(\cdot, t) \in D(\mathcal{L}^{1/2})$ en $F_t(\cdot, t) \in D(\mathcal{L}^{1/2})$ voor alle $t \in [0, T]$,
- $\|F(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^{1/2}} \leq C$ voor een zekere $C \in \mathbb{R}^+$ en $t \in [0, T]$,
- $\|F_t(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^{1/2}} \leq Ct^{-\kappa}$ voor een zekere $C \in \mathbb{R}^+$ en $\kappa \in \mathbb{R}^+$ met $\kappa < 1$ en $t \in]0, T]$.

Wegens de vorm van de eigenfuncties, cf. (3.24) (zie ook [5], pagina 335), bestaat er een constante C_1 waarvoor $|\psi_i(x)| \leq C_1$ voor alle i . Wegens Opmerking 1.26 bestaat er een constante C_2 waarvoor $|E_\alpha(-\lambda_i t^\alpha)| \leq C_2$. Aldus bestaat er een positieve reële constante $C_3 := C_1 C_2$ waarvoor

$$|E_\alpha(-\lambda_i t^\alpha) \psi_i(x)| \leq C_3$$

voor alle i .

¹ Merk op dat $u_0 \in D(\mathcal{L}^{3/2})$ ook impliceert dat $u_0 \in D(\mathcal{L}^{1/2})$.

Een afchatting van de absolute waarde van de volgende termen van (3.34) kan hierdoor gegeven worden door (voor een zekere positieve reële constante C_4):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |\langle u_0, \psi_i \rangle E_{\alpha}(-\lambda_i t^{\alpha}) \psi_i(x)| &\leq C_3 \sum_{i=1}^{\infty} |\langle u_0, \psi_i \rangle| \\ &\leq C_3 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\langle u_0, \psi_i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_4. \end{aligned}$$

Wegens Stelling 1.13 volgt de tweede ongelijkheid. De laatste ongelijkheid geldt wegens $u_0 \in D(\mathcal{L}^{1/2})$ en omdat de eigenwaarden λ_i kwadratisch zijn, cf. (3.23): $\lambda_i \sim i^2$ (zie ook [5], pagina 415). Voor $N \rightarrow \infty$ geldt dan:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2} < 1 + \sum_{i=2}^N \frac{1}{i(i-1)} = 1 + \sum_{i=2}^N \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2. \quad (3.35)$$

Wegens Stelling 1.13, $F(\cdot, t) \in D(\mathcal{L}^{1/2})$ voor $t \in [0, T]$ en (3.35) bestaat er een positieve reële constante C_5 waarvoor (met $0 \leq \tau \leq t$):

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(t - \tau)| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i^2(t - \tau) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_5. \quad (3.36)$$

Zoals reeds aangehaald, is C_1 een positieve reële constante waarvoor $|\psi_i(x)| \leq C_1$. Wegens Opmerking 1.26 bestaat er een constante C_6 waarvoor $|E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_i \tau^{\alpha})| \leq C_6$ voor alle i . Hierdoor geldt de volgende afchatting voor $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |J_i(t) \psi_i(x)| &\leq C_1 \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \tau^{\alpha-1} |E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_i \tau^{\alpha})| |f_i(t - \tau)| \, d\tau \\ &\leq C_1 C_6 \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \tau^{\alpha-1} |f_i(t - \tau)| \, d\tau \\ &\leq C_1 C_6 \int_0^t \tau^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(t - \tau)| \, d\tau \\ &\leq C_1 C_5 C_6 \int_0^t \tau^{\alpha-1} \, d\tau \\ &= C_1 C_5 C_6 t^{\alpha} \\ &\leq C_1 C_5 C_6 T^{\alpha}. \end{aligned}$$

De reeks (3.34) is dus uniform begrensd:

$$|u(x, t)| \leq C_4 + C_1 C_5 C_6 T^{\alpha} =: C.$$

Vervolgens leiden we (3.34) termsgewijs af naar de variabele t . Wegens Stelling 2.15 en Afleiden onder het integraalteken (Stelling 1.3) geldt:

$$u_t(x, t) = - \sum_{i=1}^{\infty} \left[\langle u_0, \psi_i \rangle \lambda_i t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_i t^\alpha) + t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_i t^\alpha) f_i(0) + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_i \tau^\alpha) f_i'(t-\tau) d\tau \right] \psi_i(x). \quad (3.37)$$

Wegens $\lambda_i \sim i^2$ (cf. supra) en $u_0 \in D(\mathcal{L}^{3/2})$ geldt voor een zekere positieve reële constante C_7 :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i \langle u_0, \psi_i \rangle| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^3 |\langle u_0, \psi_i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_7.$$

Hieruit volgt, samen met $|E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_i t^\alpha) \psi_i(x)| \leq C_1 C_6$ voor alle i (cf. supra), dat het volgende geldt (met $t \in]0, T]$):

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle u_0, \psi_i \rangle \lambda_i t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_i t^\alpha) \psi_i(x)| \leq C_1 C_6 C_7 t^{\alpha-1}.$$

Voor de tweede term van (3.37) geldt analogoog, wegens (3.36):

$$\sum_{i=1}^{\infty} |t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_i t^\alpha) f_i(0) \psi_i(x)| \leq C_1 C_6 t^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(0)| \leq C_1 C_5 C_6 t^{\alpha-1}.$$

Voor de derde term in (3.37), geldt wegens de veronderstelling dat $\|F_t(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^{1/2}} \leq C_8 t^{-\kappa}$ voor een constante C_8 met $\kappa < 1$ en $t \in]0, T]$. Er geldt dus:

$$\|F_t(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^{1/2}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\langle F_t, \psi_i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i'^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_8 t^{-\kappa}.$$

Op positie (*) werd gebruikgemaakt van de volgende gelijkheid:

$$|\langle F_t, \psi_i \rangle|^2 = \left| \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t) \psi_k, \psi_i \right\rangle \right|^2 = f_i'^2(t).$$

Hieruit volgt, wegens Stelling 1.13, dat er een positieve reële constante C_9 bestaat waarvoor:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i'(t-\tau)| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i'^2(t-\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_9 (t-\tau)^{-\kappa}.$$

Aangezien C_1 en C_6 positieve reële constanten zijn waarvoor $|\psi_i(x)| \leq C_1$ en $|E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_i \tau^\alpha)| \leq C_6$ voor alle i , geldt voor $t \in]0, T]$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \psi_i(x) \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_i \tau^\alpha) f_i'(t-\tau) d\tau \right| &\leq C_1 C_6 \int_0^t \tau^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{\infty} |f_i'(t-\tau)| d\tau \\ &\leq C_1 C_6 C_9 \int_0^t \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{-\kappa} d\tau \\ &\leq C' t^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

De laatste ongelijkheid volgt wegens Stelling 2.17 (met parameters α en $\beta = 1 - \kappa$):

$$C_1 C_6 C_9 \int_0^t \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{-\kappa} d\tau = C_1 C_6 C_9 \underbrace{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\kappa)}{\Gamma(\alpha-\kappa+1)}}_{=:C'} t^{\alpha-\kappa} \leq C' t^{\alpha-1}.$$

Aldus kan men besluiten dat de reeks (3.37) uniform begrensd wordt ($C'' \in \mathbb{R}^+$):

$$|u_t(x, t)| \leq C'' t^{\alpha-1}.$$

We hebben de volgende stelling bewezen (zie [22], Theorem 2.1):

Stelling 3.10. Beschouw het volgende beginwaardeprobleem (met $0 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(x, t) &= -\mathcal{L}(u) + F(x, t) & x \in]0, L[, t \in]0, T[\\ u(0, t) &= 0 & 0 \leq t \leq T \\ u(L, t) &= 0 & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) &= u_0(x) & 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Hierbij wordt $\mathcal{L}(u)$ gegeven door (voor een vaste $a > 0$):

$$\mathcal{L}(u) = -a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Veronderstel dat $u_0 \in D(\mathcal{L}^{3/2})$, $F(\cdot, t) \in D(\mathcal{L}^{1/2})$, $F_t(\cdot, t) \in D(\mathcal{L}^{1/2})$ en veronderstel eveneens dat de volgende afchatting geldt:

$$\|F(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^{1/2}} + t^\kappa \|F_t(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^{1/2}} \leq C'.$$

Hierbij is $t \in]0, T]$, $\kappa \in \mathbb{R}^+$ een constante met $\kappa < 1$ en C' een constante onafhankelijk van t . Dan bestaat er een constante C waarvoor voor alle $(x, t) \in [0, L] \times]0, T]$ geldt:

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq C, \\ |u_t(x, t)| &\leq C t^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

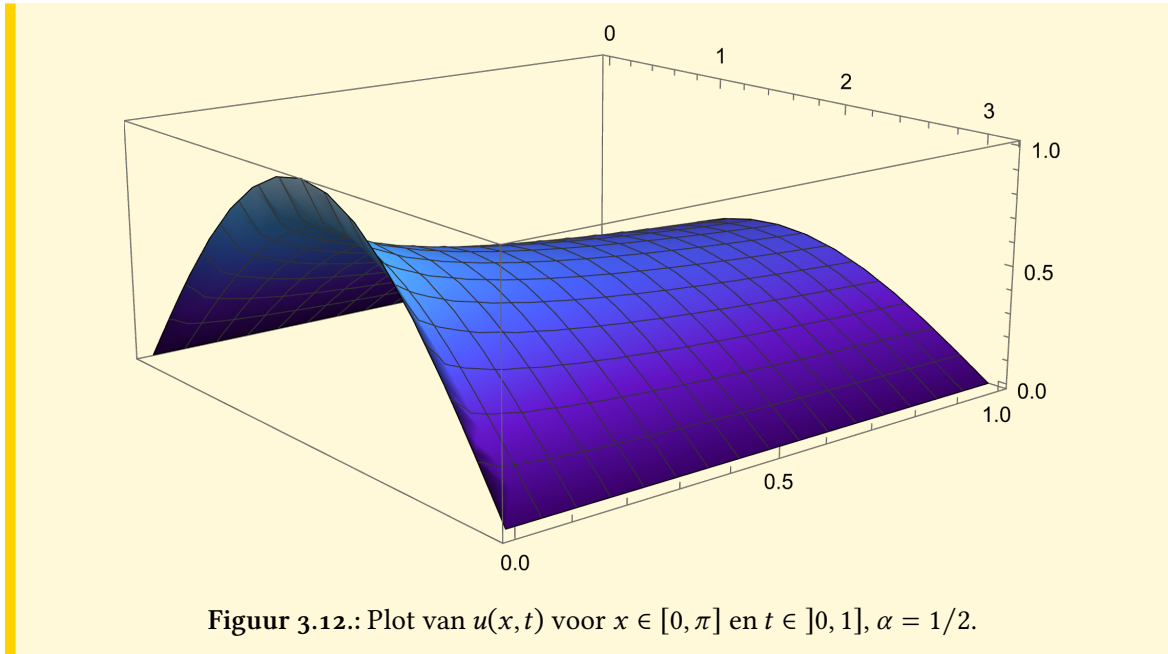
We beschouwen een voorbeeld om deze stelling te illustreren.

Voorbeeld 3.11. Beschouw het volgende fractionele beginwaardeprobleem ($0 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in]0, \pi[, t \in]0, 1[\\ u(0, t) &= 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ u(\pi, t) &= 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ u(x, 0) &= \sin x & 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

De exacte oplossing van het fractionele beginwaardeprobleem van Voorbeeld 3.11 wordt gegeven door (zie Figuur 3.12):

$$u(x, t) = E_{\alpha}(-t^{\alpha}) \sin x.$$



Inderdaad, wegens de Caputo fractionele afgeleide van de functie van Mittag-Leffler met één parameter (Stelling 2.16) geldt voor $u(x, t) = E_{\alpha}(-t^{\alpha}) \sin x$:

$$D_t^{\alpha} u(x, t) = \sin x D_t^{\alpha} E_{\alpha}(-t^{\alpha}) = -E_{\alpha}(-t^{\alpha}) \sin x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Stelling 3.10 wijst op een singulariteit voor $t = 0$: voor een zekere x zal $|u_t(x, 0)| \rightarrow \infty$ voor $t \rightarrow 0$.

4

Numerieke methoden

Een grote uitdaging bij het numeriek oplossen van fractionele beginwaardeproblemen ligt in de nauwkeurigheid en efficiëntie van de discretisatie van fractionele afgeleiden. Grofweg zijn er twee verschillende soorten numerieke discretisatiemethoden (m.b.t. de tijdsvariabele) [10]:

1. discrete convolutiebenaderingen, in de literatuur ook bekend als *convolutiekwadratuur*,
2. differentiemethoden, zoals bijvoorbeeld de L^1 -benadering.

De eerste methode steunt op het benaderen van Riemann-Liouville fractionele afgeleiden, terwijl de tweede methode de Caputo fractionele afgeleide direct stuksgewijs benadert. Deze twee benaderingen hebben hun voor- en nadelen: de eerste benadering is vrij flexibel en vaak gemakkelijker te analyseren, maar vaak beperkt tot een uniforme verdeling van het discretisatierooster. De differentiemethoden zijn daarentegen wel gemakkelijk veralgemeenbaar naar niet-uniforme roosterverdelingen, maar zijn moeilijker te analyseren.

Deze numerieke methoden kunnen bijvoorbeeld geïmplementeerd worden a.d.h.v. het pakket FEnics¹ [2, 15], een gratis open-source pakket voor het automatisch en efficiënt oplossen van differentiaalvergelijkingen d.m.v. de eindige elementenmethode. In de volgende paragrafen wordt de werkwijze gevolgd die beschreven is in de documentatie van het FEniCS project, die online raadpleegbaar is of in boekvorm te verkrijgen is als *The FEniCS Book* [15].

We beschouwen een fractioneel beginwaardeprobleem van de volgende vorm ($0 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) & x \in \Omega :=]0, L[, t \in]0, T[\\ u(0, t) &= 0 & 0 \leq t \leq T \\ u(L, t) &= 0 & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) &= u_0(x) & 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

¹<https://fenicsproject.org/>

4.1 Discrete convolutiebenadering

In het artikel [23] worden discrete convoluties aangewend. Beschouw hiertoe eerst de Riemann-Liouville fractionele afgeleide (Definitie 1.31) van orde α (met $0 < \alpha < 1$ en terminal $a = 0$):

$${}^{\text{RL}}D_t^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \varphi(\tau) d\tau. \quad (4.1)$$

Wegens de [Relatie tussen Caputo en Riemann-Liouville fractionele afgeleiden](#) (Stelling 1.39) geldt:

$${}^{\text{C}}D_t^\alpha \varphi(t) = {}^{\text{RL}}D_t^\alpha (\varphi(t) - \varphi(0)).$$

Definieer $g_{1-\alpha}$ als volgt voor $t > 0$:

$$g_{1-\alpha}(t) := \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (4.2)$$

Merk op dat de integraal van de Riemann-Liouville fractionele afgeleide in de uitdrukking (4.1) als een convolutie met kern $g_{1-\alpha}$ te schrijven is, waardoor het volgende geldt:

$${}^{\text{C}}D_t^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} [t^{-\alpha} * (\varphi(t) - \varphi(0))] = \frac{d}{dt} [g_{1-\alpha}(t) * (\varphi(t) - \varphi(0))].$$

Om $D_t^\alpha u(x, t)$ op dezelfde manier als een convolutie te herschrijven, wordt ‘ $*$ ’ op de volgende manier geïntroduceerd in de context van functies met een ruimte- en tijdsvariabele:

Notatie 4.1.

Het convolutieproduct ‘ $*$ ’ met kern $g_{1-\alpha}$ zullen we in de context van functies $z(x, t)$ met een ruimte- en tijdsvariabele noteren als:

$$(g * z)(x, t) := (g_{1-\alpha} * z(x))(t) = \int_0^t g_{1-\alpha}(t-s)z(x, s) ds.$$

A.d.h.v. deze notatie kan men de fractionele Caputo afgeleide $D_t^\alpha u(x, t)$ die optreedt in een fractionele diffusievergelijking als een afgeleide van een convolutie herschrijven (hierbij is $u_0 = u(x, 0)$ voor $x \in [0, L]$):

$$D_t^\alpha u(x, t) = \partial_t (g * (u - u_0))(x, t).$$

Om deze convolutie te benaderen, voeren we de volgende definitie in:

Definitie 4.2 (Convolutiebenadering). Voor functies $k : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ en $v : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definieert men (met $i \geq 1$):

$$(k * v)(x, t_i) \approx (k * v)^{[i]}(x) := \sum_{l=1}^i k^{[i+1-l]}(x) v^{[l]}(x) \tau.$$

Voor $i = 0$ wordt de convolutie gegeven door:

$$(k * v)^{[0]}(x) := 0.$$

Vervolgens discretiseren we het tijdsinterval $[0, T]$ in $n \in \mathbb{N}$ equidistante deelintervallen $[t_{i-1}, t_i]$ met lengte $\tau = T/n$. Hierbij voeren we de volgende notatie in:

Notatie 4.3.

De evaluatie van een functie z op een tijdstip $t = t_i$, $0 \leq i \leq n$, noteren we als $z^{[i]}$.

De achterwaartse differentie om $\partial_t z(x, t_i)$ te benaderen ($1 \leq i \leq n$), noteren we als:

$$\delta z^{[i]}(x) := \frac{z^{[i]}(x) - z^{[i-1]}(x)}{\tau}.$$

Nu kan de Caputo fractionele afgeleide als volgt benaderd worden op het tijdstip $t = t_i$:

$$D_t^\alpha u^{[i]} \approx \sum_{l=1}^i g^{[i+1-l]} \delta u^{[l]} \tau. \quad (4.3)$$

Een discretisatie van de diffusievergelijking wordt gegeven door:

$$D_t^\alpha u^{[i]} = \nabla^2 u^{[i]} + F^{[i]}. \quad (4.4)$$

Indien we de vergelijkingen (4.3) en (4.4) combineren, bekommen we:

$$\sum_{l=1}^i g^{[i+1-l]} \delta u^{[l]} \tau = \nabla^2 u^{[i]} + F^{[i]}. \quad (4.5)$$

We wensen vergelijking (4.5) zodanig te herschrijven dat het linkerlid enkel de termen in de onbekende $u^{[i]}$ bevat en het rechterlid enkel de reeds bekende termen. Hiervoor werken we eerst het linkerlid van (4.5) verder uit:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^i g^{[i+1-l]} \delta u^{[l]} \tau &= \sum_{l=1}^i g^{[i+1-l]} (u^{[l]} - u^{[l-1]}) \\ &= g^{[1]} u^{[i]} - g^{[1]} u^{[i-1]} + \sum_{l=1}^{i-1} g^{[i+1-l]} (u^{[l]} - u^{[l-1]}). \end{aligned}$$

Nu kan vergelijking (4.5) herschreven² worden ($i = 1, 2, \dots$):

$$g^{[1]} u^{[i]} - \nabla^2 u^{[i]} = g^{[1]} u^{[i-1]} - \sum_{l=1}^{i-1} g^{[i+1-l]} (u^{[l]} - u^{[l-1]}) + F^{[i]}.$$

A.d.h.v. $u^{[0]}$ kunnen we $u^{[1]}$, $u^{[2]}$ enz. berekenen. We gebruiken de eindige elementenmethode om deze vergelijkingen op te lossen. We stellen hiervoor een zwakke formulering op. We zullen de vergelijking vermenigvuldigen met een testfunctie $v \in \hat{V} := H_0^1(\Omega)$ en partiële integratie toepassen. Indien we $u^{[i]}$ noteren als u , bekommen we de volgende zwakke formulering:

$$a(u, v) = L_i(v). \quad (4.6)$$

² Met de conventie dat $\sum_{l=1}^{i-1} g^{[i+1-l]} (u^{[l]} - u^{[l-1]}) = 0$ voor $i = 1$.

Hierbij is:

$$a(u, v) := \int_{\Omega} g^{[1]} uv + \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

$$L_i(v) := \int_{\Omega} \left(g^{[1]} u^{[i-1]} - \sum_{l=1}^{i-1} g^{[i+1-l]} (u^{[l]} - u^{[l-1]}) + F^{[i]} \right) v \, dx.$$

Om de bovenstaande variationele problemen op te lossen, moeten we over $u^{[0]}$ beschikken. We definiëren $u^{[0]}$ als de oplossing van het variationele probleem:

$$a_0(u, v) = L_0(v).$$

Hierbij is:

$$a_0(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx,$$

$$L_0(v) = \int_{\Omega} u_0 v \, dx.$$

Wanneer we dit variationele probleem oplossen, wordt $u^{[0]}$ de L^2 -projectie van u_0 in de eindige elementenruimte. Een tweede manier is om u_0 in deze ruimte te interpoleren (bijvoorbeeld a.d.h.v. Lagrange-interpolatie). Voor de implementatie zullen we opteren voor de tweede manier, aangezien deze manier het nauwkeurigste is.

4.2 L^1 -benadering

We discretiseren het tijdsinterval $[0, T]$ in $n \in \mathbb{N}$ deelintervallen $[t_{i-1}, t_i]$. We noteren $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ voor $i = 1, 2, \dots, n$. De L^1 -benadering voor Caputo fractionele afgeleiden $D_t^\alpha u(x, t_i)$ wordt gegeven door:

$$D_t^\alpha u(x, t_i) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} (t_i - s)^{-\alpha} \, ds$$

$$\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)}{\tau_{j+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - s)^{-\alpha} \, ds. \quad (4.7)$$

Merk op dat (4.7) nog als volgt te schrijven is:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{l=1}^i \frac{u(x, t_l) - u(x, t_{l-1})}{\tau_l} [(t_i - t_{l-1})^{1-\alpha} - (t_i - t_l)^{1-\alpha}].$$

Definieer nu $g(t)$ als volgt, in overeenstemming met (4.2):

$$g(t) := g_{2-\alpha}(t) = g_{1-(\alpha-1)}(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}. \quad (4.8)$$

Voor equidistante deelintervallen (i.e. deelintervallen $[t_{i-1}, t_i]$ met dezelfde lengte $\tau = T/n$) geldt:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(x, t_i) &\approx \sum_{l=1}^i \frac{u(x, t_l) - u(x, t_{l-1})}{\tau} [g(t_{i+1-l}) - g(t_{i-l})] \\ &= \tau^{-1} \left[g(t_1)u(x, t_i) - g(t_1)u(x, t_{i-1}) + \sum_{l=1}^{i-1} (u(x, t_l) - u(x, t_{l-1})) (g(t_{i+1-l}) - g(t_{i-l})) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Opmerking 4.4.

