

Universiteit Gent
Faculteit Wetenschappen
Vakgroep Wiskunde: Analyse, Logica en Discrete Wiskunde

Een verkenning van Mittag-Lefflerfuncties en hun eigenschappen en toepassingen

Fitz Regelbrugge



**UNIVERSITEIT
GENT**

Academiejaar 2024–2025

Promotor: dr. K. Van Bockstal

Bachelorproef ingediend tot het behalen
van de academische graad van bachelor in de Wiskunde

Inhoudsopgave

Inleiding	1
1 De Gammafunctie	3
1.1 Convergentie van $\Gamma(z)$	4
1.2 Analyticiteit van $\Gamma(z)$	4
1.3 Contourintegraal-representatie van $\Gamma(z)$	6
1.4 De betafunctie	8
1.5 Contourintegraal-representatie van $1/\Gamma(z)$	11
2 Mittag-Lefflerfunctie: twee parameters	15
2.1 Gehele functies	15
2.2 Relaties met andere functies	17
2.3 Eigenschappen en recurrente betrekkingen	18
2.4 Fractionele calculus	19
2.4.1 Integratie van de Mittag-Lefflerfunctie	20
2.4.2 Afgeleide van de Mittag-Lefflerfunctie	21
2.5 Integraalrepresentaties van $E_{a,b}(z)$	22
2.6 Asymptotische expansies	24
3 De multinomiale Mittag-Lefflerfunctie	31
Referentielijst	41

Inleiding

De Mittag-Lefflerfunctie, gedefinieerd als

$$E_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak + b)}, \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(a) > 0, b \in \mathbb{C},$$

vormt een natuurlijke uitbreiding van de exponentiële functie e^z . De Mittag-Lefflerfunctie omvat heel wat belangrijke functies als bijzondere gevallen, zoals de exponentiële functie, de hyperbolische sinus en cosinus en de errorfunctie. De Mittag-Lefflerfunctie speelt een fundamentele rol in het oplossen van fractionele differentiaalvergelijkingen, net zoals de exponentiële functie bij de klassieke differentiaalvergelijkingen. Een belangrijk voorbeeld zijn de fractionele diffusievergelijkingen, waar de oplossingen expliciet kunnen beschreven worden met de Mittag-Lefflerfunctie.

In deze bachelorproef zullen we de Mittag-Lefflerfunctie analytisch bestuderen en cruciale resultaten voor het regulariteitsonderzoek van oplossingen van fractionele diffusievergelijkingen afleiden. Er wordt hoofdzakelijk gewerkt rond het boek [1].

In Hoofdstuk 1 wordt de gammafunctie $\Gamma(z)$ bestudeerd, aangezien deze functie in de definitie van de Mittag-Lefflerfunctie voorkomt. Dit hoofdstuk heeft als doel om contourintegraal-representaties te verkrijgen voor de gammafunctie, die we later zullen nodig hebben voor de Mittag-Lefflerfunctie.

In Hoofdstuk 2 tonen we eerst aan dat Mittag-Lefflerfunctie een gehele functie is van eindige orde als $\operatorname{Re}(a) > 0$. We bekijken ook enkele bijzondere gevallen van de Mittag-Lefflerfunctie. Ook bespreken we het nut van de Mittag-Lefflerfunctie in de fractionele calculus. Het hoofdstuk wordt dan afgesloten met integraal-representaties en asymptotische uiteenzettingen van de Mittag-Lefflerfunctie voor verschillende waarden van a alsook de uniforme begrensdeheid bij $a \in (0, 2)$ in een bepaald gebied.

In Hoofdstuk 3 breiden we de Mittag-Lefflerfunctie uit naar de multinomiale Mittag-Lefflerfunctie, die cruciaal is in het regulariteitsonderzoek van de oplossingen van fractionele diffusievergelijkingen van meerdere termen. In dit hoofdstuk worden ook enkele belangrijke resultaten uit Hoofdstuk 2 veralgemeend.

Graag wil ik dr. K. Van Bockstal bedanken voor het begeleiden van deze bachelorproef, aanreiken van literatuur, en geven van feedback. Daarnaast bedankt aan dhr. F. Maes voor het nalezen en geven van waardevolle suggesties. Ook dank aan Jens Bossaert voor het ter beschikking stellen van deze L^AT_EX-template.

1

De Gammafunctie

Definitie 1.1 (Gammafunctie). De gammafunctie wordt gedefinieerd als de integraal

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

De gammafunctie is een extensie van de faculteit

$$n! = \prod_{k=1}^n k, \quad n \in \mathbb{N},$$

naar het complexe vlak, wat ook duidelijk blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 1.2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ voor $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Bewijs. Merk eerst op dat

$$|t^z| = t^{\operatorname{Re}(z)}.$$

Met behulp van partiële integratie krijgen we:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-e^{-t} t^z]_{t=\varepsilon}^{t=M} + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

aangezien

$$\lim_{M \rightarrow \infty} |e^{-M} M^z| = \lim_{M \rightarrow \infty} |e^{-M+z \ln(M)}| = \lim_{M \rightarrow \infty} e^{-M+\operatorname{Re}(z) \ln(M)} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^{\operatorname{Re}(z)}}{e^M} = 0,$$

en

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |e^{-\varepsilon} \varepsilon^z| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-\varepsilon+\operatorname{Re}(z) \ln(\varepsilon)} = 0,$$

als $\operatorname{Re}(z) > 0$. ■

Door de vorige stelling achtereenvolgens toe te passen, vinden we voor $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = \dots = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot \Gamma(1)$$

Omdat $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ krijgen we dat

$$\Gamma(n+1) = n!$$

1.1 Convergentie van $\Gamma(z)$

We tonen nu aan dat de gammafunctie absoluut convergeert in het complexe halfvlak $x = \operatorname{Re}(z) > 0$.

We splitsen de integraal op in twee delen: een stuk over $(0, 1)$ en een stuk over $(1, \infty)$ zodat voor $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt \right| &\leq \int_0^1 |e^{-t}| |t^{z-1}| dt \\ &\leq \int_0^1 t^{x-1} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{t^x}{x} \right]_{t=\varepsilon}^{t=1} = \frac{1}{x} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^x}{x}, \end{aligned}$$

De laatste limiet gaat naar 0 wanneer $x > 0$ en divergeert voor $x < 0$. De integraal convergeert vervolgens enkel wanneer $x > 0$. Het tweede deel kunnen we vervolgens opsplitsen voor willekeurige $N \in \mathbb{N}, N > 1$ als volgt

$$\left| \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \left(\int_1^N + \int_N^\infty \right) t^{x-1} e^{-t} dt.$$

De convergentie van de eerste integraal volgt direct uit de continuïteit van het integrandum over het begrensde interval $[1, N]$. Nu hebben we dat $\forall x > 0 : \exists N$ zodat $\forall t \geq N : t^{x-1} < e^{t/2}$ aangezien $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{x-1}}