In de literatuur vindt men vaak alternatieve schrijfwijzen terug voor de L^1 -benadering van de Caputo afgeleide. Indien we (4.7) in de omgekeerde volgorde sommeren (t.t.z. de laatste termen van de som worden de eerste), ziet de som er als volgt uit:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{u(x, t_{i-j}) - u(x, t_{i-j-1})}{\tau_{i-j}} \int_{t_{i-j-1}}^{t_{i-j}} (t_i - s)^{-\alpha} ds.$$

Definieer $d_{i,j}$ als volgt:

$$d_{i,j} := \frac{(t_i - t_{i-j})^{1-\alpha} - (t_i - t_{i-j+1})^{1-\alpha}}{\tau_{i-j+1}} = \frac{1-\alpha}{\tau_{i-j+1}} \int_{t_{i-j}}^{t_{i-j+1}} (t_i - s)^{-\alpha} ds.$$

Dan is $D_t^\alpha u(x, t_i)$ nog als volgt te schrijven:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(x, t_i) &\approx \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{i-1} (u(x, t_{i-j}) - u(x, t_{i-j-1})) d_{i,j+1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\sum_{j=0}^{i-1} u(x, t_{i-j}) d_{i,j+1} - \sum_{j=1}^i u(x, t_{i-j}) d_{i,j} \right] \\ &= \frac{d_{i,1}}{\Gamma(2-\alpha)} u(x, t_i) - \frac{d_{i,i}}{\Gamma(2-\alpha)} u(x, t_0) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{i-1} u(x, t_{i-j}) (d_{i,j+1} - d_{i,j}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dit komt overeen met de uitdrukking voor de L^1 -benadering in [20].

Veronderstel nu dat de deelintervallen equidistant zijn. Definieer dan b_j als volgt:

$$b_j := \frac{\tau^\alpha \cdot d_{i,j+1}}{\Gamma(2-\alpha)} = \tau^\alpha \cdot \frac{\tau^{1-\alpha} ((j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau} = \frac{(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

In dit geval komt (4.10) overeen met de uitdrukking in [10]:

$$D_t^\alpha u(x, t_i) \approx \tau^{-\alpha} \left[b_0 u(x, t_i) - b_{i-1} u(x, t_0) + \sum_{j=1}^{i-1} u(x, t_{i-j}) (b_j - b_{j-1}) \right] =: L_i^1(u).$$

We stellen nu opnieuw de zwakke formulering op. We gebruiken hiervoor de notatie die ingevoerd werd in de vorige paragraaf. Een discretisatie van de diffusievergelijking op een tijdstip t_i wordt gegeven door:

$$D_t^\alpha u^{[i]} = \nabla^2 u^{[i]} + F^{[i]}.$$

De L^1 -benadering van de fractionele afgeleide wordt gegeven door (4.9). Door gelijkstelling wordt de volgende gelijkheid bekomen ($i = 1, 2, \dots$):

$$\tau^{-1} \left[g^{[1]} u^{[i]} - g^{[1]} u^{[i-1]} + \sum_{l=1}^{i-1} (u^{[l]} - u^{[l-1]}) (g^{[i+1-l]} - g^{[i-l]}) \right] = \nabla^2 u^{[i]} + F^{[i]}.$$

We kunnen deze gelijkheid opnieuw herschrijven zodat het linkerlid enkel de termen in de onbekende u_i bevat en het rechterlid enkel de reeds bekende termen³:

$$\tau^{-1} g^{[1]} u^{[i]} - \nabla^2 u^{[i]} = \tau^{-1} g^{[1]} u^{[i-1]} - \tau^{-1} \sum_{l=1}^{i-1} (u^{[l]} - u^{[l-1]}) (g^{[i+1-l]} - g^{[i-l]}) + F^{[i]}.$$

Net zoals in de vorige paragraaf kunnen we de volgende vorm veronderstellen voor de zwakke formulering (waarbij we opnieuw $u^{[i]}$ noteren als u):

$$a(u, v) = L_i(v). \quad (4.11)$$

Hierbij is:

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \tau^{-1} g^{[1]} uv + \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

$$L_i(v) := \int_{\Omega} \left(\tau^{-1} g^{[1]} u^{[i-1]} - \tau^{-1} \sum_{l=1}^{i-1} (u^{[l]} - u^{[l-1]}) (g^{[i+1-l]} - g^{[i-l]}) + F^{[i]} \right) v \, dx.$$

Net zoals in de vorige paragraaf beschreven, zullen we bij de implementatie opteren voor $u^{[0]}$ te interpoleren in de eindige elementenruimte.

4.3 Implementatie

De numerieke methoden kunnen geïmplementeerd worden in Python a.d.h.v. het softwarepakket FEniCS [2, 15]. Een hoofdcomponent van FEniCS is DOLFIN [1, 14], een bibliotheek in C++ voor de eindige elementenmethode. Deze bibliotheek bevat o.a. de klassen `FunctionSpace`, `Expression`, enz. die nodig zijn om een variationeel probleem te definiëren. Vanuit Python kunnen deze componenten geïmporteerd worden dankzij het volgende statement:

```
1 from fenics import *
```

³ Met de conventie dat $\sum_{l=1}^{i-1} (u^{[l]} - u^{[l-1]}) (g^{[i+1-l]} - g^{[i-l]}) = 0$ voor $i = 1$.

De standaardbibliotheek `math` en de bekende bibliotheken `matplotlib` en `numpy` worden eveneens gebruikt:

```

2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from math import gamma

```

Om de fouten van de benaderingen te kwantificeren, zullen er twee verschillende functies opgeroepen worden:

- `maxErrors`: deze functie retourneert een lijst met het maximale verschil in absolute waarde tussen de exacte oplossing en de benaderende oplossing voor elke vaste $t = t_i$.
- `L2errors`: deze functie retourneert een lijst met de fout die wordt bekomen door de berekening van de volgende L^2 -norm voor elke vaste $t = t_i$:

$$\|\text{err}(\cdot)\|_{L^2}(t) := \sqrt{\int_{\Omega} \text{err}^2(x, t) \, dx}.$$

Hierbij is $\text{err}(x, t)$ het verschil tussen de exacte oplossing en de benaderende oplossing in het punt (x, t) .

De functie `L2errors` geeft dus een globaler beeld van de fout.

```

5 def maxErrors(T, n_t, u_exact, u_opln, V):
6     t = 0.0
7     errors = [0.0]
8     for i in range(1, n_t+1):
9         t += T/n_t
10        u_exact.t = t
11        u_e = interpolate(u_exact, V)
12        errors.append(np.abs(u_e.vector().get_local() -
13        ↪ u_opln[i].vector().get_local()).max())
14    return errors

```

```

14 def L2Errors(T, n_t, u_exact, u_opln):
15     t = 0.0
16     errors = [0.0]
17     for i in range(1, n_t+1):
18         t += T/n_t
19         u_exact.t = t
20         errors.append(errornorm(u_exact, u_opln[i], 'L2', degree_rise=3))
21    return errors

```

Om de benadering a.d.h.v. de **discrete convolutie** te implementeren, beschouwen we de opgestelde zwakke formulering (4.6), waarbij $a(u, v)$ en $L_i(v)$ gegeven werden door:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} g^{[1]} uv + \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

$$L_i(v) = \int_{\Omega} \left(g^{[1]} u^{[i-1]} - \sum_{l=1}^{i-1} g^{[i+1-l]} (u^{[l]} - u^{[l-1]}) + F^{[i]} \right) v \, dx.$$

Eerst wordt de hulpfunctie (4.2) geïmplementeerd:

$$g_{1-\alpha}(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

```
22 def g(t, alpha):
23     return t**(-alpha)/gamma(1-alpha)
```

De benaderingsmethode wordt via de functie DCmethode geïmplementeerd. De functie retourneert een lijst van benaderingen van de oplossing op vaste tijdstippen $t = t_i$.

```
24 def DCmethode(alpha, n_t, dt, V, dx, u_bc, u_0, bc, f_expr):
25     u_start = interpolate(u_0, V)
26     u_lijst = [u_start]
27
28     t = 0.0
29     for i in range(1, n_t+1):
30         t += dt
31         u_bc.t = t
32
33         u = TrialFunction(V)
34         v = TestFunction(V)
35
36         f = f_expr(t, alpha)
37
38         a = g(dt, alpha)*u*v*dx + inner(grad(u), grad(v))*dx
39         L = g(dt, alpha)*u_lijst[i-1]*v*dx - sum([(g(dt*(i+1-l),
40             ↪ alpha))*(u_lijst[l]-u_lijst[l-1])*v*dx for l in range(1, i)]) +
41             ↪ f*v*dx
42
43         u = Function(V)
44         solve(a == L, u, bc)
45
46         u_lijst.append(u)
47     return u_lijst
```

De zwakke formulering van de L^1 -benadering werd gegeven door (4.11), waarbij $a(u, v)$ en $L_i(v)$ als volgt bepaald werden:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \tau^{-1} g^{[1]} uv + \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

$$L_i(v) = \int_{\Omega} \left(\tau^{-1} g^{[1]} u^{[i-1]} - \tau^{-1} \sum_{l=1}^{i-1} (u^{[l]} - u^{[l-1]}) (g^{[i+1-l]} - g^{[i-l]}) + F^{[i]} \right) v \, dx.$$

De hulpfunctie (4.8) zag er als volgt uit:

$$g := g_{2-\alpha} = g_{1-(\alpha-1)} = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

```
46 def g2(t, alpha):
47     return t**(1-alpha)/gamma(2-alpha)
```

Wegens de gelijkaardige zwakke formulering is de implementatie van de functie `L1methode` vrij analoog aan die van de functie `DCmethode`.

```
48 def L1methode(alpha, n_t, dt, V, dx, u_bc, u_0, bc, f_expr):
49     u_start = interpolate(u_0, V)
50     u_lijst = [u_start]
51
52     t = 0.0
53     for i in range(1, n_t+1):
54         t += dt
55         u_bc.t = t
56
57         u = TrialFunction(V)
58         v = TestFunction(V)
59
60         f = f_expr(t, alpha)
61
62         a = g2(dt, alpha)/dt*u*v*dx + inner(grad(u), grad(v))*dx
63         L = g2(dt, alpha)/dt*u_lijst[i-1]*v*dx + f*v*dx -
        ↪ sum([(g2(dt*(i+1-l), alpha)-g2(dt*(i-l),
        ↪ alpha))/dt*(u_lijst[l]-u_lijst[l-1])*v*dx for l in range(1,
        ↪ i)])
64
65         u = Function(V)
66         solve(a == L, u, bc)
67
68         u_lijst.append(u)
69     return u_lijst
```

De functie `errors` berekent voor elke waarde van `n_t` (het aantal intervallen waarin $[0, T]$ wordt opgesplitst) de fout van de discrete convolutiebenadering en de L^1 -benadering. Deze fouten worden opgeslagen in lijsten en geretourneerd. De variable `n_x` stelt het aantal opsplitsingen van het interval $[0, L]$ voor en wordt gelijkgesteld aan de variabele `n_t`, maar hiervoor kan ook een vaste waarde gekozen worden.

```

70 def errors(alpha, n_values, f_expr, u_exact_str, L, T):
71
72     L1errors_max = []
73     L1errors_L2 = []
74     L1errors_L2_int = []
75     DCerrors_max = []
76     DCerrors_L2 = []
77     DCerrors_L2_int = []
78
79     for n_t in n_values:
80
81         dt = T/n_t
82         n_x = n_t # eventueel kan n_x vast gekozen worden
83         mesh = IntervalMesh(n_x, 0, L)
84         V = FunctionSpace(mesh, "Lagrange", 1)
85         dx = Measure("dx", domain = mesh)
86         u_bc = Expression(u_exact_str, t = 0.0, alpha = alpha, degree=2)
87         u_0 = Expression(u_exact_str, t = 0.0, alpha = alpha, degree=2)
88         bc = DirichletBC(V, u_bc, boundary)
89         u_exact = Expression(u_exact_str, t = 0.0, alpha = alpha, degree =
90             ↪ 2)
91
92         opl = DCmethode(alpha, n_t, dt, V, dx, u_bc, u_0, bc, f_expr)
93         DCerrors_max.append(max(maxErrors(T, n_t, u_exact, opl, V)))
94         DCerr_L2 = L2Errors(T, n_t, u_exact, opl)
95         DCerrors_L2.append(max(DCerr_L2))
96         DCerrors_L2_int.append(sqrt(sum([DCerr_L2[l]**2 for l in range(1,
97             ↪ n_t+1)])*dt))
98
99         opl = L1methode(alpha, n_t, dt, V, dx, u_bc, u_0, bc, f_expr)
100        L1errors_max.append(max(maxErrors(T, n_t, u_exact, opl, V)))
101        L1err_L2 = L2Errors(T, n_t, u_exact, opl)
102        L1errors_L2.append(max(L1err_L2))
103        L1errors_L2_int.append(sqrt(sum([L1err_L2[l]**2 for l in range(1,
104            ↪ n_t+1)])*dt))
105
106    return L1errors_max, L1errors_L2, L1errors_L2_int, DCerrors_max,
107        ↪ DCerrors_L2, DCerrors_L2_int

```

Voor de eindige elementenruimte V worden Lagrange-elementen van eerste orde beschouwd. Bij het opstellen van de randvoorwaarde van Dirichlet, `DirichletBC`, wordt verwezen naar een functie `boundary`, die gegeven wordt door:

```
104 def boundary(x, on_boundary):
105     return on_boundary
```

De fout van de benaderende oplossing voor elke waarde van `n_t` wordt in verschillende lijsten opgeslagen:

- In de lijst `L1errors_max/DCerrors_max` wordt de maximale waarde opgeslagen van de lijst die geretourneerd wordt door `maxErrors`.
- In de lijst `L1errors_L2/DCerrors_L2` wordt de maximale waarde opgeslagen van de lijst die geretourneerd wordt door `L2Errors`.
- In de lijst `L1errors_L2_int/DCerrors_L2_int` wordt $\sqrt{\int_0^T \|\text{err}(\cdot)\|_{L^2}^2(t) dt}$, d.i. de vierkantswortel van de integraal (gediscretiseerd als som) van de kwadratische fouten (die geretourneerd worden door `L2Errors`), opgeslagen.

De code om de resultaten te bekomen ziet er als volgt uit:

```
106 def resultaten(alpha_values, n_values, f_expr, u_exact_str, L, T):
107     L1resultaten_max = []
108     L1resultaten_L2 = []
109     L1resultaten_L2_int = []
110     DCresultaten_max = []
111     DCresultaten_L2 = []
112     DCresultaten_L2_int = []
113
114     for alpha in alpha_values:
115
116         L1errors_max, L1errors_L2, L1errors_L2_int, DCerrors_max,
           ↪ DCerrors_L2, DCerrors_L2_int = errors(alpha, n_values, f_expr,
           ↪ u_exact_str, L, T)
117
118         DCresultaten_max.append(DCerrors_max)
119         DCresultaten_L2.append(DCerrors_L2)
120         DCresultaten_L2_int.append(DCerrors_L2_int)
121         L1resultaten_max.append(L1errors_max)
122         L1resultaten_L2.append(L1errors_L2)
123         L1resultaten_L2_int.append(L1errors_L2_int)
124
125     return L1resultaten_max, L1resultaten_L2, L1resultaten_L2_int,
           ↪ DCresultaten_max, DCresultaten_L2, DCresultaten_L2_int
```

4.4 Resultaten

In deze paragraaf worden de numerieke resultaten van verschillende voorbeelden besproken.

Voorbeeld 4.5. We beschouwen het volgende fractionele beginwaardeprobleem ($0 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in]0, \pi[, t \in]0, 1[\\ u(0, t) &= 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ u(\pi, t) &= 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ u(x, 0) &= \sin x & 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Dit fractionele beginwaardeprobleem werd reeds aangehaald in Voorbeeld 3.11. Er werd aangetoond dat de exacte oplossing wordt gegeven door $u(x, t) = E_\alpha(-t^\alpha) \sin x$.

We bespreken enkel het geval $\alpha = 1/2$. Voor deze waarde van α is $u(x, t) = E_\alpha(-t^\alpha) \sin x$ eenvoudig⁴ te implementeren, aangezien de volgende relatie geldt (zie [17], pagina 18):

$$E_{1/2}(z) = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z).$$

Hierbij wordt $\operatorname{erfc}(z)$, d.i. de **complementaire errorfunctie**, gedefinieerd als:

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt.$$

Met de volgende code worden de resultaten berekend:

```

126 T = 1.0
127 L = pi
128 n_values = [2**i for i in range(3, 10)]
129 alpha_values = [0.5]
130 u_exact_str = "exp(t)*erfc(pow(t,0.5))*sin(x[0])"
131 f_expr = lambda t, alpha : Expression("0.", degree=2)
132 L1results_max, L1results_L2, L1results_L2_int, DCresults_max, DCresults_L2,
   ↪ DCresults_L2_int = resultaten(alpha_values, n_values, f_expr,
   ↪ u_exact_str, L, T)

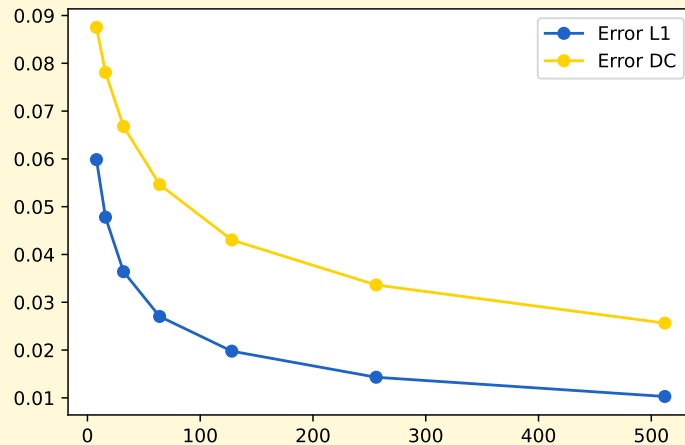
```

De bron `f_expr` is in dit voorbeeld gelijk aan 0 en dus onafhankelijk van α en t . Indien we `n_t` en `n_x` uit de code van de functie `errors` laten overeenstemmen met respectievelijk n en m , kunnen we het begrip convergentiesnelheid $v_{m,n}$ als de volgende verhouding definiëren:

$$v_{m,n} := \log_2 \left(\frac{\operatorname{Err}^{m,n}}{\operatorname{Err}^{2m,2n}} \right). \quad (4.12)$$

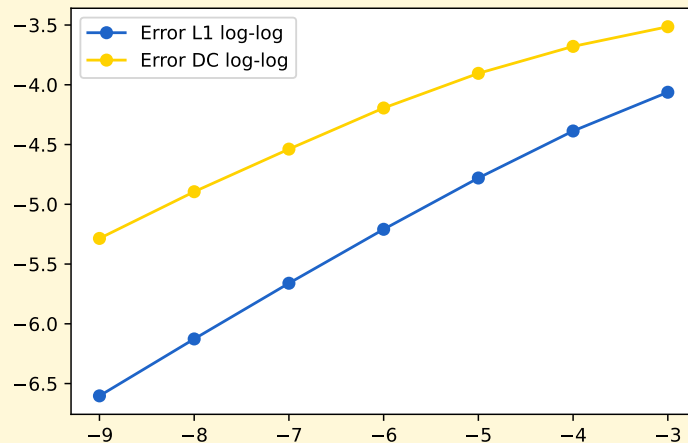
⁴De functie `erfc` is immers opgenomen in de C++11-standaard (en latere versies), zie <https://en.cppreference.com/w/cpp/numeric/math/erfc>.

We beschouwen de fouten van de discrete convolutiebenadering en de L^1 -benadering voor elke waarde van $n = 2^3, 2^4, \dots, 2^9$ en stellen telkens $m = n$. Een plot⁵ van de fouten (berekend a.d.h.v. de maximale errors, cf. supra) ziet er als volgt uit:



Figuur 4.6.: Plot van de lijsten `L1results_max` en `DCresults_max` (Voorbeeld 4.5, $\alpha = 0.5$).

Het is duidelijk dat de L^1 -benadering betere resultaten oplevert dan de discrete convolutiebenadering. Een log-log plot van dezelfde data ziet er als volgt uit:



Figuur 4.7.: Plot (log-log) van de lijsten `L1results_max` en `DCresults_max` (Voorbeeld 4.5, $\alpha = 0.5$).

Op een log-log plot kan men direct schattingen voor $v_{m,n}$ aflezen als het verschil in functiewaarde tussen twee naburige punten, of als de richtingscoëfficiënt van de rechte die deze punten met elkaar verbindt. Per definitie (4.12) geldt immers:

$$v_{m,n} = \log_2(\text{Err}^{m,n}) - \log_2(\text{Err}^{2m,2n}).$$

⁵ Gegeneerd m.b.v. de bibliotheek `matplotlib`.

Om een **globaal beeld** te krijgen van de convergentiesnelheden kan men ook o.b.v. alle datapunten een lineaire regressierechte opstellen⁶ (a.d.h.v. de kleinste kwadratenmethode) en hiervan de richtingscoëfficiënt berekenen. In Tabel 4.8 wordt een overzicht gegeven van deze globale convergentiesnelheden voor beide methoden. De andere twee manieren om de fout van de benadering te berekenen worden eveneens opgenomen in dit overzicht.

Tabel 4.8.: Globale convergentiesnelheden van beide benaderingen (Voorbeeld 4.5).

	Discrete convolutiebenadering	L^1 -benadering
errors_max	0.299	0.428
errors_L2	0.316	0.395
errors_L2_int	0.419	0.754

Vervolgens bespreken we de resultaten van een voorbeeld met een gladde oplossing:

Voorbeeld 4.9. We beschouwen het volgende fractionele beginwaardeprobleem ($0 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned}
 D_t^\alpha u(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t^3 \sin x + \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)} t^{3-\alpha} \sin x & x \in]0, \pi[, t \in]0, 1[\\
 u(0, t) &= 0 & 0 \leq t \leq 1 \\
 u(\pi, t) &= 0 & 0 \leq t \leq 1 \\
 u(x, 0) &= 0 & 0 \leq x \leq \pi.
 \end{aligned}$$

De exacte oplossing wordt gegeven door $u(x, t) = t^3 \sin x$. Inderdaad, wegens de formule voor de Caputo fractionele afgeleide van een machtsfunctie (1.31) bekomt men dat het linkerlid en het rechterlid van de fractionele diffusievergelijking aan elkaar gelijk zijn voor $u(x, t) = t^3 \sin x$:

$$D_t^\alpha u(x, t) = \sin x D_t^\alpha t^3 = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)} t^{3-\alpha} \sin x.$$

De code om de resultaten te genereren voor dit voorbeeld ziet er als volgt uit:

```

133 T = 1.0
134 L = pi
135 n_values = [2**i for i in range(3, 10)]
136 alpha_values = [0.2, 0.4, 0.6, 0.8]
137 u_exact_str = "pow(t,3)*sin(x[0])"
138 f_expr = lambda t, alpha : Expression(str(pow(t,3) +
    ↪ gamma(4)/gamma(4-alpha)*pow(t,3-alpha))+"*sin(x[0])", degree=2)

```

⁶Bijvoorbeeld via de numpy-functie `numpy.linalg.lstsq`.

139

```
L1results_max, L1results_L2, L1results_L2_int, DCresults_max, DCresults_L2,
↪ DCresults_L2_int = resultaten(alpha_values, n_values, f_expr,
↪ u_exact_str, L, T)
```

Bij dit voorbeeld kiezen we om meerdere waarden van α in de lijst `alpha_values` op te nemen, zodat we de convergentiesnelheden kunnen vergelijken voor elke waarde van α . In Tabel 4.10 wordt een overzicht gegeven van de fouten (berekend a.d.h.v. de **maximale errors**, cf. supra) die bekomen worden voor de discrete convolutiebenadering, voor elke waarde van α (hierbij wordt ook telkens $n = m$ genomen). A.d.h.v. de numerieke resultaten in de tabel kan men vaststellen dat de convergentiesnelheid daalt naarmate dat α groter wordt. Het is uiteraard ook logisch dat de fouten minder groot worden naarmate er meer discretisatie-intervallen gekozen worden. De grootteorde van de convergentiesnelheid zou geschat kunnen worden op $O(\tau^{1-\alpha})$.

Tabel 4.10.: Fout (`DCresults_max`) van de discrete convolutiebenadering voor $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ en de bijbehorende **convergentiesnelheid** $v_{m,n}$ (Voorbeeld 4.9).

	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$n = 64$	$n = 128$	$n = 256$	$n = 512$
$\alpha = 0.2$	7.792E-02 0.704	4.782E-02 0.679	2.986E-02 0.683	1.860E-02 0.695	1.149E-02 0.709	7.027E-03 0.723	4.258E-03
$\alpha = 0.4$	2.139E-01 0.561	1.450E-01 0.551	9.897E-02 0.554	6.739E-02 0.561	4.567E-02 0.568	3.081E-02 0.574	2.069E-02
$\alpha = 0.6$	4.826E-01 0.441	3.557E-01 0.430	2.640E-01 0.426	1.965E-01 0.422	1.467E-01 0.419	1.097E-01 0.416	8.217E-02
$\alpha = 0.8$	1.090E+00 0.299	8.859E-01 0.292	7.237E-01 0.285	5.941E-01 0.277	4.903E-01 0.269	4.071E-01 0.260	3.399E-01

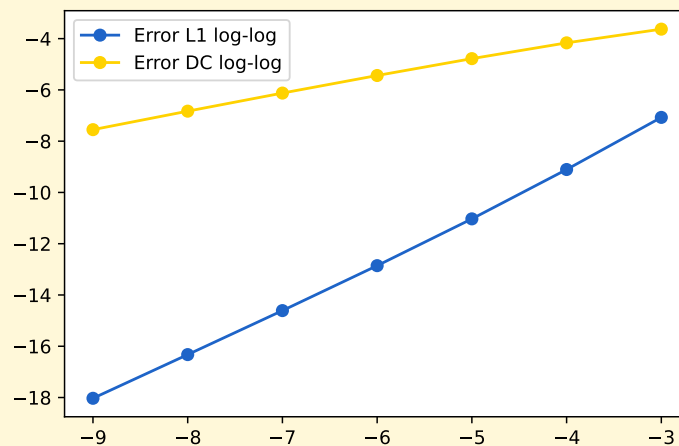
Voor de L^1 -benadering kan men eveneens de fouten (opnieuw berekend a.d.h.v. de **maximale errors**) op dezelfde manier in een tabel weergeven. In Tabel 4.11 staan deze numerieke resultaten, waarbij opnieuw $m = n$ gesteld werd. Deze resultaten zijn vergelijkbaar met de resultaten uit het artikel van Stynes et al. [22]

Opnieuw blijkt de convergentiesnelheid te dalen naarmate de waarde van α stijgt. Dit is echter geen toevalligheid: in [10] en [22] wordt aangehaald dat de convergentiesnelheid in het algemeen van de grootteorde $O(\tau^{2-\alpha})$ is. De L^1 -benadering is opnieuw het meest accuraat voor dit voorbeeld.

Tabel 4.11.: Fout (L1results_max) van de L^1 -benadering voor $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ en de bijbehorende convergentiesnelheid $v_{m,n}$ (Voorbeeld 4.9).

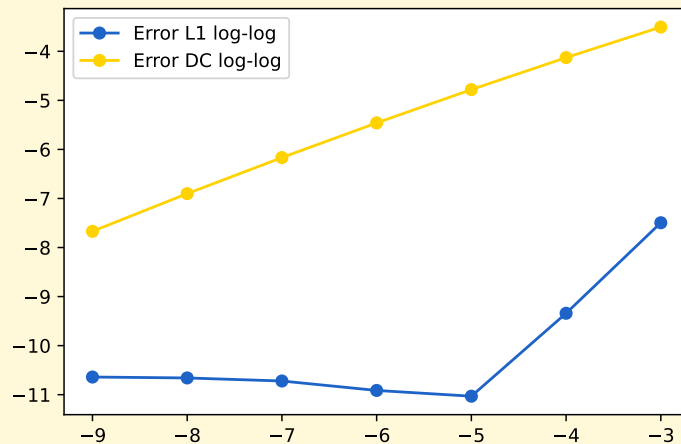
	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$n = 64$	$n = 128$	$n = 256$	$n = 512$
$\alpha = 0.2$	1.197E-02 1.843	3.336E-03 1.842	9.304E-04 1.839	2.601E-04 1.835	7.289E-05 1.832	2.048E-05 1.828	5.767E-06
$\alpha = 0.4$	2.270E-02 1.651	7.231E-03 1.642	2.317E-03 1.634	7.468E-04 1.627	2.419E-04 1.621	7.864E-05 1.616	2.565E-05
$\alpha = 0.6$	4.302E-02 1.443	1.582E-02 1.429	5.875E-03 1.420	2.196E-03 1.414	8.243E-04 1.409	3.103E-04 1.406	1.171E-04
$\alpha = 0.8$	8.038E-02 1.239	3.406E-02 1.220	1.462E-02 1.211	6.313E-03 1.206	2.736E-03 1.204	1.188E-03 1.202	5.164E-04

We kunnen ook de fouten beschouwen die berekend werden a.d.h.v. de maximale L^2 -norm (cf. supra). Deze worden weergegeven in Figuur 4.12 voor $\alpha = 0.2$.



Figuur 4.12.: Plot (log-log) van de lijsten L1results_L2 en DCresults_L2 voor $n = m$ (Voorbeeld 4.9, $\alpha = 0.2$).

Indien een vaste waarde voor m wordt gekozen, bijvoorbeeld $m = 32$, kan men in Figuur 4.13 aflezen dat de maximale L^2 -errors van de L^1 -benaderingsmethode niet meer dalen voor stijgende waarden van n . Sterker nog, de maximale L^2 -errors worden zelfs groter. Voor andere vaste waarden van m kon dezelfde trend gevonden worden.



Figuur 4.13.: Plot (log-log) van de lijsten L1results_L2 en DCresults_L2 voor vaste $m = 32$ (Voorbeeld 4.9, $\alpha = 0.2$).

We beschouwen vervolgens een voorbeeld met de typische exacte oplossing $t^\alpha \sin x$:

Voorbeeld 4.14. We beschouwen het volgende fractionele beginwaardeprobleem ($0 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned}
 D_t^\alpha u(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\Gamma(\alpha + 1) + t^\alpha) \sin x & x \in]0, \pi[, t \in]0, 1[\\
 u(0, t) &= 0 & 0 \leq t \leq 1 \\
 u(\pi, t) &= 0 & 0 \leq t \leq 1 \\
 u(x, 0) &= 0 & 0 \leq x \leq \pi.
 \end{aligned}$$

Inderdaad, de exacte oplossing wordt gegeven door $u(x, t) = t^\alpha \sin x$: wegens (1.31) volgt er dat het linkerlid en het rechterlid van de fractionele diffusievergelijking aan elkaar gelijk zijn voor $u(x, t) = t^\alpha \sin x$:

$$D_t^\alpha u(x, t) = D_t^\alpha t^\alpha \sin x = \Gamma(\alpha + 1) \sin x.$$

De code om de resultaten te genereren ziet er als volgt uit:

```

140 T = 1.0
141 L = pi
142 n_values = [2**i for i in range(3, 10)]
143 alpha_values = [0.2, 0.4, 0.6, 0.8]
144 u_exact_str = "pow(t,alpha)*sin(x[0])"
145 f_expr = lambda t, alpha : Expression(str(pow(t,alpha) +
    ↪ gamma(alpha+1))+"*sin(x[0])", degree=2)
146 L1results_max, L1results_L2, L1results_L2_int, DCresults_max, DCresults_L2,
    ↪ DCresults_L2_int = resultaten(alpha_values, n_values, f_expr,
    ↪ u_exact_str, L, T)

```

Tabel 4.15.: Fout (DCresults_max) van de discrete convolutiebenadering voor $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ en de bijbehorende convergentiesnelheid $v_{m,n}$ (Voorbeeld 4.14).

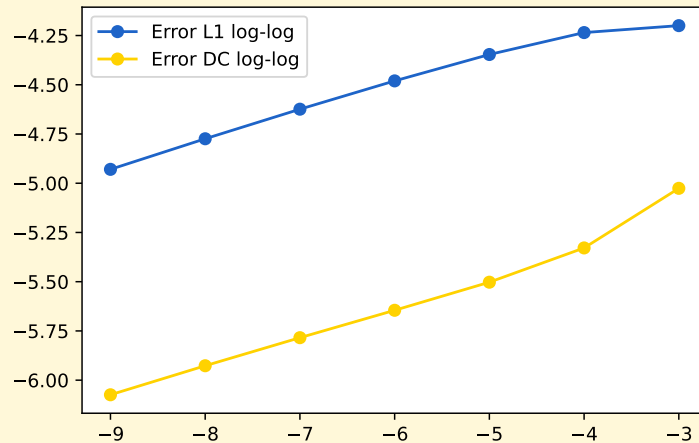
	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$n = 64$	$n = 128$	$n = 256$	$n = 512$
$\alpha = 0.2$	3.069E-02 0.303	2.489E-02 0.174	2.206E-02 0.143	1.998E-02 0.139	1.815E-02 0.142	1.644E-02 0.147	1.484E-02
$\alpha = 0.4$	8.890E-02 0.305	7.194E-02 0.293	5.871E-02 0.305	4.752E-02 0.322	3.802E-02 0.337	3.009E-02 0.350	2.360E-02
$\alpha = 0.6$	1.816E-01 0.357	1.417E-01 0.363	1.102E-01 0.378	8.476E-02 0.390	6.470E-02 0.397	4.913E-02 0.401	3.721E-02
$\alpha = 0.8$	4.162E-01 0.213	3.590E-01 0.211	3.102E-01 0.213	2.676E-01 0.214	2.307E-01 0.215	1.988E-01 0.215	1.713E-01

Tabel 4.16.: Fout (L1results_max) van de L^1 -benadering voor $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ en de bijbehorende convergentiesnelheid $v_{m,n}$ (Voorbeeld 4.14).

	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$n = 64$	$n = 128$	$n = 256$	$n = 512$
$\alpha = 0.2$	5.442E-02 0.035	5.311E-02 0.111	4.916E-02 0.134	4.480E-02 0.144	4.055E-02 0.150	3.655E-02 0.155	3.281E-02
$\alpha = 0.4$	6.152E-02 0.240	5.211E-02 0.304	4.221E-02 0.331	3.355E-02 0.348	2.637E-02 0.360	2.055E-02 0.369	1.592E-02
$\alpha = 0.6$	4.497E-02 0.439	3.318E-02 0.514	2.324E-02 0.547	1.591E-02 0.565	1.075E-02 0.577	7.208E-03 0.585	4.806E-03
$\alpha = 0.8$	2.155E-02 0.617	1.405E-02 0.665	8.865E-03 0.731	5.341E-03 0.754	3.166E-03 0.770	1.856E-03 0.783	1.079E-03

In Tabel 4.15 en Tabel 4.16 wordt een overzicht gegeven van de numerieke resultaten (met $m = n$) m.b.t. de maximale errors (DCresults_max en L1results_max). In dit voorbeeld wordt de convergentiesnelheid van de L^1 -benadering groter naarmate α groter wordt. In Voorbeeld 4.9 (met exacte oplossing $u(x, t) = t^3 \sin x$) was dit juist andersom; de oplossing $u(x, t)$ was in dat geval onafhankelijk van α . De convergentiesnelheden in Tabel 4.16 lijken een orde van $O(\tau^\alpha)$ te impliceren. Dit komt overeen met het theoretisch resultaat voor de L^1 -benadering in het artikel [22]: de convergentiesnelheid is $O(\tau^{\min(2-\alpha, r\alpha)})$, met $r = 1$, waarbij r een parameter is voor de verdeling van het discretisatierooster. Bovendien stemt Voorbeeld 4.5 eveneens overeen met dit resultaat: uit Figuur 4.7 kan men afleiden dat de waarden voor de convergentiesnelheden van de L^1 -benadering steeds dichterbij 0.5 voor $\alpha = 0.5$.

Het valt op dat de fouten van de discrete convolutiemethode voor $\alpha = 0.2$ kleiner zijn dan de fouten van de L^1 -benadering. Dit is ook duidelijk te zien in Figuur 4.17. O.b.v. de convergentiesnelheden in Tabel 4.15 zou men de orde van de convergentie kunnen schatten als $O(\tau^{\min(\alpha, 1-\alpha)})$. Dit geeft aanleiding tot verder onderzoek.



Figuur 4.17.: Plot (log-log) van de lijsten L1results_max en DCresults_max voor $\alpha = 0.2$.

Aangezien de beschouwde problemen homogene randvoorwaarden hebben, kan men de oplossing van Voorbeeld 4.9 en de oplossing van Voorbeeld 4.14 combineren.

Voorbeeld 4.18. We beschouwen het volgende fractionele beginwaardeprobleem ($0 < \alpha < 1$):

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(t^\alpha + t^3 + \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)} + \Gamma(\alpha+1) \right) \sin x \quad x \in]0, \pi[, t \in]0, 1[$$

$$u(0, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$u(\pi, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$u(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

De exacte oplossing wordt gegeven door $u(x, t) = (t^\alpha + t^3) \sin x$.

A.d.h.v. de volgende code worden de resultaten voor dit voorbeeld verkregen:

```

147 T = 1.0
148 L = pi
149 n_values = [2**i for i in range(3, 10)]
150 alpha_values = [0.2, 0.4, 0.6, 0.8]
151 u_exact_str = "(pow(t,alpha)+pow(t,3))*sin(x[0])"
152 f_expr = lambda t, alpha : Expression(str(pow(t,alpha) + pow(t,3) +
    ↪ gamma(4)/gamma(4-alpha)*pow(t,3-alpha) + gamma(alpha+1))+"*sin(x[0])",
    ↪ degree=2)

```

153

```

L1results_max, L1results_L2, L1results_L2_int, DCresults_max, DCresults_L2,
↪ DCresults_L2_int = resultaten(alpha_values, n_values, f_expr,
↪ u_exact_str, L, T)

```

Tabel 4.19.: Fout (DCresults_max) van de discrete convolutiebenadering voor $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ en de bijbehorende convergentiesnelheid $v_{m,n}$ (Voorbeeld 4.18).

	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$n = 64$	$n = 128$	$n = 256$	$n = 512$
$\alpha = 0.2$	9.480E-02 0.754	5.621E-02 0.704	3.451E-02 0.696	2.130E-02 0.232	1.815E-02 0.143	1.644E-02 0.147	1.484E-02
$\alpha = 0.4$	2.732E-01 0.571	1.839E-01 0.556	1.251E-01 0.557	8.505E-02 0.563	5.756E-02 0.570	3.878E-02 0.576	2.601E-02
$\alpha = 0.6$	6.486E-01 0.430	4.816E-01 0.419	3.602E-01 0.416	2.701E-01 0.414	2.027E-01 0.412	1.523E-01 0.411	1.146E-01
$\alpha = 0.8$	1.506E+00 0.274	1.245E+00 0.268	1.034E+00 0.263	8.617E-01 0.257	7.211E-01 0.251	6.058E-01 0.245	5.111E-01

Tabel 4.20.: Fout (L1results_max) van de L^1 -benadering voor $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ en de bijbehorende convergentiesnelheid $v_{m,n}$ (Voorbeeld 4.18).

	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$n = 64$	$n = 128$	$n = 256$	$n = 512$
$\alpha = 0.2$	5.417E-02 0.030	5.307E-02 0.111	4.916E-02 0.134	4.480E-02 0.144	4.055E-02 0.150	3.655E-02 0.155	3.281E-02
$\alpha = 0.4$	6.087E-02 0.227	5.202E-02 0.302	4.220E-02 0.331	3.355E-02 0.348	2.636E-02 0.359	2.055E-02 0.369	1.592E-02
$\alpha = 0.6$	4.371E-02 0.405	3.302E-02 0.508	2.322E-02 0.546	1.591E-02 0.565	1.075E-02 0.577	7.208E-03 0.585	4.806E-03
$\alpha = 0.8$	7.546E-02 1.347	2.967E-02 1.318	1.190E-02 1.161	5.325E-03 0.752	3.162E-03 0.769	1.856E-03 0.783	1.079E-03

In Tabel 4.19 en Tabel 4.20 wordt een overzicht gegeven van de numerieke resultaten voor Voorbeeld 4.18. De resultaten in Tabel 4.20 zijn zeer gelijkaardig aan de resultaten in Tabel 4.16 en conform het artikel [22]. Betere resultaten kunnen bekomen worden door een niet-uniforme verdeling te kiezen van het discretisatierooster. Het gedrag van de convergentiesnelheid bij de discrete convolutiebenadering in dit voorbeeld en het vorige voorbeeld kan een opzet geven naar een vervolgwerk.

Conclusie

In Hoofdstuk 3 werd beschreven hoe de exacte oplossing van een fractioneel beginwaardeprobleem (m.b.t. Caputo fractionele afgeleiden) bepaald kan worden. Hierbij werd gebruikgemaakt van de definities en eigenschappen die in Hoofdstuk 1 en Hoofdstuk 2 beschreven werden. In Hoofdstuk 4 werd daarentegen beschreven hoe de oplossing van een fractioneel beginwaardeprobleem bij benadering kan gevonden worden a.d.h.v. numerieke methoden. De discrete convolutiebenadering steunt op het benaderen van Riemann-Liouville fractionele afgeleiden (waarbij gebruikgemaakt werd van het verwantschap met de Caputo fractionele afgeleide), terwijl de Caputo fractionele afgeleide direct benaderd wordt bij de L^1 -benadering. Na het opstellen van een zwakke formulering werden deze methoden geïmplementeerd. Vervolgens werden numerieke resultaten verkregen door het vergelijken van de exacte oplossing met de benaderende oplossing.

Uit de numerieke resultaten kan men concluderen dat de L^1 -benadering in de meeste gevallen het nauwkeurigst is en de convergentiesnelheid van deze methode doorgaans van hogere orde is. Er werden evenwel andere voorbeelden aangewend waaruit blijkt dat de discrete convolutiebenadering in sommige gevallen kleinere fouten oplevert. Bovendien kan men op basis van deze resultaten een inschatting maken van de orde van de convergentiesnelheden. Dit geeft aanleiding tot verder onderzoek.

PARTIM II

EINDTERMEN WISKUNDE IN VLAANDEREN EN WALLONIË: EEN VERGELIJKENDE STUDIE

Promotor: prof. dr. H. Van Maldeghem

Inleiding

Bijna alle aspecten van het onderwijsbeleid in België zijn gemeenschapsbevoegdheden. Zowel de Vlaamse Gemeenschap als de Franse Gemeenschap (ook bekend als de *Federatie Wallonië-Brussel*) zijn verantwoordelijk voor het opstellen van eindtermen. Eindtermen beschrijven de minimale kennis, inzichten en vaardigheden die de leerlingen op populatieniveau (of leerlingniveau, voor de eindtermen basisgeletterdheid) moeten bereiken.⁷ Dit houdt in dat o.a. de betrokken eindtermen voor de meerderheid van de leerlingen haalbaar moeten zijn. Eindtermen worden in Vlaanderen opgesteld door het *AHOVOKS* (Agentschap voor Hoger Onderwijs, Volwassenenonderwijs, Kwificaties en Studietoelagen) in een aantal eindtermcommissies. Zodra de eindtermen worden goedgekeurd, gaan onderwijsverstrekkers aan de slag om leerplannen op te stellen. In Wallonië spreekt men niet over eindtermen, maar over eindcompetenties. Net zoals in Vlaanderen buigen deze eindcompetenties zich niet over de vraag ‘hoe les te geven?’ (dat is immers een zaak van de leerplannen van de onderwijsverstrekkers en - uiteraard - van de pedagogische inventiviteit van de leraren), maar eerder over de vraag ‘welke competenties moeten er bereikt worden?’.

In dit deel van de masterthesis worden de verschillen tussen de huidige Vlaamse eindtermen wiskunde en de Waalse eindcompetenties wiskunde van de derde graad van het secundair onderwijs in kaart gebracht en onderling met elkaar vergeleken. De bijbehorende onderzoeksvraag luidt:

‘Wat zijn de educatieve verschillen tussen de huidige eindtermen wiskunde in Vlaanderen en de eindcompetenties wiskunde in Wallonië in de derde graad?’

Om deze vraag zo correct mogelijk te kunnen beantwoorden, is het nodig dat de eindtermen op een gepaste manier met elkaar vergeleken worden. Daarvoor wordt in Hoofdstuk 1 eerst de organisatie en structuur van de eindtermen/eindcompetenties in Vlaanderen en Wallonië toegelicht. In Hoofdstuk 2 worden de eindcompetenties in Wallonië overlopen en vergeleken met die van Vlaanderen. De huidige Vlaamse eindtermen in de derde graad wiskunde (i.e. de eindtermen voor de modernisering) werden opgenomen in Appendix B.

⁷ Er zijn ook attitudinale eindtermen die enkel na te streven zijn.

Organisatie en structuur

In dit hoofdstuk wordt een beknopt overzicht gegeven van de structuur van de eindtermen in Vlaanderen en Wallonië. De onderwijsorganisatie in Wallonië wordt eveneens kort toegelicht.

De Vlaamse eindtermen wiskunde zijn terug te vinden op de website www.onderwijsdoelen.be [5]. Op de website www.enseignement.be [9] kan men de eindcompetenties wiskunde van Wallonië terugvinden. Verder kan men op deze websites algemene informatie terugvinden over de structuur en onderwijsorganisatie.

1.1 Vlaanderen

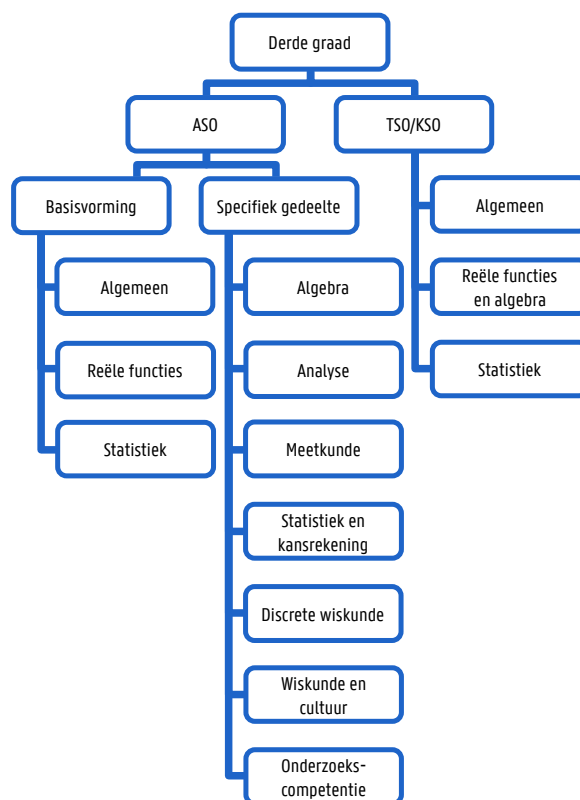
In Vlaanderen worden er momenteel nieuwe eindtermen ingevoerd. Dit maakt deel uit van de modernisering van het secundair onderwijs die vanaf september 2019 stapsgewijs wordt uitgerold. De eindtermen voor de modernisering werden gestructureerd per onderwijsvorm (ASO, TSO, KSO en BSO), terwijl de nieuwe eindtermen geformuleerd worden per finaliteit (finaliteit doorstroom, dubbele finaliteit en finaliteit arbeidsmarkt). De nieuwe eindtermen worden bovendien ook verbonden aan 16 'sleutelcompetenties', zoals bijvoorbeeld computationeel denken en handelen, mediawijsheid, probleemoplossend denken enz. Hierbij verdwijnt ook het onderscheid tussen de vakgebonden en vakoverschrijdende eindtermen.

Voor de wiskundeleerkracht brengen deze nieuwe eindtermen nieuwe uitdagingen met zich mee: een brede eerste graad zal bijvoorbeeld voor meer gediversifieerde klassen zorgen, wat logischerwijs zal leiden tot een hogere nood aan differentiatie en remediëring. Bovendien zal de basisvorming van de doorstroomrichtingen in het TSO en KSO versterkt worden, aangezien de eindtermen onder de finaliteit doorstroom vallen.

Momenteel worden de nieuwe eindtermen ingevoerd in de tweede graad: in het schooljaar 2021-2022 werden ze ingevoerd in het derde jaar en in het schooljaar 2022-2023 zullen ze worden ingevoerd in het vierde jaar.

In de derde graad zijn de eindtermen op dit moment nog niet gemoderniseerd. In het BSO zijn er geen eindtermen te vinden voor het vak wiskunde, aangezien de leerinhouden wiskunde geïntegreerd worden in het zgn. ‘Project Algemene Vakken’ (PAV). Voor het ASO, TSO en KSO worden eindtermen wel expliciet geformuleerd voor het vak wiskunde. De eindtermen wiskunde van het TSO en KSO zijn identiek in de derde graad. In de derde graad ASO bestaat er een pool wiskunde (Wetenschappen-Wiskunde, Latijn-Wiskunde, Economie-Wiskunde, Moderne Talen-Wiskunde). Voor de pool wiskunde worden er naast algemene eindtermen ook specifieke eindtermen voor wiskunde geformuleerd. Deze specifieke eindtermen moeten gerealiseerd worden bovenop de algemene eindtermen van de basisvorming.

In Figuur 1.1 wordt de structuur van de eindtermen wiskunde in de derde graad uitgebreid weergegeven. In Appendix B zijn deze eindtermen terug te vinden. De eindtermen worden geformuleerd per onderdeel, in één zin. Er is in de specifieke eindtermen niet enkel aandacht voor de wiskundige vakonderdelen, maar bijvoorbeeld ook voor het thema ‘wiskunde en cultuur’. Er worden eveneens onderzoekscompetenties van de leerlingen verwacht: de leerlingen moeten een onderzoeksopdracht met een wiskundige component kunnen voorbereiden, uitvoeren en evalueren.



Figuur 1.1: Eindtermen wiskunde in de derde graad.

1.2 Wallonië

De organisatie van het gewoon voltijds secundair onderwijs in Wallonië is vergelijkbaar met die van Vlaanderen. Het gewoon secundair onderwijs omvat eveneens 6 studiejaren (met uitzondering van het beroepsonderwijs), georganiseerd in drie graden van 2 jaar:

- de eerste graad, voor het eerste en tweede jaar (doorgaans leerlingen van 12 tot 14 jaar),
- de tweede graad, voor het derde en vierde jaar (doorgaans leerlingen van 14 tot 16 jaar),
- de derde graad, voor het vijfde en zesde jaar (doorgaans leerlingen van 16 tot 18 jaar), met eventueel een zevende jaar in het geval van beroepsonderwijs.

In de tweede en derde graad wordt er een onderscheid gemaakt tussen de volgende finaliteiten:

- doorstroom: voorbereiding op verdere studies,
- kwalificatie: voorbereiding op een beroep (en eventueel toegang tot verdere studies).

Er worden in deze context vier verschillende vormen van onderwijs aangeboden: algemeen onderwijs (G, *générales*), technisch onderwijs (T, *techniques*), kunstonderwijs (A, *artistiques*) en beroeps-
onderwijs (P, *professionnelles*). In de finaliteit doorstroom worden twee vormingen aangeboden: de algemene humaniora (G) en de technologische humaniora (T/A).

Zoals reeds aangehaald, gebruikt men in Wallonië de term **eindcompetenties** (de zgn. *compétences terminales*) om naar eindtermen te verwijzen. De recentste eindcompetenties voor wiskunde in de doorstroomafdeling van de algemene en technologische humaniora werden vastgelegd in het Besluit van 16 januari 2014 van de Regering van de Franse Gemeenschap, gepubliceerd op 17-04-2014 in het Belgisch staatsblad [6] (enkel in het Frans beschikbaar).

Bij het vastleggen van de eindcompetenties werd een referentiekader voorgesteld o.b.v. een indeling in zgn. ‘eenheden van leerresultaten’ (*unités d’acquis d’apprentissage*). Deze eenheden worden **per jaar uitgewerkt** (i.t.t. de Vlaamse eindtermen, die per graad worden uitgewerkt) en worden elk onderverdeeld in:

- competenties (*compétences à développer*),
- leerprocessen (*processus*),
- leerinhouden (*ressources*),
- multidisciplinaire strategieën (*stratégies transversales*).

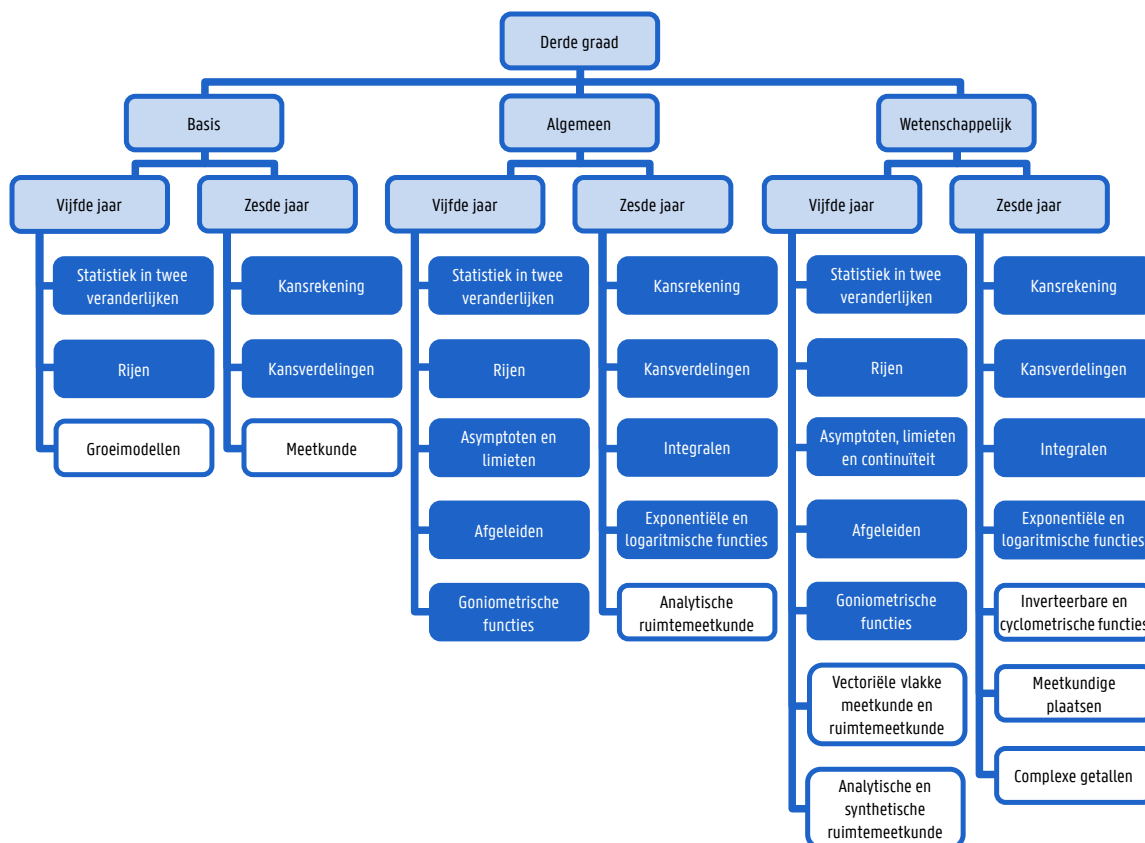
Bij de uitwerking van deze eenheden komt het vaak voor dat bepaalde vaardigheden of strategieën opnieuw aangewend worden. Door het herhaaldelijk gebruik in verschillende contexten kunnen deze strategieën een vakoverschrijdend karakter krijgen (zoals bijvoorbeeld het gebruik van ICT). Daarom worden deze apart beschreven onder het niveau ‘multidisciplinaire strategieën’.

Leerprocessen worden in drie niveau’s opgesplitst: **kennen** (K), **toepassen** (T) en **overdragen** (O). Bij het niveau kennen (K) worden de leerinhouden opgebouwd en verduidelijkt. Het niveau toepassen (T) heeft betrekking op het inzetten van de verworven kennis bij reeds geziene situaties. Ten slotte moet men bij het niveau overdragen (O) de verworven kennis gebruiken in nieuwe situaties. In de eindcompetenties wordt benadrukt dat de volgorde van de leerprocessen niet vooraf bepaald

is. De bedoeling is immers dat de verschillende niveau's op elkaar inwerken: kennis wordt niet gezien als een opzichzelfstaande entiteit, maar wordt opgebouwd en verduidelijkt via toepassings- en overdrachtsactiviteiten.

In Figuur 1.2 kan men een schematische voorstelling vinden van de structuur van de vastgelegde eindcompetenties voor de derde graad wiskunde (doorstroom). Er wordt een onderscheid gemaakt tussen basisvorming, algemene vorming en wetenschappelijke vorming [6]:

- **basisvorming** (gewoonlijk 2 lessen per week):
voor de leerling die wiskunde in zijn of haar leven als 'burger' zal gebruiken;
- **algemene vorming** (gewoonlijk 4 lessen per week):
voor de leerlingen die wiskunde zullen toepassen in hun vakgebied;
- **wetenschappelijke vorming** (gewoonlijk 6 lessen per week):
voor de leerlingen die hun verdere studies richten op wetenschap, technologie en onderzoek, waarin wiskunde een essentiële rol speelt.



Figuur 1.2: Eindcompetenties wiskunde in de derde graad, *humanités générales et technologiques*. De onderwerpen die voorkomen in meerdere vormingen zijn aangeduid in het **blauw**.

2

Eindtermen en eindcompetenties

In dit hoofdstuk wordt een overzicht gegeven van de eindcompetenties in Wallonië. De eindcompetenties worden opgesplitst per niveau (basisvorming, algemene vorming en wetenschappelijke vorming), per jaar en per onderwerp. Bij elke opsplitsing worden de eindcompetenties voorgesteld a.d.h.v. de competenties, leerprocessen en leerinhouden.¹ Vervolgens worden ze vergeleken met de huidige eindtermen in Vlaanderen.

2.1 Basisvorming

De onderwerpen die behandeld worden in de basisvorming worden weergegeven in Figuur 2.1. De eindcompetenties van de basisvorming kan men grotendeels vergelijken met de eindtermen die van toepassing zijn in het TSO/KSO. Als voorbeeld beschouwen we de richting Audiovisuele Vorming: het lesrooster van het *Athénée Royal d’Arlon* [3] voorziet een optie van 2 lessen wiskunde per week, i.e. een basisvorming wiskunde. Indien men de richting Audiovisuele Vorming van het KSO in Vlaanderen volgt in het gemeenschapsonderwijs, worden eveneens 2 lessen voorzien [1].



Figuur 2.1.: Onderverdeling eindcompetenties wiskunde in de basisvorming.

¹ Indien een onderwerp opnieuw aan bod komt in een andere vorming (zoals het onderwerp ‘afgeleiden’, dit komt aan bod in zowel de algemene vorming als de wetenschappelijke vorming), worden de inhoudelijke veranderingen in het [blauw](#) aangeduid.

Vijfde jaar

Statistiek in twee veranderlijken

Competenties:

- Causaliteit en correlatie onderscheiden
- Bestuderen van de geschiktheid van een lineair model op basis van statistieken of wetenschappelijke experimenten

Leerprocessen:

Proces	
T	De vergelijking van de rechte van Mayer bepalen.
T	Een grafisch rekentoestel of spreadsheet gebruiken om een lineair model en correlatiecoëfficiënt te bepalen.
T	Een (theoretische) waarde berekenen a.d.h.v. een lineair model.
K	Het belang van een statistisch model uitleggen.
K	Het verschil tussen causaliteit en correlatie uitleggen a.d.h.v. een voorbeeld.
K	Het verband tussen de vorm van een puntenwolk en de correlatiecoëfficiënt interpreteren.
O	De voorgestelde of berekende statistische informatie beoordelen en becommentariëren.

Leerinhouden:

- Weergave van statistische data (in twee variabelen)
- Gemiddelde punt (zwaartepunt)
- Lineaire modellering
- Methode van Mayer
- Lineaire correlatiecoëfficiënt
- Onderscheid tussen causaliteit en correlatie
- Statistische en grafische functionaliteit van ICT-tools

In deze eindcompetenties wordt naar de **methode van Mayer** verwezen. Deze methode dankt haar naam aan de Duitse wiskundige (en astronoom) Tobias Mayer (1723 – 1762). De methode van Mayer is relatief onbekend in de niet-Franstalige literatuur, en wordt beschouwd als een alternatieve manier om een regressierechte op te stellen [4]. Deze methode werkt als volgt: een dataset bestaande uit punten (x_i, y_i) wordt eerst geordend volgens stijgende x_i -waarden. Daarna splitst men de geordende dataset op in twee delen van (ongeveer) gelijke grootte. Vervolgens wordt het gemiddelde punt berekend van beide delen (i.e. het punt met als abscis het gemiddelde van alle abscissen en als ordinaat het gemiddelde van alle ordinaten). Eenmaal deze twee punten berekend zijn, kan de zgn. **rechte van Mayer** opgesteld worden. De rechte van Mayer verbindt deze twee punten. Hoewel men kan discussiëren over het nut van het aanleren van deze methode in een tijdperk van computers, kan op deze manier alleszins een inleiding tot regressie worden aangebracht. Echter, in Vlaanderen wordt regressie niet opgenomen in de eindtermen. Desgelijks wordt het concept lineaire correlatie behandeld in de Waalse eindcompetenties, terwijl dit in Vlaanderen niet in de eindtermen opgenomen is.

Rijen

Competenties:

- Een beroep doen op de eigenschappen van rijen in verschillende situaties

Leerprocessen:

Proces	
T	Een rij grafisch voorstellen.
T	De algemene term in een rekenkundige en meetkundige rij bepalen.
T	Een bepaalde term in een rekenkundige en meetkundige rij achterhalen.
T	De limiet van een rekenkundige en meetkundige rij bepalen.
T	De som van n opeenvolgende termen bepalen in een rekenkundige en meetkundige rij.
T	De rentevoet, intrest of termijn van een belegging met enkelvoudige of samengestelde intrest bepalen.
T	Een aflossingstabel van een lening maken met behulp van een ICT-tool.
K	Een rij karakteriseren: type rij, toename.
K	Een voorbeeld geven van een convergente en niet-convergente rij.
K	Een rij geven die aan bepaalde voorwaarden voldoet.
O	Een probleemstelling oplossen met rijen in verschillende contexten.
O	Rendementen van beleggingen vergelijken.

Leerinhouden:

- Rijen
 - Voorbeelden
- Rekenkundige en meetkundige rijen
 - Algemene term
 - Som van de eerste n termen
 - Type toename
 - Convergentie
- Enkelvoudige intrest, samengestelde intrest
- Aflossingstabel

In Vlaanderen zijn rijen niet opgenomen in de eindtermen. Ze worden eventueel wel gezien als keuzeonderwerp. Ze worden vaak gezien in de tweede graad (in het katholiek onderwijs zijn ze bijvoorbeeld onderdeel van het leerplan voor Leerweg 5, maar niet voor Leerweg 4 [8]). Eveneens wordt enkelvoudige intrest en samengestelde intrest niet als een verplicht keuzeonderdeel gezien.

GroeimodellenCompetenties:

- Geschikte groeimodellen gebruiken om problemen op te lossen

Leerprocessen:**Proces**

- T De ogenblikkelijke verandering benaderen door verschillende veranderingen te berekenen.
- T Een grafiek met een logaritmische schaal lezen.
- T Een grafiek met een logaritmische schaal opstellen.
- K Gegeven situaties koppelen aan bijbehorende groeimodellen.
- K De veranderingen van functies van dezelfde familie grafisch vergelijken.
- K De veranderingen van machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies grafisch vergelijken.
- K De inverse relatie tussen exponentiële functies en logaritmische functies herkennen.
- O De veranderingen beschrijven a.d.h.v. een grafische voorstelling.
- O Een probleem oplossen dat gemodelleerd kan worden door een machtsfunctie, exponentiële functie of logaritmische functie.

Leerinhouden:

- Verandering van een functie
- Ogenblikkelijke verandering (intuïtieve benadering)
- Exponentiële functies, logaritmische functies, machtsfuncties van de vorm x^a , met $a = 1/2$, $a = 1/3$ of $a \in \mathbb{Z}$
- Exponentiële groei, logaritmische groei
- Inverse relatie tussen de exponentiële functie en logaritmische functie
- Logaritmische schaal

In de Vlaamse eindtermen voor het TSO/KSO worden er eveneens groeimodellen opgenomen, zij het enkel modellen van lineaire of exponentiële groei. Er zijn geen eindtermen die betrekking hebben tot logaritmische functies of machtsfuncties. Eveneens worden er in de Vlaamse eindtermen differentiequotiënten aangehaald: de leerlingen moeten veranderingen kunnen beschrijven en vergelijken met behulp van differentiequotiënten. Het concept 'ogenblikkelijke verandering' werd niet opgenomen in de Vlaamse eindtermen, hoewel dit concept in de Waalse eindcompetenties op een intuïtieve manier benaderd wordt. Daarentegen worden in de Vlaamse eindtermen de specifieke bijzonderheden van grafieken (zoals periodiciteit, extreme waarden) meer in de verf gezet dan in de Waalse eindcompetenties. Het grafische aspect wordt zowel benadrukt in eindtermen van Vlaanderen als in de eindcompetenties van Wallonië.

Zesde jaar**Kansrekening**Competenties:

- Van het toeval afhankende verschijnselen uit het dagelijkse leven duiden
- Informatie i.v.m. kansen analyseren en becommentariëren.

Leerprocessen:

Proces	
T	Kansen berekenen, inclusief voorwaardelijke.
K	Kansen identificeren o.b.v. informatie.
K	A.d.h.v. een kansboom de kans op een gebeurtenis bepalen.
K	Gebeurtenissen identificeren die gekoppeld zijn aan een bepaalde kans uit een kansboom, een diagram of een tabel.
K	Uit een probleemstelling het kansexperiment, de uitkomsten, de gebeurtenissen identificeren.

- O Een probleem i.v.m. kansen oplossen.
- O Informatie i.v.m. kansen analyseren en commentariëren, inclusief resultaten van simulaties.

Leerinhouden:

- Hulpmiddelen voor kansberekening:
 - Kansboom
 - Venndiagram
 - Simulatie
 - Tabel
- Kansexperiment, uitkomsten, gebeurtenissen
- Kans op een gebeurtenis
- Eigenschappen van kansen
- Voorwaardelijke kans

In Vlaanderen wordt kansrekenen niet expliciet opgenomen in de eindtermen van de derde graad, behalve in het specifiek gedeelte. In sommige leerplannen komt kansrekenen reeds aanbod in de tweede graad. Dit kan eventueel aansluiten bij Eindterm 51 van de tweede graad ASO voor de modernisering (de leerlingen interpreteren relatieve frequentie in termen van kans) [5].

Kansverdelingen

Competenties:

- In een gegeven context een kans bepalen a.d.h.v. de binomiale en normale verdeling

Leerprocessen:

Proces

- T Een kans berekenen in een context die het gebruik van een binominale of normale verdeling vereist.
- T De waarden van een variabele bepalen die overeenstemmen met een gegeven kans.
- K Een kansverdeling linken aan een gegeven context en de parameters identificeren.
- K Kansen i.v.m. de normale verdeling grafisch interpreteren.
- O Een concrete situatie modelleren a.d.h.v. een kansverdeling.
- O Een probleemstelling oplossen die het gebruik van een binomiale of normale verdeling vereist.

Leerinhouden:

- Uniforme verdeling
 - Verwachtingswaarde en standaarddeviatie
- Binomiale verdeling
 - Bernoulli-experimenten en -schema
 - Binomiaalcoëfficiënten
 - Kans op k successen (Bernoulli-schema)
 - Verwachtingswaarde en standaarddeviatie
- Normale verdeling
 - Verwachtingswaarde en standaarddeviatie
 - Grafiek van de kansverdeling
- Tabel van de normale verdeling, ICT-tools

In de Vlaamse eindtermen van het TSO/KSO wordt de nadruk enkel gelegd op de normale verdeling. Zowel in de Vlaamse eindtermen als de Waalse eindcompetenties moeten de leerlingen de verwachtingswaarde en standaarddeviatie kunnen gebruiken als karakteristieken van deze verdeling. In de Waalse eindcompetenties worden ook de uniforme verdeling en de binomiale verdeling gezien. In de leerinhouden staat aangegeven dat de verwachtingswaarde en standaarddeviatie van deze verdeling ook wordt gezien.

MeetkundeCompetenties:

- Meetkundige objecten aanwenden, ze voorstellen en wiskundig uitdrukken

Leerprocessen:

Proces	
T	Een verdwijnpunt en horizonlijn bepalen voor ruimtefiguren in centraal perspectief.
K	Figuren gemaakt in cavalièreperspectief en centraal perspectief herkennen.
O	De stappen bepalen die ondernomen moeten worden om een meetkundige constructie te verwezenlijken m.b.v. een interactieve meetkundige softwaretoepassing.
O	Overschakelen van de ene weergavemodus naar de andere.

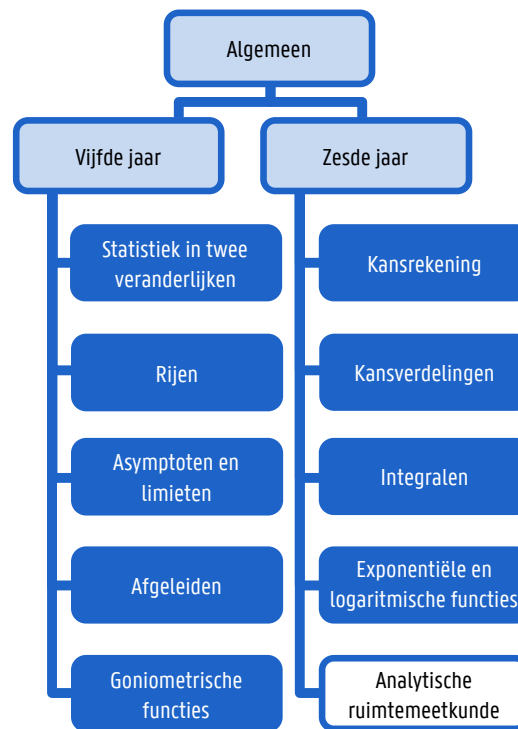
Leerinhouden:

- Cavalièreperspectief
- Centraal perspectief
- Gecoördineerde aanzichten
- Maquettes en ontwikkelingen

Het onderdeel meetkunde wordt in de basisvorming anders ingevuld dan bij de algemene vorming en wetenschappelijke vorming: bij de basisvorming wordt de nadruk gelegd op ruimtefiguren en hun perspectieftekeningen, terwijl deze onderdelen bij de eindcompetenties van de algemene vorming en wetenschappelijke vorming niet aan bod komen. In de eindtermen van de derde graad wiskunde van het TSO/KSO werd het onderdeel meetkunde niet opgenomen. In de huidige Vlaamse eindtermen in de eerste graad (dus na de modernisering) komen deze onderwerpen echter wel aan bod [5] in zowel de A-stroom als de B-stroom. Voor de invulling van eindterm ‘de leerlingen onderscheiden aan de hand van 2D- en 3D-voorstellingen meetkundige objecten in de ruimte’ (d.i. Eindterm 6.6 in de A-stroom, Eindterm 6.3 in de B-stroom) kunnen verschillende perspectieven, zoals het cavalièreperspectief, aangewend worden.

2.2 Algemene vorming

In Figuur 2.2 worden de onderwerpen die behandeld worden in de algemene vorming weergegeven. De algemene vorming breidt de basisvorming uit met de volgende onderwerpen: asymptoten en limieten, afgeleiden, goniometrische functies, integralen, exponentiële en logaritmische functies en analytische ruimte-meetkunde. De eindcompetenties van de algemene vorming dienen voornamelijk vergeleken te worden met de niet-specifieke eindtermen die van toepassing zijn in het ASO in Vlaanderen. Als voorbeeld beschouwen we de richting Latijn-Wetenschappen: het lesrooster van het *Athénée Royal Crommelynck* [2] voorziet 4 lessen wiskunde per week voor deze richting, overeenstemmend met de algemene vorming. Indien men de richting Latijn-Wetenschappen in Vlaanderen volgt in het katholiek onderwijs (KOV), worden eveneens 4 lessen voorzien [1].



Figuur 2.2.: Onderverdeling eindcompetenties wiskunde in de algemene vorming.

Vijfde jaar

Statistiek in twee veranderlijken

Competenties:

- Causaliteit en correlatie onderscheiden
- Bestuderen van de geschiktheid van een lineair model op basis van statistieken of wetenschappelijke experimenten

Leerprocessen:

Proces	
T	De vergelijking van de rechte van Mayer bepalen.
T	Een correlatiecoëfficiënt berekenen.
T	De vergelijking van een regressierechte bepalen a.d.h.v. de kleinste kwadratenmethode.
T	Een grafisch rekentoestel of spreadsheet gebruiken om een lineair model en correlatiecoëfficiënt te bepalen.
T	Een (theoretische) waarde berekenen a.d.h.v. een lineair model.
K	Het belang van een statistisch model uitleggen.
K	Het verschil tussen causaliteit en correlatie uitleggen a.d.h.v. een voorbeeld.
K	Het verband leggen tussen de vorm van een puntenwolk en de correlatiecoëfficiënt.
K	De werking van de kleinste kwadratenmethode uitleggen.
O	De voorgestelde of berekende statistische informatie beoordelen en becommentariëren.

Leerinhouden:

- Weergave van statistische data (in twee variabelen)
- Gemiddelde punt (zwaartepunt)
- Lineaire modellering
- Methode van Mayer en de kleinste kwadratenmethode
- Covariantie
- Lineaire correlatiecoëfficiënt
- Onderscheid tussen causaliteit en correlatie
- Statistische en grafische functionaliteit van ICT-tools

De beschreven leerinhouden, leerprocessen en competenties komen niet aan bod in de Vlaamse niet-specifieke eindtermen van de derde graad. Een verschil met de basisvorming is dat men nu een andere, meer geschikte en universele methode behandelt om een regressierechte op te stellen: de kleinste kwadratenmethode. De rechte van Mayer wordt desondanks nog steeds opgenomen in de leerinhouden, hoewel men in de praktijk vrijwel altijd de kleinste kwadratenmethode zal gebruiken om een regressierechte te bepalen [4].

RijenCompetenties:

- Een beroep doen op de eigenschappen van rijen in verschillende situaties

Leerprocessen:

Proces	
T	Een rij grafisch voorstellen.
T	De algemene term in een rekenkundige en meetkundige rij bepalen.
T	Een bepaalde term in een rekenkundige en meetkundige rij achterhalen.
T	De limiet van een rekenkundige en meetkundige rij bepalen.
T	De som van n opeenvolgende termen bepalen in een rekenkundige en meetkundige rij.
T	De rentevoet, intrest of termijn van een belegging met enkelvoudige of samengestelde intrest bepalen.
T	Een aflossingstabel van een lening maken met behulp van een ICT-tool.
K	Een rij karakteriseren: type rij, toename.
K	Voorbeelden geven van convergente en niet-convergente rijen.
K	De formule voor de som van de eerste n termen van een rekenkundige of een meetkundige rij bewijzen.
K	Een rij geven die aan bepaalde voorwaarden voldoet.
O	Een probleemstelling oplossen met rijen in verschillende contexten.

Leerinhouden:

- Rijen
 - Expliciet voorschrift (definitie)
 - Recursief voorschrift (definitie)
- Rekenkundige en meetkundige rijen
 - Algemene term
 - Som van de eerste n termen
 - Type toename
 - Convergentie
- Enkelvoudige intrest, samengestelde intrest
- Aflossingstabel

Indien men het onderwerp samengestelde intrest behandelt, kan men best ook de link leggen met exponentiële functies. Echter, exponentiële functies worden in de Waalse eindcompetenties pas aangeleerd in het zesde jaar. Zoals eerder aangehaald, worden rijen in Vlaanderen soms al gezien in de tweede graad, of als keuzeonderwerp in de derde graad. Ze zijn echter niet opgenomen in de niet-specifieke eindtermen van de derde graad ASO.

Asymptoten en limieten

Competenties:

- Het voorschrift, de grafiek en het asymptotisch gedrag van een functie beschrijven

Leerprocessen:

Proces	
T	Aan de hand van het voorschrift van een functie het domein bepalen, alsook de limieten die informatie verschaffen over de grafiek.
T	Limieten berekenen en ze grafisch interpreteren.
T	Grafieken koppelen aan informatie over limieten en asymptoten van een functie.
T	Het asymptotisch gedrag van een functie bepalen a.d.h.v. limieten, o.b.v. de grafiek.
T	De vergelijkingen zoeken voor de asymptoten van de grafiek van een functie.
T	Het asymptotische gedrag van een functie gebruiken om de functiewaarde in een punt te benaderen.
K	A.d.h.v. het voorschrift van gegeven functies de bewerkingen (t.o.v. de basisfuncties) en hiërarchie bepalen.
K	Een voorbeeld van een limiet van een functie geven die een onbepaaldheid illustreert.
O	De grafiek schetsen van een functie die voldoet aan bepaalde voorwaarden m.b.t. limieten en asymptoten.
O	Het voorschrift van een functie bepalen die aan bepaalde voorwaarden voldoet m.b.t. limieten en asymptoten.

Leerinhouden: *(beperkt tot rationale functies)*

- Bewerkingen met functies (inclusief samenstelling)
- Limiet van een functie
- Regels voor het berekenen van limieten
- Asymptoten

In de Vlaamse eindtermen voor het ASO wordt het begrip 'limiet' enkel vermeld in de context van veeltermfuncties: de leerlingen moeten met behulp van een intuïtief begrip van limiet het verband kunnen leggen tussen het begrip afgeleide, het begrip differentiequotiënt en de richting van de raaklijn aan de grafiek (B.2, Eindterm 15). Het limietbegrip in de Waalse eindcompetenties wordt veel uitgebreider behandeld. Ook wordt het asymptotisch gedrag in de Vlaamse eindtermen veel minder in de verf gezet: de leerlingen moeten enkel het asymptotisch gedrag van de functie $f(x) = a^x$ (B.2, Eindterm 22) kunnen aflezen, terwijl in de Waalse eindcompetenties er expliciet staat dat de leerlingen de grafiek moeten kunnen schetsen of het voorschrift bepalen van functies die aan bepaalde voorwaarden voldoen m.b.t. limieten en asymptoten.

Afgeleiden

Competenties:

- Concepten zoals raaklijn, verandering, helling en kromming linken aan afgeleiden.
- Extremumproblemen oplossen in diverse contexten.

Leerprocessen:

Proces	
T	Grafieken van functies koppelen aan grafieken van hun eerste en/of tweede afgeleide.
T	Afgeleiden van functies berekenen.
T	De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van een functie in een punt bepalen.
K	De definitie van het afgeleid getal grafisch interpreteren.
K	Het gedrag van een functie linken aan het teken van haar eerste afgeleide en/of het teken van haar tweede afgeleide.
O	Informatie over een functie combineren en gebruiken om deze voor te stellen.
O	Een probleemstelling oplossen m.b.t. het lokaal gedrag (lokale extrema) van een functie.
O	De grafiek schetsen van de afgeleide van een functie en vice versa.
O	De grafiek schetsen van een functie a.d.h.v. informatie over de eerste en tweede afgeleide.
O	Het onderscheid maken tussen de grafiek van de afgeleide en de grafiek van de functie zelf.

Leerinhouden: *(beperkt tot rationale functies en vierkantswortelfuncties)*

- Helling
- Afgeleid getal
- Raaklijn aan de grafiek van een functie in een punt
- Afgeleide functie
- Afgeleide van basisfuncties
- Formules voor afgeleiden
- Verband tussen de eerste afgeleide en helling van een functie
- Lokaal extremum
- Verband tussen de tweede afgeleide en de kromming van de grafiek van een functie
- Buigpunt

In het niet-specifieke gedeelte van de Vlaamse eindtermen wiskunde van het ASO worden afgeleiden enkel vermeld in de context van veeltermfuncties. Hierbij wordt de nadruk gelegd op de betekenis van afgeleiden als ogenblikkelijke verandering. Er wordt ook aangehaald van welke functies de afgeleide berekend moet worden (namelijk enkel van de functies $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ en veralgemenen naar $f(x) = x^n$). Het is wel een meerwaarde dat dit in de Vlaamse eindtermen expliciet wordt omschreven, want zo wordt gegarandeerd dat de leerlingen weten waar de formule van de afgeleide van een functie x^n vandaan komt. Net zoals in de Waalse eindcompetenties moeten leerlingen eveneens vraagstukken kunnen oplossen die te herleiden zijn tot extremumproblemen (maar opnieuw wordt dit in de Vlaamse eindtermen expliciet beperkt tot veeltermfuncties). Tweede afgeleiden en buigpunten worden niet in opgenomen in het niet-specifieke gedeelte van de Vlaamse eindtermen wiskunde.

Goniometrische functies

Competenties:

- Het verband leggen tussen goniometrische getallen van een hoek en goniometrische functies.
- Problemen modelleren en oplossen a.d.h.v. goniometrische functies.

Leerprocessen:

Proces

- T Berekenen van de hoekgrootte, de booglengte van een cirkel en de oppervlakte van een cirkelsector.
- T Grafieken van transformaties van goniometrische functies verbinden met hun voorschrift.
- T Het voorschrift van een transformatie van een goniometrische functie van haar grafiek bepalen.
- T De grafiek schetsen van een eenvoudige transformatie van een goniometrische functie.
- T Vergelijkingen van het type $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\tan x = a$ oplossen, gebuikmakend van een rekentoestel, de goniometrische cirkel en goniometrische functies.
- T Grafisch en/of algebraïsch oplossen van goniometrische vergelijkingen van het type $a \sin(bx + c) = k$.
- T Het bepalen van de amplitude, periode, faseverschuiving en extremum van een goniometrische functie.
- K Op een goniometrische cirkel een punt voorstellen dat overeenkomt met een bepaalde hoek, alsook de goniometrische getallen van een hoek.
- K Goniometrische functies grafisch voorstellen.
- K De goniometrische getallen van een hoek met bijbehorende reële functiewaarden grafisch associëren met goniometrische functies.
- K De rol van de parameters a , b en c van de functie $a \sin(bx + c)$ interpreteren.

- O Probleemstellingen oplossen waarvoor het gebruik van een functie van de vorm $a \sin(bx + c)$ nodig is.

Leerinhouden:

- Het getal π
- Hoeken, bogen, cirkelsectoren
- Radialen
- Georiënteerde hoeken
- Goniometrische basisfuncties
 - $\sin x$
 - $\cos x$
 - $\tan x$
- De sinusfunctie $a \sin(bx + c)$
- Amplitude, periode, faseverschuiving

Net zoals in de Waalse eindcompetenties, wordt in de Vlaamse eindtermen vooral de nadruk gelegd op de algemene sinusfunctie $a \sin(bx + c)$. De leerlingen moeten de parameters a , b en c kunnen interpreteren, de grafiek kunnen schetsen en grafisch kunnen bespreken. In Vlaanderen staat er enkel in de eindtermen dat leerlingen vergelijkingen van de vorm $\sin x = k$ grafisch moeten kunnen oplossen, terwijl in de Waalse eindcompetenties ook vergelijkingen van de vorm $a \sin(bx + c) = k$, $\cos x = k$ en $\tan x = a$ zijn opgenomen.

Zesde jaar

Kansrekening

Competenties:

- Kansrekening gebruiken om van het toeval afhankende verschijnselen uit het dagelijkse leven te duiden, om numerieke informatie te analyseren en te becommentariëren

Leerprocessen:

Proces

- T Kansen (a posteriori) berekenen a.d.h.v. simulaties die met een ICT-tool zijn gemaakt of statistische gegevens.
- T Tabellen, diagrammen, kansbomen en combinatorische formules gebruiken om kansen (a priori) te berekenen, inclusief voorwaardelijke.
- T Nagaan of twee gegeven gebeurtenissen afhankelijk zijn of onafhankelijk zijn.
- K A.d.h.v. een kansboom de kans op een gebeurtenis bepalen.

- K Gebeurtenissen identificeren die gekoppeld zijn aan een bepaalde kans uit een kansboom, een diagram of een tabel.
- K Uit een probleemstelling het kansexperiment, de uitkomsten, de gebeurtenissen identificeren.
- O Een probleem i.v.m. kansen oplossen a.d.h.v. **combinatoriek**.
- O Kansrekening gebruiken om numerieke informatie te begrijpen, te analyseren en te commentariëren, inclusief kansexperimenten.

Leerinhouden:

- Hulpmiddelen voor kansberekening:
 - Kansboom
 - Venndiagram
 - Simulatie
 - Tabel
 - **Combinatoriek**
 - * Telproblemen met of zonder herhaling
 - * Combinaties (zonder herhaling)
 - * Permutaties met of zonder herhaling
- Kansexperiment, uitkomsten, gebeurtenissen
- Kans op een gebeurtenis
- Eigenschappen van kansen
- Voorwaardelijke kans
- **Onafhankelijke gebeurtenissen**

In het ASO in Vlaanderen zijn er geen niet-specifieke eindtermen wiskunde omtrent het onderwerp kansrekening. De eindcompetenties voor de algemene vorming in Wallonië i.v.m. kansrekening zijn ook vrij uitgebreid, in tegenstelling tot Vlaanderen, waar de geziene onderwerpen enkel aan bod komen in het specifieke gedeelte van de eindtermen.

Kansverdelingen

Competenties:

- In een gegeven context een kans bepalen a.d.h.v. de binomiale en normale verdeling

Leerprocessen:

Proces	
T	Een kans berekenen in een context die het gebruik van een binominale of normale verdeling vereist.
T	De waarden van een variabele bepalen die overeenstemmen met een gegeven kans.
K	Een kansverdeling linken aan een gegeven context en de parameters identificeren.
K	Kansen i.v.m. de normale verdeling grafisch interpreteren.
K	Statische concepten linken aan kansen.
O	Een concrete situatie modelleren a.d.h.v. een kansverdeling.
O	Een probleemstelling oplossen die het gebruik van een binomiale of normale verdeling vereist.

Leerinhouden:

- Stochastische variabele
 - Verwachtingswaarde
 - Standaardafwijking
 - Kansverdeling
 - Verdelingsfunctie
- Uniforme verdeling
 - Verwachtingswaarde en standaarddeviatie
- Binomiale verdeling
 - Bernoulli-experimenten en -schema
 - Verwachtingswaarde en standaarddeviatie
 - Kansverdeling
- Normale verdeling
 - Verwachtingswaarde en standaarddeviatie
 - Grafiek van de kansverdeling
- Tabel van de normale verdeling, ICT-tools

In de Waalse eindcompetenties wordt 'stochastische variabele' als aparte leerinhoud opgenomen. In deze context worden begrippen zoals verwachtingswaarde en standaardafwijking ingevoerd. Echter, in de niet-specifieke Vlaamse eindtermen in het ASO komen deze begrippen enkel aan bod in de context van de normale verdeling. Bovendien wordt in de Waalse eindcompetenties ook de verdelingsfunctie van de binomiale verdeling besproken. Een voordeel is dat deze verdelingsfunctie kan gebruikt worden om de klokvorm van de normale verdeling op een natuurlijke manier te introduceren. Wat evenwel in de Waalse eindcompetenties ontbreekt, is de nadruk op het verband tussen de normale verdeling en de standaardnormale verdeling. In de Vlaamse eindtermen wordt dit verband vermeld in Eindterm 35 (zie B.2), terwijl dit verband in de Waalse eindcompetenties niet expliciet wordt aangehaald.

Integralen

Competenties:

- Een probleemstelling oplossen a.d.h.v. integraalrekening

Leerprocessen:

Proces	
T	Een oppervlakte benaderen door een som van oppervlakten m.b.v. een ICT-tool.
T	Nagaan of een gegeven functie de primitieve is van een andere.
T	Een primitieve bepalen.
T	Een bepaalde integraal berekenen.
T	Een oppervlakte of een volume berekenen.
K	De formule voor het volume van een omwentelingslichaam grafisch illustreren en verantwoorden.
K	Integralen gebruiken om de oppervlakte van een geselecteerd gebied in een grafiek te berekenen.
O	Gebruikmaken van de integraalrekening om problemen op te lossen.

Leerinhouden:

- Een oppervlak, volume in een rooster plaatsen
- Bepaalde integraal
- Hoofdstelling van de integraalrekening
- Primitieve functies
- Oppervlakte van een (vlak) oppervlak
- Volume van een omwentelingslichaam

Integralen zijn niet opgenomen in de niet-specifieke eindtermen wiskunde in Vlaanderen. In de Waalse eindcompetenties wordt daarentegen het integraalbegrip vrij uitgebreid behandeld: de leerlingen zien namelijk een formule voor het berekenen van het volume van een omwentelingslichaam, terwijl dit in de Vlaamse specifieke eindtermen zelfs niet aan bod komt.

Exponentiële en logaritmische functies

Competenties:

- Een exponentiële of logaritmische functie gebruiken voor de modellering van een verschijnsel
- Een probleemstelling oplossen waarvoor het gebruik van exponentiële of logaritmische functies nodig is

Leerprocessen:

Proces

- T Een eenvoudige exponentiële vergelijking oplossen.
- T Een eenvoudige logaritmische vergelijking oplossen.
- T Limieten, afgeleiden en primitieven van exponentiële en logaritmische functies berekenen.
- T Informatie van een grafiek met logaritmische schaal aflezen.
- K Eigenschappen van logaritmische functies bewijzen.
- K De groei van exponentiële functies, logaritmische functies en machtsfuncties vergelijken.
- O Een gepaste schaal kiezen om de gegevens van een probleem voor te stellen.
- O Een logaritmische of exponentiële functie gebruiken om een probleemstelling op te lossen.
- O Een puntenwolk modelleren door een exponentiële functie.
- O De geziene modellen herkennen in beschreven situaties.

Leerinhouden:

- Exponentiële functies
- Logaritmische functies
- Inverse relatie tussen de exponentiële functie en logaritmische functie
- Exponentiële functie en logaritmische functie met grondtal e
- Afgeleide van exponentiële en logaritmische functies
- Regel van l'Hôpital
- Logaritmische schaal

Logaritmen worden in de niet-specifieke Vlaamse eindtermen in het ASO aangehaald in Eindterm 23 (${}^a\log(x)$ als inverse van de functie a^x) en impliciet in Eindterm 24 (uit de betrekking $a^b = c$ de derde veranderlijke berekenen als de twee andere gegeven zijn). In de Waalse eindcompetenties wordt dit begrip meer uitgebreid gezien, want in de leerprocessen wordt bijvoorbeeld opgenomen dat de leerlingen ook eigenschappen van logaritmische functies moeten kunnen bewijzen. Bovendien zien de leerlingen eveneens de logaritmische schaal en de regel van l'Hôpital. Exponentiële functies worden zowel in de Vlaamse eindtermen als de Waalse eindcompetenties benadrukt in de context van probleemstellingen over exponentiële groeiprocessen.

Analytische ruimtemeetkunde

Competenties:

- Ruimtemeetkunde analytisch beschrijven

Leerprocessen:

Proces	
T	De collineariteit van punten nagaan, de coplanariteit van punten nagaan, de loodrechte stand van twee rechten nagaan.
T	Vergelijkingen van rechten en vlakken in de ruimte bepalen.
T	Evenwijdige rechten of vlakken met assen voorstellen a.d.h.v. hun vergelijking.
T	De vergelijking bepalen van een rechte of een vlak a.d.h.v. de voorstelling in het assenstelsel.
T	De onderlinge ligging van rechten en vlakken bepalen.
T	De coördinaat bepalen van het snijpunt van een rechte en een vlak.
T	Het snijpunt van drie vlakken bepalen en hun onderlinge ligging aangeven.
K	Het verband leggen tussen de verschillende vormen van vergelijkingen van rechten of vlakken.
K	Een punt met gegeven coördinaat in de ruimte voorstellen.
K	De oplossing van een stelsel van vergelijkingen meetkundig interpreteren.
O	Een probleemstelling omzetten naar een stelsel van vergelijkingen en de bijbehorende oplossing bepalen.
O	Een meetkundig probleem in de ruimte aanpakken.

Leerinhouden:

- Orthonormaal assenstelsel
- Ruimtevectoren
- Coördinaat van een punt in de ruimte

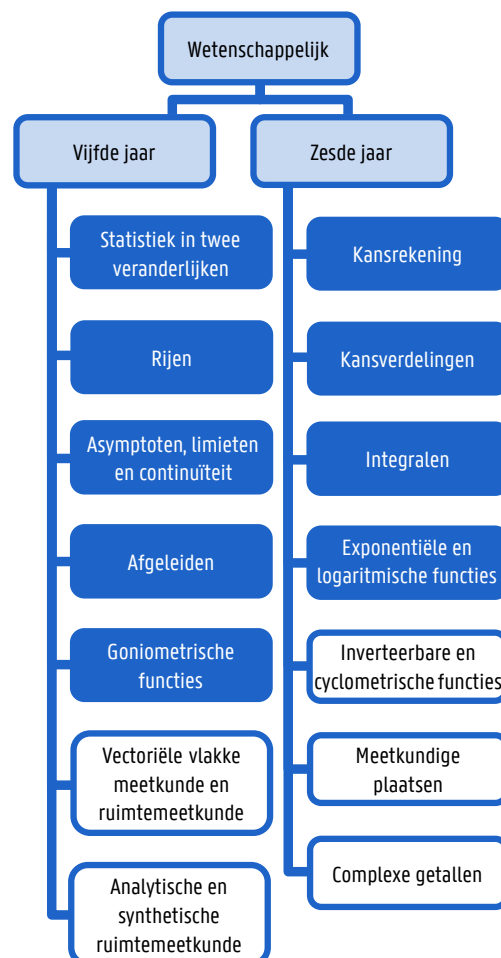
- Som van twee vectoren
- Vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal
- Afstand tussen twee punten
- Analytische voorwaarde voor de loodrechte stand van twee vectoren
- 3-puntenvoorwaarde (collineaire punten)
- 4-puntenvoorwaarde (coplanaire punten)
- Vectorvergelijkingen, parametrische en cartesiaanse vergelijkingen van een vlak
- Vectorvergelijkingen, parametrische en cartesiaanse vergelijkingen van een rechte in de ruimte
- Normaalvector van een vlak
- Voorwaarde voor de evenwijdigheid tussen twee rechten of twee vlakken
- Snijdende rechten en vlakken

Uit de beschrijving is het duidelijk dat dit onderwerp in de Waalse eindcompetenties vrij uitgebreid behandeld wordt. Daarentegen wordt in Vlaanderen analytische ruimtemeetkunde niet opgenomen in de niet-specifieke eindtermen wiskunde.

2.3 Wetenschappelijke vorming

In Figuur 2.3 worden de onderwerpen die gezien worden in de wetenschappelijke vorming weergegeven. De wetenschappelijke vorming breidt de algemene vorming uit met de volgende onderwerpen: vectoriële vlakke meetkunde en ruimtemeetkunde, analytische en synthetische ruimtemeetkunde, inverteerbare en cyclometrische functies, meetkundige plaatsen en, tot slot, complexe getallen.

De eindcompetenties van de wetenschappelijke vorming kan men grotendeels vergelijken met de specifieke en niet-specifieke eindtermen die van toepassing zijn in het ASO in Vlaanderen. Als voorbeeld kunnen we de richting Wetenschappen-Wiskunde beschouwen: het lesrooster van het *Athénée Royal Crommelynck* [2] voorziet 6



Figuur 2.3.: Onderverdeling eindcompetenties wiskunde in de wetenschappelijke vorming.

lesuren wiskunde per week voor deze richting (eventueel is er een optie *renforcement mathématiques*, met nog extra uren wiskunde). Indien men de richting Wetenschappen-Wiskunde in Vlaanderen volgt in het KOV, worden er eveneens 6 lesuren per week voorzien [1] (eventueel aangevuld met nog meer uren). In het gemeenschapsonderwijs worden 7 lesuren per week voorzien voor de richting Wetenschappen-Wiskunde [1].

Vijfde jaar

Statistiek in twee veranderlijken

Competenties:

- Causaliteit en correlatie onderscheiden
- Bestuderen van de geschiktheid van een lineair model op basis van statistieken of wetenschappelijke experimenten

Leerprocessen:

Proces	
T	De vergelijking van de rechte van Mayer bepalen.
T	Een correlatiecoëfficiënt berekenen.
T	De vergelijking van een regressierechte bepalen a.d.h.v. de kleinste kwadratenmethode.
T	Een grafisch rekentoestel of spreadsheet gebruiken om een lineair model en correlatiecoëfficiënt te bepalen.
T	Een (theoretische) waarde berekenen a.d.h.v. een lineair model.
K	Het belang van een statistisch model uitleggen.
K	Het verschil tussen causaliteit en correlatie uitleggen a.d.h.v. een voorbeeld.
K	De formules m.b.t. de parameters van de regressierechte bewijzen.
K	Het verband leggen tussen de vorm van een puntenwolk en de correlatiecoëfficiënt.
K	De werking van de kleinste kwadratenmethode uitleggen.
O	De voorgestelde of berekende statistische informatie beoordelen en becommentariëren.

Leerinhouden:

- Weergave van statistische data (in twee variabelen)
- Gemiddelde punt (zwaartepunt)
- Lineaire modellering
- Methode van Mayer
- kleinste kwadratenmethode (inclusief bewijs)

- Covariantie
- Lineaire correlatiecoëfficiënt
- Onderscheid tussen causaliteit en correlatie
- Statistische en grafische functionaliteit van ICT-tools

In de eindcompetenties van Wallonië worden de leerinhouden van de wetenschappelijke vorming enkel uitgebreid met het bewijs van de kleinste kwadratenmethode (i.e. het bewijs voor de bepaling van de coëfficiënten van de lineaire regressierechte). In Vlaanderen worden in enkele leerplannen (zoals het leerplan D/2004/0279/019 [8] van het KOV voor de derde graad ASO met component wiskunde) regressie en correlatie wel opgenomen als keuzeonderwerp.

Rijen

Competenties:

- Een beroep doen op de eigenschappen van rijen in verschillende situaties

Leerprocessen:

Proces
T Een rij grafisch voorstellen.
T De algemene term in een rij bepalen.
T Een bepaalde term in een rij achterhalen.
T De limiet van een rij voorspellen m.b.v. een ICT-tool.
T De waarde van de limiet van een rij verifiëren a.d.h.v. de definitie.
T De limiet van een rekenkundige en meetkundige rij bepalen.
T De som van n opeenvolgende termen bepalen in een rekenkundige en meetkundige rij.
T De oneindige som van opeenvolgende termen bepalen in een rekenkundige en meetkundige rij.
T De rentevoet, intrest of termijn van een belegging met enkelvoudige of samengestelde intrest bepalen.
T Een aflossingstabel van een lening maken met behulp van een ICT-tool.
K Een rij karakteriseren: type rij, toename.
K Voorbeelden geven van convergente en niet-convergente rijen.
K De formule voor de som van de eerste n termen van een rekenkundige of een meetkundige rij bewijzen.
K Een rij geven die aan bepaalde voorwaarden voldoet.

K De limiet van een rij definiëren en deze uitdrukken a.d.h.v. een schematische voorstelling.

O Een probleemstelling oplossen met rijen in verschillende contexten.

Leerinhouden:

- Rijen
 - Expliciet voorschrift (definitie)
 - Recursief voorschrift (definitie)
 - [Limiet van een rij](#)
- Rekenkundige en meetkundige rijen
 - Algemene term
 - Som van de eerste n termen
 - Type toename
 - Convergentie
- Enkelvoudige intrest, samengestelde intrest
- Aflossingstabel

Rijen worden niet expliciet bij naam vermeld in de specifieke eindtermen in Vlaanderen, maar de leerlingen dienen wel ‘problemen met betrekking tot discrete veranderingsprocessen wiskundig te kunnen modelleren en oplossen’ (B.3, Eindterm 18). De rij van Fibonacci (en het verwantschap met de gulden snede), wordt vaak aangehaald om de link van wiskunde met kunst te illustreren. Dit past overigens bij de specifieke eindterm m.b.t. ‘wiskunde en cultuur’ (B.3, Eindterm 19). Het zou een goede keuze zijn om rijen vrij vroeg in het jaar te behandelen, zodat de leerlingen op voorhand kennis kunnen maken met limietprocessen en met het begrip ‘oneindig’ (bij discrete processen).

Asymptoten, limieten en continuïteit

Competenties:

- [Informatie over delen van de grafiek van een functie afleiden o.b.v. het voorschrift](#)
- [Het formalisme van de analyse beheersen](#)
- Het voorschrift, de grafiek en het asymptotisch gedrag van een functie beschrijven

Leerprocessen:

Proces

T Aan de hand van het voorschrift van een functie het domein bepalen, alsook de limieten die informatie verschaffen over de grafiek.

T Limieten berekenen en ze grafisch interpreteren.

- T Het asymptotisch gedrag van een functie bepalen a.d.h.v. limieten, o.b.v. de grafiek.
- T De vergelijkingen zoeken voor de asymptoten van de grafiek van een functie.
- T Grafieken koppelen aan informatie over limieten en asymptoten van een functie.
- T Een nulpunt van een functie achterhalen met behulp van de bisectiemethode.
- T Het asymptotische gedrag van een functie gebruiken om de functiewaarde in een punt te benaderen.
- K A.d.h.v. het voorschrift van gegeven functies de bewerkingen (t.o.v. de basisfuncties) en hiërarchie bepalen.
- K De tussenstappen van een limietberekening rechtvaardigen.
- K Met behulp van kwantoren de limiet van een functie definiëren (naar een reëel getal en naar het oneindige), alsook deze limiet grafisch illustreren.
- K De continuïteit van een functie definiëren.
- K Het belang van de continuïteitsvoorwaarde in de tussenwaardestelling illustreren.
- K Een voorbeeld van een limiet van een functie geven die een onbepaaldheid illustreert.
- O De grafiek schetsen van een functie die voldoet aan bepaalde voorwaarden m.b.t. limieten, continuïteit en asymptoten.
- O Het voorschrift van een functie bepalen die aan bepaalde voorwaarden voldoet m.b.t. limieten en asymptoten.

Leerinhouden:

- Compleetheid van \mathbb{R}
- Bewerkingen met functies (inclusief samenstelling)
- Sluiting van het domein van een functie (m.b.t. adherente punten)
- Asymptoten en limieten van een functie
- Limiet van een som, een product, een quotiënt en de samenstelling van twee functies
- Continuïteit in een punt
- Continuïteit over een interval
- Functies 'afronden naar gehele getallen'
- Tussenwaardestelling (zonder bewijs)

De omschrijvingen in de Waalse eindcompetenties omvatten meer leerinhouden (compleetheid van \mathbb{R} , sluiting, adherente punten...) t.o.v. de Vlaamse eindtermen. In de Vlaamse eindtermen wordt het begrip continuïteit niet expliciet opgenomen in de eindtermen, maar is dit impliciet bevat in de eindterm 'de leerlingen kunnen een definitie formuleren voor begrippen uit de analyse en de samenhang met hun gebruik in toepassingen aangeven' (B.2, Eindterm 7). A.d.h.v. deze beschrijving is het niet duidelijk welk beheersingsniveau verwacht wordt van de leerlingen: in de Waalse eindcompetenties wordt bijvoorbeeld verwezen naar de tussenwaardstelling, maar dit valt niet op te maken uit de voorgaande Vlaamse eindterm.

Afgeleiden

Competenties:

- Concepten zoals raaklijn, verandering, helling en kromming linken aan afgeleiden
- [Informatie over het gedrag van een functie grafisch interpreteren](#)
- Extremumproblemen oplossen in diverse contexten

Leerprocessen:

Proces	
T	Grafieken van functies koppelen aan grafieken van hun eerste en/of tweede afgeleide.
T	Afgeleiden van functies berekenen.
T	De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van een functie in een punt bepalen.
K	Het afgeleid getal definiëren.
K	Formules i.v.m. afgeleiden bewijzen.
K	Het gedrag van een functie linken aan het teken van haar eerste afgeleide en/of het teken van haar tweede afgeleide.
K	De stelling van Rolle en de middelwaardstelling grafisch interpreteren.
K	De noodzaak van de aannames van de stelling van Rolle en de middelwaardstelling toelichten.
K	De voorwaarden herkennen om de regel van l'Hôpital toe te passen.
O	Een probleemstelling oplossen m.b.t. het lokaal gedrag (lokale extrema) van een functie.
O	De grafiek schetsen van de afgeleide van een functie en vice versa.
O	De grafiek schetsen van een functie a.d.h.v. informatie over de eerste en tweede afgeleide.
O	Informatie over een functie combineren en gebruiken om deze voor te stellen.

Leerinhouden:

- Helling
- Raaklijn aan de grafiek van een functie in een punt
- Afgeleid getal
- Afgeleide functie
- Afleidbaarheid van een functie
- Link tussen continuïteit en afleidbaarheid
- Rationale exponenten en n -de machtswortels
- Formules voor afgeleiden
- Regel van l'Hôpital
- Stelling van Rolle (zonder bewijs)
- Middelwaardestelling (zonder bewijs)
- Verband tussen de eerste afgeleide en helling van een functie
- Verband tussen de tweede afgeleide en de kromming van de grafiek van een functie
- Buigpunt, knikpunt, keerpunt

In de niet-specifieke eindtermen van het ASO in Vlaanderen is de beperking tot afgeleiden van veeltermfuncties opgeheven. De leerlingen moeten eveneens in staat zijn om de tweede afgeleide te berekenen en om probleemstellingen op te lossen a.d.h.v. afgeleiden. Ze dienen hierbij op een verantwoorde wijze gebruik te maken van ICT-middelen. In de Waalse eindcompetenties wordt de link tussen afleidbaarheid en continuïteit eveneens bij de leerinhouden opgenomen, alsook de stelling van Rolle en de middelwaardestelling. Het is goed dat men stilstaat bij de noodzaak van de voorwaarden om deze stellingen te kunnen toepassen.

Goniometrische functiesCompetenties:

- Het verband leggen tussen goniometrische getallen van een hoek en goniometrische functies.
- De verworven algebraïsche en analytische inzichten kunnen toepassen in een goniometrische context.
- Problemen modelleren en oplossen a.d.h.v. goniometrische functies.

Leerprocessen:

Proces	
T	Berekenen van de hoekgrootte, de booglengte van een cirkel en de oppervlakte van een cirkelsector.
T	Grafieken van transformaties van goniometrische functies verbinden met hun voorschrift.
T	Het voorschrift van een transformatie van een goniometrische functie van haar grafiek bepalen.
T	De grafiek schetsen van een eenvoudige transformatie van een goniometrische functie.
T	Gebruikmaken van verschillende basisformules om een uitdrukking om te vormen.
T	Een goniometrische vergelijking oplossen, in het bijzonder door gebruik te maken van een rekentoestel.
T	Het bepalen van de amplitude, periode, faseverschuiving en extremum van een goniometrische functie.
T	Een ongelijkheid gebruiken om functies te bestuderen.
K	Op een goniometrische cirkel een punt voorstellen dat overeenkomt met een bepaalde hoek, alsook de goniometrische getallen van een hoek.
K	Goniometrische functies grafisch voorstellen.
K	De goniometrische getallen van een hoek met bijbehorende reële functiewaarden grafisch associëren met goniometrische functies.
K	De rol van de parameters a , b en c van de functie $a \sin(bx + c)$ interpreteren.
K	De goniometrische basisformules bewijzen.
O	Probleemstellingen oplossen waarvoor het gebruik van een functie van de vorm $a \sin(bx + c)$ nodig is.
O	Een goniometrische identiteit aantonen.

Leerinhouden:

- Het getal π
- Hoeken, bogen, cirkelsectoren
- Radialen
- Georiënteerde hoeken
- Goniometrische basisfuncties
 - $\sin x$
 - $\cos x$
 - $\tan x$
- De sinusfunctie $a \sin(bx + c)$

- Amplitude, periode, faseverschuiving
- Goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden
- Goniometrische basisformules:
 - Somformule
 - Verdubbelingsformule
 - Formules van Carnot
 - Formules van Simpson

In de Vlaamse specifieke eindtermen zijn er geen extra toevoegingen omtrent dit onderwerp. In de Waalse eindcompetenties worden daarentegen expliciet de formules beschreven die de leerlingen moeten kunnen gebruiken: de somformule, verdubbelingsformule, formules van Carnot en de formules van Simpson. In de leerprocessen wordt ook beschreven dat de leerlingen deze basisformules moeten kunnen bewijzen.

Vectoriële vlakke meetkunde en ruimtemeetkunde

Competenties:

- Gebruikmaken van vectoren bij berekeningen en bewijzen

Leerprocessen:

Proces

- T In een gegeven assenstelsel een punt van de ruimte linken aan de bijbehorende coördinaat en vice versa.
- T Een lineaire combinatie van vectoren maken.
- T Een scalair product uitrekenen.
- T De grootte van een hoek berekenen, de afstand tussen twee punten berekenen, de norm van een vector berekenen.
- T De orthogonaliteit van twee vectoren nagaan.
- K Een meetkundig gegeven linken aan een vectoriële relatie.
- K De verbanden leggen tussen de drie manieren om een scalair product te definiëren.
- K De stelling van Al-Kashi (cosinusregel) bewijzen a.d.h.v. vectoriële berekeningen.
- O Een meetkundige eigenschap bewijzen met behulp van vectoriële berekeningen of scalaire producten (evenredigheid, evenwijdigheid, orthogonaliteit).

Leerinhouden:

- Coplaire vectoren
- Lineaire combinatie van vectoren
- Assenstelsel
- Componenten van een vector
- Scalair product
- Eigenschappen van het scalair product
- Norm van een vector
- Orthogonale vectoren

In de Vlaamse specifieke eindtermen wordt er niet verwezen naar vectoriële meetkunde. Er wordt wel beschreven dat de leerlingen ‘meetkundige problemen met diverse hulpmiddelen moeten kunnen voorstellen en oplossen’ (B.3, Eindterm 15); hierbij zou men dus het gebruik van vectoren kunnen aanwenden. Vectorrekening wordt in Vlaanderen reeds gezien in de tweede graad: in de nieuwe eindtermen van de tweede graad (na de modernisering) wordt vectorrekening opgenomen (zie bijvoorbeeld Cesaurodoel 6.5.3) [5]; de vectorrekening wordt echter wel beperkt tot vectoren in het vlak.

Analytische en synthetische ruimtemeetkundeCompetenties:

- Meetkundige eigenschappen bewijzen a.d.h.v. analytische of synthetische methoden
- Rechten en vlakken analytisch karakteriseren
- Een meetkundig probleem oplossen a.d.h.v. vergelijkingen van rechten en vlakken

Leerprocessen:**Proces**

- T Vectoriële, parametrische en Cartesiaanse vergelijkingen bepalen van rechten en vlakken.
- T Evenwijdige rechten of vlakken met assen voorstellen a.d.h.v. hun vergelijking.
- T De vergelijking bepalen van een rechte of een vlak a.d.h.v. de voorstelling in het assenstelsel.
- T De afstand berekenen tussen twee punten, een punt en een rechte, een punt en een vlak, twee evenwijdige rechten, twee evenwijdige vlakken of tussen twee kruisende rechten.
- T De vergelijking van een middelloodvlak bepalen.
- T Het snijpunt bepalen van drie vlakken, twee rechten, een rechte en een vlak en hun onderlinge ligging aangeven.
- K In een veelvlak de onderlinge ligging (loodrechte stand) bepalen van lijnstukken en vlakken.

- O Een meetkundige eigenschap a.d.h.v. een synthetische methode bewijzen.
- O Een meetkundige eigenschap a.d.h.v. een analytische methode bewijzen.
- O Het snijpunt van een rechte met een vlakkenwaaier bespreken of het snijpunt van een vlak met een rechtenwaaier bespreken in functie van een parameter.

Leerinhouden:

- Synthetische invalshoek
 - Loodrechte stand van rechten
 - Rechte loodrecht op een vlak
 - Loodrechte vlakken
 - Criterium voor de loodrechte stand van twee rechten
 - Criterium voor de loodrechte stand van een rechte en een vlak, van twee vlakken
 - Constructie van de gemeenschappelijke loodlijn van twee kruisende rechten
 - Afstand
 - Middelloodvlak
- Analytische invalshoek
 - Richtingsvector van een rechte
 - Richtingsvectoren van een vlak
 - Vectorvergelijkingen, parametrische en cartesiaanse vergelijkingen van een rechte
 - Vectorvergelijkingen, parametrische en cartesiaanse vergelijkingen van een vlak
 - Vergelijking van een vlak in determinantvorm
 - Eigenschappen van determinanten, in het opzicht om de vergelijking van een vlak te bepalen
 - Berekening van een determinant a.d.h.v. minoren
 - Normaalvector van een vlak
 - Voorwaarde voor evenwijdigheid en loodrechte stand tussen twee rechten
 - Voorwaarde voor evenwijdigheid en loodrechte stand tussen twee vlakken
 - Voorwaarde voor evenwijdigheid en loodrechte stand tussen een rechte en een vlak
 - Afstand tussen twee punten, tussen een punt en een vlak

De Vlaamse specifieke eindtermen beschrijven slechts één invalshoek om meetkundige eigenschappen te omschrijven, namelijk de analytische invalshoek. Er wordt niet verwezen naar synthetische meetkunde. De leerlingen moeten volgens zowel de Vlaamse eindtermen als de Waalse eindcompetenties in staat zijn om rechten en vlakken door vergelijkingen voor te stellen, hun onderlinge ligging te bespreken en afstanden tussen punten, rechten en vlakken te berekenen. In de Waalse eindcompetenties worden er meer begrippen aangehaald om dit onderwerp in te kleden, zoals middelloodvlak, vlakkenwaaier en rechtenwaaier. Bovendien worden determinanten aangewend om de vergelijking van een vlak te bepalen, terwijl het woord ‘determinant’ in de Vlaamse eindtermen niet voorkomt. Matrices komen wel aan bod in de Vlaamse specifieke eindtermen, terwijl er daarentegen geen verwijzing naar terug te vinden is in de Waalse eindcompetenties. Dit is een vreemde keuze, want een determinant wordt per definitie geassocieerd met een (vierkante) matrix. Bovendien is een van de hoofdtoepassingen van een determinant het bepalen van de inverse van een vierkante matrix (a.d.h.v. de formule $A^{-1} = 1/\det(A) \cdot \text{adj}(A)$) en nagaan of een matrix inverteerbaar is. Eigenschappen zoals $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ kunnen eveneens niet aangehaald worden indien er geen definitie wordt gezien van matrixvermenigvuldiging.

Zesde jaar

Kansrekening

Competenties:

- Kansrekening gebruiken om van het toeval afhankende verschijnselen uit het dagelijkse leven te duiden, om numerieke informatie te analyseren en te becommentariëren

Leerprocessen:

Proces	
T	Kansen (a posteriori) berekenen a.d.h.v. simulaties die met een ICT-tool zijn gemaakt of statistische gegevens.
T	Tabellen, diagrammen, kansbomen en combinatorische formules gebruiken om kansen (a priori) te berekenen, inclusief voorwaardelijke.
T	Nagaan of twee gegeven gebeurtenissen afhankelijk zijn of onafhankelijk zijn.
T	Het binomium van Newton toepassen.
K	De formules opstellen om een variatie, combinatie en permutatie te berekenen.
K	De eerste lijnen van de driehoek van Pascal opschrijven en de link leggen met binomiaalcoëfficiënten.
K	De symmetrie-formule bewijzen, de formule van Pascal bewijzen.
K	A.d.h.v. een kansboom de kans op een gebeurtenis bepalen.

- K Gebeurtenissen identificeren die gekoppeld zijn aan een bepaalde kans uit een kansboom, een diagram of een tabel.
- K Uit een probleemstelling het kansexperiment, de uitkomsten, de gebeurtenissen identificeren.
- O Een probleem i.v.m. kansen oplossen a.d.h.v. een simulatie met een ICT-tool.
- O Een probleem i.v.m. kansen oplossen a.d.h.v. combinatoriek.
- O Kansrekening gebruiken om numerieke informatie te begrijpen, te analyseren en te commentariëren, inclusief kansexperimenten.

Leerinhouden:

- Hulpmiddelen voor kansberekening:
 - Kansboom
 - Venndiagram
 - Simulatie
 - Tabel
 - Combinatoriek
 - * Telproblemen met of zonder herhaling
 - * Combinaties met of zonder herhaling
 - * Permutaties met of zonder herhaling
- Driehoek van Pascal met eigenschappen
- Binomium van Newton
- Kansexperiment, uitkomsten, gebeurtenissen
- Kans op een gebeurtenis
- Eigenschappen van kansen
- Voorwaardelijke kans
- Onafhankelijke gebeurtenissen

In de Vlaamse specifieke eindtermen staat er eveneens beschreven dat de leerlingen het binomium van Newton moeten kunnen gebruiken. In de Waalse eindcompetenties wordt expliciet de link gelegd met de driehoek van Pascal en de formules van Pascal, die de leerlingen moeten kunnen bewijzen. Het is een meerwaarde dat dit opgenomen is in de eindcompetenties, want a.d.h.v. de driehoek van Pascal kan het binomium van Newton ook op een visuele manier aangebracht worden. In de Waalse eindcompetenties wordt er bij de leerprocessen een nadruk gelegd op simulaties met een ICT-tool, terwijl dit aspect niet opgenomen werd in de Vlaamse eindtermen. Bovendien zijn de leerinhouden in de Waalse eindcompetenties veel specifieker omschreven.

Kansverdelingen

Competenties:

- In een gegeven context een kans bepalen a.d.h.v. de binomiale en normale verdeling

Leerprocessen:

Proces	
T	Een kans berekenen in een context die het gebruik van een binominale of normale verdeling vereist.
T	De waarden van een variabele bepalen die overeenstemmen met een gegeven kans.
K	Een kansverdeling linken aan een gegeven context en de parameters identificeren.
K	Kansen i.v.m. de normale verdeling grafisch interpreteren.
K	Statische concepten linken aan kansen.
O	Een concrete situatie modelleren a.d.h.v. een kansverdeling.
O	Een probleemstelling oplossen die het gebruik van een binomiale of normale verdeling vereist.

Leerinhouden:

- Stochastische variabele
 - Verwachtingswaarde
 - Standaardafwijking
 - Kansverdeling
 - Verdelingsfunctie
- Binomiale verdeling
 - Bernoulli-experimenten en -schema
 - Verwachtingswaarde en standaarddeviatie
 - Kansverdeling
- Uniforme verdeling
 - Verwachtingswaarde en standaarddeviatie
- Normale verdeling
 - Verwachtingswaarde en standaarddeviatie
 - Grafiek van de kansverdeling
- Tabel van de normale verdeling, ICT-tools

In Vlaamse eindtermen wiskunde werd de normale verdeling reeds opgenomen, maar de binomiale verdeling nog niet. In de Vlaamse specifieke eindtermen wordt dit wel opgenomen: de leerlingen moeten de binomiale verdeling of de normale verdeling kunnen gebruiken als model bij een kansexperiment. In de Waalse eindcompetenties staat expliciet beschreven in de leerinhouden dat de leerlingen de verwachtingswaarde of de standaarddeviatie van de binomiale verdeling moeten zien, terwijl dit niet blijkt uit de Vlaamse eindtermen.

Integralen

Competenties:

- De integraal schrijven als een oneindige som
- Een probleemstelling oplossen a.d.h.v. integraalrekening

Leerprocessen:

Proces

- T Een oppervlakte benaderen door een som van oppervlakten m.b.v. een ICT-tool.
- T Een primitieve bepalen.
- T Een bepaalde integraal berekenen.
- T Een *lengte*, oppervlakte of een volume berekenen.
- K De link tussen de onbepaalde integraal en de afgeleide verantwoorden a.d.h.v. tussenstappen.
- K De link tussen de bepaalde integraal en de primitieve verantwoorden a.d.h.v. tussenstappen.
- K Integralen gebruiken om de oppervlakte van een geselecteerd gebied in een grafiek te berekenen.
- O Gebruikmaken van de integraalrekening om problemen op te lossen.

Leerinhouden:

- Benadering van lengtes
- Een oppervlak, volume in een rooster plaatsen
- Bepaalde integraal
- Middelwaardestelling voor integralen
- Hoofdstelling van de integraalrekening
- Primitieve functies
- Berekening van een bepaalde integraal a.d.h.v. een primitieve
- Integratie door verandering van variabele, of substitutie
- Partiële integratie

- Oppervlakte van een (vlak) oppervlak
- Volume van een omwentelingslichaam
- Booglengte

Integralen worden slechts beperkt opgenomen in de niet-specifieke eindtermen wiskunde in Vlaanderen. Het enige wat vermeld wordt over integralen, is dat de leerlingen de bepaalde en onbepaalde integraal van functies moeten kunnen berekenen en ze in concrete situaties gebruiken, en hierbij op een verantwoorde wijze gebruikmaken van rekenregels, formules en manuele rekentechnieken. In de Waalse eindcompetenties worden er ook enkele toepassingen gespecificeerd: berekenen van booglengtes, oppervlakten en volumes. Eveneens worden bepaalde technieken om integralen uit te rekenen in de verf gezet, wat voor meer duidelijkheid zorgt.

Exponentiële en logaritmische functies

Competenties:

- Een exponentiële of logaritmische functie gebruiken voor de modellering van een verschijnsel
- [Verschillende groeimodellen beheersen](#)
- Probleemstellingen uit verschillende contexten oplossen

Leerprocessen:

Proces	
T	Een exponentiële of logaritmische vergelijking oplossen.
T	Een exponentiële of logaritmische ongelijkheid oplossen.
T	Limieten, afgeleiden en primitieven van exponentiële en logaritmische functies berekenen.
T	Een grafiek met logaritmische schaal gebruiken.
K	Eigenschappen van logaritmische functies bewijzen.
K	De groei van exponentiële functies, logaritmische functies en machtsfuncties vergelijken.
K	De stappen van de oplossing van een exponentiële of logaritmische vergelijking kunnen verantwoorden.
K	De stappen van de oplossing van een exponentiële of logaritmische ongelijkheid kunnen verantwoorden.
O	Een exponentiële functie, logaritmische functie of machtsfunctie gebruiken om een probleemstelling op te lossen.
O	A.d.h.v. een exponentiële of logaritmische vergelijking of ongelijkheid een probleemstelling oplossen.
O	Een puntenwolk modelleren door een exponentiële of logaritmische functie.

Leerinhouden:

- Exponentiële functies
- Logaritmische functies
- Inverse relatie tussen de exponentiële functie en logaritmische functie
- Het getal e
- Exponentiële functie en logaritmische functie met grondtal e
- Exponentiële vergelijkingen en ongelijkheden
- Logaritmische vergelijkingen en ongelijkheden
- Limieten en afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies
- Studie van de functie e^{-x^2}
- Logaritmische schaal

In de niet-specifieke Vlaamse eindtermen in het ASO kwamen logaritmen en exponentiële functies reeds aan bod. Voor de specifieke eindtermen is er echter nog een kleine toevoeging: leerlingen moeten het verloop van exponentiële en logaritmische functies kunnen onderzoeken. In de Waalse eindcompetenties wordt expliciet aangehaald dat de leerlingen in staat moeten zijn om exponentiële en logaritmische vergelijkingen/ongelijkheden te kunnen oplossen. De functie e^{-x^2} wordt eveneens bestudeerd. Dit heeft als voordeel dat men bij de introductie van de normale verdeling naar deze functie kan verwijzen (m.b.v. transformaties). Het functievoorschrift van de Gausscurve wordt immers gegeven door:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Inverteerbare en cyclometrische functiesCompetenties:

- De inverse relaties tussen functies kennen en omschrijven
- Cyclometrische functies beheersen

Leerprocessen:**Proces**

- T Controleren of een bepaalde functie injectief, surjectief of bijjectief is.
- T Het domein en de afgeleide van cyclometrische functies bepalen.
- K Een inverse functie interpreteren als een proces dat een reeks bewerkingen omkeert.
- K De grafiek schetsen van cyclometrische functies.
- K Afgeleiden van cyclometrische functies bepalen.

- O De inverse van een functie bepalen (door eventueel een restrictie te beschouwen) en deze samen met de originele functie voorstellen.
- O Grafieken en voorschriften van cyclometrische functies aan elkaar linken.

Leerinhouden:

- Injectie, surjectie, bijectie
- Inverse van een functie
- Link tussen de grafiek van een functie en de grafiek van haar inverse
- Link tussen de afgeleide van een functie en de afgeleide van haar inverse
- Cyclometrische functies

In de specifieke Vlaamse eindtermen worden cyclometrische functies niet vermeld, hoewel men bij het oplossen van vergelijkingen van de vorm $\sin x = k$ (cf. B.3, Eindterm 30) in principe gebruik moet maken van de cyclometrische functie arcsin (tenzij men bijvoorbeeld grafisch de snijpunten berekent van de functies $y = \sin x$ en $y = k$ a.d.h.v. een rekentoestel). Inverse relaties worden beperkt opgenomen in de Vlaamse eindtermen (cf. B.2, Eindterm 23: het verband leggen tussen de functies $f(x) = x^2$ en $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^3$ en $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en naar analogie tussen de functies $f(x) = x^n$ en $f(x) = \sqrt[n]{x}$ en tussen de functies $f(x) = a^x$ en $f(x) = {}^a\log(x)$). In de Waalse eindcompetenties worden inverse relaties meer in de verf gezet: er worden hierbij zelfs begrippen zoals injectie, surjectie en bijectie vermeld. Verder wordt de link tussen de afgeleide van een functie en de afgeleide van haar inverse in een punt $x = a$ besproken:

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}.$$

Meetkundige plaatsen

Competenties:

- De vergelijking van een meetkundige plaats en de aard bepalen
- Een probleem oplossen dat beschreven wordt door een meetkundige plaats

Leerprocessen:

Proces

- T De vergelijking van een kegelsnede bepalen.
- T De eigenschappen van een kegelsnede bepalen.
- T De vergelijking van een raaklijn aan een kegelsnede bepalen.
- T Een kegelsnede tekenen (met een toestel a.d.h.v. software).
- K A.d.h.v. een vergelijking een kegelsnede identificeren.

- K De eigenschappen van een kegelsnede identificeren.
- K De optische eigenschappen van kegelsneden beschrijven en illustreren.
- O De vergelijking van een meetkundige plaats bepalen, interpreteren en voorstellen.
- O Een probleem met kegelsneden oplossen.

Leerinhouden:

- Metrische eigenschappen omzetten naar meetkundige plaatsen
- Meetkundige plaatsen gedefinieerd door beschrijvende lijnen bepalen
- Snijpunt van een kegel en een vlak
- Definitie, constructie en vergelijking van een ellips, van een hyperbool en een parabool met symmetrieassen evenwijdig aan de assen van het coördinatensysteem
- Definitie van kegelsneden a.d.h.v. brandpunten en samenhang tussen definities
- Eigenschappen van kegelsneden
- Effect van een verschuiving op de vergelijking van een kegel
- Optische eigenschappen van kegelsneden

Hoewel parabolische functies (bv. $y = x^2$) en hyperbolische functies (bv. $y = 1/x$) aan bod komen in de Vlaamse eindtermen, wordt de link met kegelsneden hierin niet opgenomen. In de Waalse eindcompetenties wordt dit onderwerp vrij uitgebreid behandeld, vertrekkende van het concept 'meetkundige plaats'. Er worden eveneens optische eigenschappen van kegelsneden gezien.

Complexe getallen

Competenties:

- Complexe getallen gebruiken bij het bewijzen of uitrekenen van uitdrukkingen

Leerprocessen:

Proces

- T Rekenen in \mathbb{C} .
- T De goniometrische vorm van een complex getal omzetten naar de algebraïsche vorm en vice versa.
- T Een vergelijking oplossen in \mathbb{C} .
- T De complexe n -de machtswortels van een complex getal bepalen en ze voorstellen in het vlak van Gauss.
- K De bewerkingen in \mathbb{C} meetkundig interpreteren.

- K De twee voorstellingswijzen van een complex getal aan elkaar linken.
- K Het reëel deel, het imaginair deel, de modulus, het argument, de toegevoegde van een complex getal grafisch voorstellen.
- O Een meetkundige eigenschap bewijzen a.d.h.v. complexe getallen.

Leerinhouden:

- Algebraïsche en meetkundige voorstelling van een complex getal
- Toegevoegde, modulus en argument van een complex getal
- Bewerkingen met complexe getallen in \mathbb{C}
- Vlak van Gauss
- Formule van De Moivre

In de specifieke eindtermen wiskunde in het ASO komen complexe getallen aan bod in Eindterm 2 (de leerlingen kunnen complexe getallen meetkundig voorstellen en er bewerkingen mee uitvoeren) en Eindterm 3 (de leerlingen kunnen vierkantsvergelijkingen in één complexe onbekende oplossen), bij het onderdeel algebra (zie B.3). In de Waalse eindcompetenties wordt eveneens de basis gegeven van complexe getallen, maar worden de leerinhouden preciezer gespecificeerd. Een leerproces dat wordt aangehaald, is een meetkundige eigenschap bewijzen a.d.h.v. complexe getallen. Men zou bijvoorbeeld drie punten z_A, z_B, z_C in het complexe vlak kunnen voorstellen en dan de hoek \hat{A} van driehoek ABC berekenen door het argument van $(z_C - z_A)/(z_B - z_A)$ te beschouwen. Desgelijks zou men kunnen aantonen dat de driehoek gelijkbenig is indien bijvoorbeeld $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$.

Conclusie

Antwoord op de onderzoeksvraag

In de [Inleiding](#) werd de volgende onderzoeksvraag gesteld:

‘Wat zijn de educatieve verschillen tussen de huidige eindtermen wiskunde in Vlaanderen en de eindcompetenties wiskunde in Wallonië in de derde graad?’

In Hoofdstuk 2 werd deze vraag beantwoord. Er blijken veel verschillen te zijn, maar niet enkel op inhoudelijk vlak. De manier waarop de eindtermen/eindcompetenties geformuleerd zijn, is een verschil van dag en nacht. In Wallonië worden de eindcompetenties voorgesteld a.d.h.v. eenheden die over een specifiek onderwerp handelen. Deze eenheden worden verder opgesplitst in competenties, leerprocessen, leerinhouden en multidisciplinaire strategieën. Op deze manier worden er duidelijke en concrete verwachtingen geschetst van de te behalen competenties. In Vlaanderen is de omschrijving van de eindtermen veel beknopter (slechts één zin). Daardoor worden er minder leerinhouden en concrete doelstellingen aangereikt. Een gevolg van dit verschil is dat men in Wallonië minder kans heeft om weinig ambitieuze (m.b.t. het niveau van wiskundige geletterdheid) leerplannen aan te treffen: de onderwijsverstrekkers moeten hun leerplandoelstellingen namelijk afstemmen op de eindcompetenties. In Vlaanderen wordt er daarentegen aan de onderwijsverstrekkers meer vrijheid gegeven om de leerinhouden educatief aan te reiken.

Op inhoudelijk vlak kan men besluiten dat er veel meer leerinhouden gespecificeerd worden in de Waalse eindcompetenties dan in de Vlaamse eindtermen. Er dient wel opgemerkt te worden dat er in Wallonië minder aandacht wordt besteed aan het vakonderdeel algebra: de woorden ‘matrix’ of ‘vectorruimte’ komen bijvoorbeeld nergens voor in de eindcompetenties.

Een blik op de gemoderniseerde eindtermen

De gemoderniseerde Vlaamse eindtermen worden beschreven als ‘duidelijk en evalueerbaar geformuleerd’ en ‘omvattender’ dan de huidige eindtermen [5]. Hoewel deze nieuwe eindtermen nog steeds bestaan uit één zin, worden er contextelementen toegevoegd, samen met een formulering van kenniselementen en beheersingsniveaus. Hierbij werd de taxonomie van Bloom als inspiratiekader gehanteerd. Op deze manier worden de eindtermen inderdaad duidelijker afgebakend en worden er meer leerinhouden aangereikt. Structureel komen deze eindtermen dichter te staan bij Wallonië. Deze nieuwe, gemoderniseerde eindtermen komen dus geen moment te vroeg.

A

English summary

Partim I

Numerical methods for solving fractional diffusion equations

The main purpose of this part of the master's dissertation is to investigate and numerically solve fractional initial-value problems considering the Caputo fractional derivative.

In Chapter 1, a general overview of the main concepts from the theory of fractional calculus is given. The Caputo fractional derivative ${}^C_0D_t^\alpha f(t)$ of order α (where $k - 1 < \alpha < k$ and k is a natural number larger than 0) is presented:

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(k - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{k - \alpha - 1} f^{(k)}(\tau) d\tau.$$

Other fractional derivatives, like the Grünwald-Letnikov and Riemann-Liouville fractional derivative, are also considered. Their relationship with the Caputo fractional derivative is stated and proven. At the end of the chapter, the fractional derivative of a power function is calculated as an example (where $\gamma > k - 1$):

$$D_t^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \alpha + 1)} t^{\gamma - \alpha}.$$

Chapter 2 introduces the Laplace transform. This integral transform can be particularly useful when solving differential equations. The Laplace transform $\mathcal{L}(f(t))(z)$ is defined as follows (where $z \in \mathbb{C}$ and $\Re(z) > 0$):

$$\mathcal{L}(f(t))(z) := \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt.$$

In Chapter 3, the technique ‘separation of variables’ is used to obtain the solution of a one-dimensional diffusion equation with a constant diffusion coefficient. The Laplace transform is also used in this process. At the end of this chapter, a framework is introduced in order to prove regularity properties of the solution.

At last, a description of two approximation methods is given in Chapter 4. Several examples of fractional initial-value problems are considered for $0 < \alpha < 1$, e.g.:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t^3 \sin x + \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)} t^{3-\alpha} \sin x & x \in]0, \pi[, t \in]0, 1[\\ u(0, t) &= 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ u(\pi, t) &= 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ u(x, 0) &= 0 & 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Using the formula for the Caputo fractional derivative of a power function, one can readily verify that the exact solution of the above fractional initial-value problem is given by $u(x, t) = t^3 \sin x$. To obtain a numerical approximation for this solution, one can consider a discretization of the time interval $[0, T]$ in $n \in \mathbb{N}$ equidistant subintervals $[t_{l-1}, t_l]$ with fixed length $\tau = T/n$. The Caputo fractional derivative can now be approximated as follows for $t = t_i$:

$$D_t^\alpha u(x, t_i) \approx \sum_{l=1}^i g(t_{i+1-l}) [u(x, t_l) - u(x, t_{l-1})], \quad \text{where } g(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

This is the so-called discrete convolution approximation. Another approximation can be established by approximating the Caputo fractional derivative by:

$$D_t^\alpha u(x, t_i) \approx \sum_{l=1}^i \frac{u(x, t_l) - u(x, t_{l-1})}{\tau} [g(t_{i+1-l}) - g(t_{i-l})], \quad \text{where } g(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

This is the so-called L^1 -approximation. In Chapter 4, a description of the implementation of these two numerical methods is given. Subsequently, one can find the numerical results at the end of the chapter, where the exact solution is compared with the approximated solution. From these numerical results, it can be concluded that the L^1 -approximation is the most accurate in most of the cases and that the convergence rate of this method is usually of higher order. For example, this is the case for the above fractional initial-value problem. However, some examples show that the discrete convolution approach may produce smaller errors in some particular cases. This opens a path for further research.

Partim II

Attainment targets in Flanders and Wallonia: a comparative study

In Belgium, almost all education policy is being made at the Community level. Both the Flemish Community and the French Community are responsible for developing their own attainment targets. These targets specify the knowledge, understanding and skills that learners are expected to have acquired by the end of an educational program. In this part of the master's dissertation, the differences between the current Flemish and Walloon attainment targets are being studied. Only the third cycle (Dutch: *graad*) of secondary education is considered. The research question is:

‘What are the educational differences between the current Flemish attainment targets and the Walloon attainment targets for mathematics in the third cycle?’

In order to answer this question in an appropriate way, the organization and structure of the attainment targets in Flanders and Wallonia are briefly described in Chapter 1. In Chapter 2, the attainment targets in Wallonia are reviewed and compared with those of Flanders. The current Flemish attainment targets in the third cycle are included in Appendix B. For the comparative review itself, a distinction is being made between basic education, general education and scientific education.

The way in which the attainment targets are formulated is a crucial difference. In Wallonia, the attainment targets are presented through units that deal with a specific topic. These units are further divided into competences, learning processes, learning contents and multidisciplinary strategies. In Flanders, the description of the attainment targets is much more concise, which results in less learning content and concrete objectives being provided. It often occurs that there is no analog in the Flemish attainment targets for a particular topic in the attainment targets of Wallonia. For example, pupils who follow scientific education in Wallonia are expected to know some properties of conic sections. This attainment target belongs to the so-called topic *lieux géométriques* (loci) of the attainment targets in Wallonia, while on the other hand, this topic is not covered at all in the Flemish attainment targets.

As of today, a modernization of the Flemish attainment targets is planned in the third cycle. Although these new attainment targets still consist of merely one sentence, contextual elements are added, along with a formulation of knowledge elements and proficiency levels. Structurally, these modernized attainment targets become closer to the current attainment targets of Wallonia.

B

Eindtermen Vlaanderen

Hieronder staan de Vlaamse eindtermen wiskunde van de derde graad opgelijst. Dit zijn de eindtermen voor de modernisering, die in principe geldig zijn tot 31/08/2024 [5].

B.1 Derde graad TSO/KSO

Algemeen

Nr.	Eindterm
1	De leerlingen kunnen wiskundige informatie analyseren, schematiseren en structureren.
2	De leerlingen kunnen gebruik maken van wiskundige technieken zoals figuren maken en tabellen opstellen.
3	De leerlingen kunnen bij het oplossen van problemen functioneel gebruik maken van ICT.
4	De leerlingen kunnen bij het oplossen van een vraagstuk: <ul style="list-style-type: none">• relevante gegevens scheiden van niet relevante• gegevens met elkaar en met de probleemstelling in verband brengen• gegevens en gevraagde weergeven in een geschikt wiskundig model• het vraagstuk planmatig uit werken
5	De leerlingen kunnen wiskundige rekenregels en conventies correct hanteren en toepassen.
6	De leerlingen kunnen keuzes m.b.t. representatie en gevolgde werkwijze verantwoorden.
7	De leerlingen kunnen voorbeelden geven van het gebruik van wiskunde in andere vakgebieden en in de maatschappij.
8	De leerlingen zijn kritisch tegenover het gevonden resultaat.

- 9 De leerlingen zijn bereid hun leerproces bij te sturen op basis van reflectie over de wijze waarop ze wiskundige problemen oplossen en wiskundige informatie verwerven en verwerken.

Reële functies en algebra

Nr.	Eindterm
10	De leerlingen kunnen bijzonderheden van grafieken, eventueel aangevuld met tabellen, aflezen zoals periodiciteit, symmetrieën, stijgen en dalen, extreme waarden, lineaire en exponentiële groei.
11	De leerlingen kunnen grafieken tekenen van enkele eenvoudige functies (mede met behulp van ICT).
12	De leerlingen kunnen veranderingen beschrijven en vergelijken met behulp van differentiequotienten.
13	De leerlingen kunnen problemen, waarbij een functioneel verband gegeven is, oplossen en die oplossing interpreteren (eventueel met behulp van ICT).

Statistiek

Nr.	Eindterm
14	De leerlingen kunnen aan de hand van voorbeelden het belang uitleggen van de representativiteit van een steekproef voor het formuleren van statistische besluiten over de populatie.
15	De leerlingen kunnen met behulp van ICT gemiddelde en standaardafwijking berekenen van statistische gegevens.
16	De leerlingen kunnen het gemiddelde en de standaardafwijking gebruiken als karakteristieken van een normale verdeling.
17	De leerlingen staan kritisch tegenover het gebruik van statistiek in de media.

B.2 Derde graad ASO

Algemeen

Nr.	Eindterm
1	De leerlingen kunnen wiskundetaal begrijpen en gebruiken.
2	De leerlingen kunnen wiskundige informatie analyseren, schematiseren en structureren.

- 3 De leerlingen kunnen eenvoudig mathematiseerbare problemen ontleden (onderscheid maken tussen gegevens en gevraagde, de relevantie van de gegevens nagaan en verbanden leggen ertussen) en vertalen naar een passende wiskundige context.
- 4 De leerlingen kunnen wiskundige problemen planmatig aanpakken (door eventueel hiërarchisch op te splitsen in deelproblemen).
- 5 De leerlingen kunnen bij het oplossen van wiskundige problemen kritisch reflecteren over het oplossingsproces en het eindresultaat.
- 6 De leerlingen kunnen voorbeelden geven van reële problemen die met behulp van wiskunde kunnen worden opgelost.
- 7 De leerlingen kunnen bij het oplossen van wiskundige problemen functioneel gebruik maken van ICT.
- 8 De leerlingen kunnen voorbeelden geven van de rol van de wiskunde in de kunst.
- 9 De leerlingen kunnen kennis, inzicht en vaardigheden die ze verwerven in wiskunde bij het verkennen, vertolken en verklaren van problemen uit de realiteit gebruiken.
- 10 De leerlingen kunnen informatie inwinnen over het aandeel van wiskunde in een vervolgopleiding van hun voorkeur en in hun voorbereiding erop.
- 11 De leerlingen leggen een zin voor nauwkeurigheid aan de dag bij het hanteren en het toepassen van wiskunde.
- 12 De leerlingen ontwikkelen zelfregulatie met betrekking tot het verwerven en verwerken van wiskundige informatie en het oplossen van problemen.
- 13 De leerlingen zijn gericht op samenwerking om de eigen mogelijkheden te vergroten.

Reële functies

Nr.	Eindterm
-----	----------

- | | |
|----|---|
| 14 | De leerlingen lezen op een grafiek af: <ul style="list-style-type: none">• eventuele symmetrieën• het stijgen, dalen of constant zijn• het teken• de eventuele nulwaarden• de eventuele extrema |
|----|---|

- 15 De leerlingen kunnen bij veeltermfuncties
- de afgeleide gebruiken als maat voor de ogenblikkelijke veranderlijke
 - met behulp van een intuïtief begrip van limiet het verband leggen tussen:
 - het begrip afgeleide
 - het begrip differentiequotiënt
 - de richting van de raaklijn aan de grafiek
- 16 De leerlingen kunnen de afgeleide berekenen van de functies $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ en de bekomen uitdrukking veralgemenen naar functies $f(x) = x^n$ waarbij n een natuurlijk getal is.
- 17 De leerlingen kunnen de som- en de veelvoudregel toepassen om de afgeleide functie te bepalen van een veeltermfunctie.
- 18 De leerlingen kunnen bij veeltermfuncties de afgeleide functie gebruiken voor het bestuderen van het veranderingsgedrag en voor het opzoeken of verifiëren van extreme waarden en het verband leggen tussen de afgeleide functie en bijzonderheden van de grafiek.
- 19 De leerlingen kunnen het begrip afgeleide herkennen in situaties buiten de wiskunde.
- 20 De leerlingen kunnen bij een eenvoudig vraagstuk dat te herleiden is tot het bepalen van extrema van een veeltermfunctie, een veranderlijke kiezen, het functievoorschrift opstellen en de extrema bepalen.
- 21 De leerlingen kunnen de uitdrukking a^b , met $a > 0$ en b rationaal, uitleggen.
- 22 De leerlingen kunnen de grafiek tekenen van de functie $f(x) = a^x$ (zodanig met behulp van ICT), en domein, bereik, bijzondere waarden, stijgen/dalen en asymptotisch gedrag aflezen.
- 23 De leerlingen kunnen voor geschikte domeinen een verband leggen tussen de functies $f(x) = x^2$ en $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^3$ en $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en naar analogie tussen de functies $f(x) = x^n$ en $f(x) = \sqrt[n]{x}$ en tussen de functies $f(x) = a^x$ en $f(x) = {}^a\log(x)$.
- 24 De leerlingen kunnen uit de betrekking $a^b = c$ de derde veranderlijke berekenen als de twee andere gegeven zijn (eventueel met behulp van ICT).
- 25 De leerlingen kunnen lineaire en exponentiële groeiprocessen onderzoeken en bij exponentiële groei concrete problemen oplossen waarbij berekeningen dienen uitgevoerd te worden met betrekking tot beginwaarde, groeifactor en groeipercentage.
- 26 De leerlingen kunnen het verband leggen tussen graden en radialen.
- 27 De leerlingen kunnen de grafiek tekenen van de functie $f(x) = \sin x$ op basis van de goniometrische cirkel.
- 28 De leerlingen kunnen voor de functie $f(x) = \sin x$, domein, bereik, periodiciteit, stijgen/dalen en extrema aflezen van de grafiek.
- 29 De leerlingen kunnen de grafieken opbouwen van de functies $f(x) = a \sin(bx+c)$ en daarop a , b en c interpreteren.

- 30 De leerlingen kunnen vergelijkingen van de vorm $\sin x = k$ grafisch oplossen.
- 31 De leerlingen kunnen bij het oplossen van een probleem, waarbij gebruik gemaakt wordt van bestudeerde functionele verbanden, een functievoorschrift, een vergelijking of een ongelijkheid opstellen.
- 32 De leerlingen kunnen tabellen en grafieken bij bestudeerde functies als hulpmiddel gebruiken om functievoorschriften, vergelijkingen en ongelijkheden te interpreteren.

Statistiek

Nr.	Eindterm
33	De leerlingen kunnen in betekenisvolle situaties, gebruik maken van een normale verdeling als continu model bij data met een klokvormige frequentieverdeling en het gemiddelde en de standaardafwijking van de gegeven data gebruiken als schatting voor het gemiddelde en de standaardafwijking van deze normale verdeling.
34	De leerlingen kunnen het gemiddelde en de standaardafwijking van een normale verdeling grafisch interpreteren.
35	De leerlingen kunnen grafisch het verband leggen tussen een normale verdeling en de standaardnormale verdeling.
36	De leerlingen kunnen bij een normale verdeling de relatieve frequentie interpreteren van een verzameling gegevens met waarden tussen twee gegeven grenzen, met waarden groter dan een gegeven grens of met waarden kleiner dan een gegeven grens als de oppervlakte van een gepast gebied.

B.3 Derde graad ASO: specifiek gedeelte

Algebra

Nr.	Eindterm
1	De leerlingen kunnen delingen van veeltermen uitvoeren en het binomium van Newton gebruiken.
2	De leerlingen kunnen complexe getallen meetkundig voorstellen en er bewerkingen mee uitvoeren.
3	De leerlingen kunnen vierkantsvergelijkingen in één complexe onbekende oplossen.
4	De leerlingen kunnen met behulp van matrices problemen wiskundig modelleren en oplossen.
5	De leerlingen kunnen de basiseigenschappen van een reële vectorruimte (beperkt tot dimensie 2 en 3) herkennen en gebruiken.

Analyse

Nr.	Eindterm
6	De leerlingen kunnen het verloop van een functie onderzoeken, in het bijzonder voor veelterm-functies en voor rationale, irrationale, goniometrische, exponentiële en logaritmische functies, met beperking van de moeilijkheidsgraad.
7	De leerlingen kunnen een definitie formuleren voor begrippen uit de analyse en de samenhang met hun gebruik in toepassingen aangeven.
8	De leerlingen kunnen de eerste en de tweede afgeleide van functies berekenen en ze in concrete situaties gebruiken.
9	De leerlingen kunnen de bepaalde en de onbepaalde integraal van functies berekenen en ze in concrete situaties gebruiken.
10	De leerlingen kunnen met behulp van de beschikbare analysekennis problemen wiskundig modelleren en oplossen.
11	De leerlingen kunnen bij het oplossen van vergelijkingen of ongelijkheden, het omvormen van functievoorschriften, het berekenen van afgeleiden of integralen op een verantwoorde wijze gebruik maken van rekenregels, formules en manuele rekentechnieken.
12	De leerlingen kunnen bij het onderzoeken van functies, het oplossen van vergelijkingen of ongelijkheden, bij berekeningen van afgeleiden en integralen en bij het oplossen van problemen geformuleerd met behulp van functies op een verantwoorde wijze gebruik maken van ICT-middelen.

Meetkunde

Nr.	Eindterm
13	De leerlingen kunnen rechten en vlakken door vergelijkingen voorstellen en hun onderlinge ligging bespreken.
14	De leerlingen kunnen afstanden tussen punten, rechten en vlakken berekenen.
15	De leerlingen kunnen meetkundige problemen met diverse hulpmiddelen voorstellen en oplossen.

Statistiek en kansrekening

Nr.	Eindterm
16	De leerlingen kunnen wetten van de kansrekening toepassen voor onafhankelijke en voor afhankelijke gebeurtenissen.

- 17 De leerlingen kunnen de binomiale verdeling of de normale verdeling gebruiken als model bij een kansexperiment.

Discrete wiskunde

Nr. Eindterm

- 18 De leerlingen kunnen telproblemen of problemen met betrekking tot discrete veranderingsprocessen wiskundig modelleren en oplossen.

Wiskunde en cultuur

Nr. Eindterm

- 19 De leerlingen kunnen inzicht verwerven in de bijdrage van wiskunde tot de ontwikkeling van exacte en humane wetenschappen, techniek, kunst en het kritische denken.

Onderzoekscompetentie

Nr. Eindterm

- 20 De leerlingen kunnen zich oriënteren op een onderzoeksprobleem door gericht informatie te verzamelen, te ordenen en te bewerken.
- 21 De leerlingen kunnen een onderzoeksopdracht met een wiskundige component voorbereiden, uitvoeren en evalueren.
- 22 De leerlingen kunnen de onderzoeksresultaten en conclusies rapporteren en ze confronteren met andere standpunten.

Bibliografie

Partim I

Numerieke methoden voor het oplossen van fractionele diffusievergelijkingen

- [1] G. N. Wells A. Logg en J. Hake. “DOLFIN: a C++/Python Finite Element Library”. In: *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Deel 84. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer, 2012. Hfdstk. 10.
- [2] M. S. Alnaes e.a. “The FEniCS Project Version 1.5”. In: *Archive of Numerical Software* 3 (2015).
- [3] H. Amann en J. Escher. *Analysis II*. Analysis. Springer International Publishing, 2008. ISBN: 9783764374785.
- [4] Michele Caputo. “Linear Models of Dissipation whose Q is almost Frequency Independent—II”. In: *Geophysical Journal International* 13.5 (1967), p. 529–539. ISSN: 0956-540X.
- [5] R. Courant en D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*. v. 1. Interscience Publishers, 1953.
- [6] L. Debnath en D. Bhatta. *Integral Transforms and Their Applications, Third Edition*. Taylor & Francis, 2014. ISBN: 9781482223576.
- [7] L. Debnath en P. Mikusinski. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*. Elsevier Science, 2005. ISBN: 9780122084386.
- [8] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2010. ISBN: 9783642145735.
- [9] Harley Flanders. “Differentiation Under the Integral Sign”. In: *The American Mathematical Monthly* 80.6 (1973), p. 615–627. ISSN: 00029890, 19300972.
- [10] Bangti Jin, Raytcho Lazarov en Zhi Zhou. “Numerical methods for time-fractional evolution equations with nonsmooth data: A concise overview”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 346 (2019), p. 332–358. ISSN: 0045-7825.
- [11] Saeed Kazem. “Exact Solution of Some Linear Fractional Differential Equations by Laplace Transform”. In: *International Journal of Nonlinear Science* 16 (2013), p. 3–11.
- [12] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava en J.J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies v. 13. Elsevier Science, 2006.
- [13] Yumin Lin en Chuanju Xu. “Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation”. In: *Journal of Computational Physics* 225.2 (2007), p. 1533–1552. ISSN: 0021-9991.
- [14] A. Logg en G. N. Wells. “DOLFIN: Automated Finite Element Computing”. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 37 (2010).

- [15] Anders Logg, Kent-Andre Mardal, Garth N. Wells e.a. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer, 2012. ISBN: 978-3-642-23098-1.
- [16] Yuri Luchko. “Initial-boundary-value problems for the one-dimensional time-fractional diffusion equation”. In: *Fractional Calculus and Applied Analysis* 15.1 (2012), p. 141–160.
- [17] Igor Podlubný. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Mathematics in science and engineering. London: Academic Press, 1999.
- [18] Bertram Ross. “A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus”. In: *Fractional Calculus and Its Applications: Proceedings of the International Conference Held at the University of New Haven, June 1974*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1975, p. 1–36. ISBN: 978-3-540-69975-0.
- [19] D.W. Stroock. *Essentials of Integration Theory for Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2011. ISBN: 9781461411345.
- [20] Martin Stynes. “A survey of the L_1 scheme in the discretisation of time-fractional problems”. Preprint. Jan 2021.
- [21] Martin Stynes. “Too much regularity may force too much uniqueness”. In: *Fract. Calc. Appl. Anal.* 19.6 (2016), p. 1554–1562. ISSN: 1311-0454.
- [22] Martin Stynes, Eugene O’Riordan en José Luis Gracia. “Error Analysis of a Finite Difference Method on Graded Meshes for a Time-Fractional Diffusion Equation”. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 55.2 (2017), p. 1057–1079.
- [23] Karel Van Bockstal. “Existence of a unique weak solution to a non-autonomous time-fractional diffusion equation with space-dependent variable order”. In: *Advances in Difference Equations* 2021.1 (jun 2021), p. 314. ISSN: 1687-1847.
- [24] V.S. Vladimirov en A. Jeffrey. *Equations of Mathematical Physics*. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics. M. Dekker, 1971. ISBN: 9780824717131.

Partim II

Eindtermen wiskunde in Vlaanderen en Wallonië: een vergelijkende studie

- [1] CLB. *Onderwijskiezer*. 2022. URL: https://www.onderwijskiezer.be/v2/secundair/sec_3graad.php (bezocht op 13-05-2022).
- [2] Athénée Royal Crommelynck. *Nouvelles grilles d'options*. 2022. URL: <https://acrommelynck.online/wp-content/uploads/2022/05/043P-2021-22-3e-degre-Choix-de-grilles-doptions-pour-2022-2023.pdf> (bezocht op 13-05-2022).
- [3] Athénée Royal d'Arlon. *Grille hebdomadaire*. 2021. URL: https://www.ar-arlon.be/wp-content/uploads/2021/01/Grille_5_6.pdf (bezocht op 13-05-2022).
- [4] H.L. Harter. *The Method of Least Squares and Some Alternatives*. Aerospace Research Laboratories, Wright Patterson Air Force Base, 1972.
- [5] Vlaamse overheid. *Onderwijsdoelen*. 2022. URL: <https://www.onderwijsdoelen.be>.
- [6] Belgisch staatsblad. *Besluit van de Regering van de Franse Gemeenschap*. URL: <http://www.ejustice.just.fgov.be/eli/arrete/2014/01/16/2014029173/justel>.
- [7] M. Valcke en R. Standaert. *Onderwijsbeleid in Vlaanderen*. Acco, 2020. ISBN: 9789463798303.
- [8] Katholiek Onderwijs Vlaanderen. *Wiskunde – Leerplan A, derde graad ASO, studierichtingen met component wiskunde*. 2004. URL: <http://ond.vvkso-ict.com/leerplannen/doc/Wiskunde-2004-019.pdf>.
- [9] Fédération Wallonie-Bruxelles. *Enseignement*. 2022. URL: <http://www.enseignement.be>.



Lieven De Roeck

Studentennummer: 01704595

Academiejaar 2021 - 2022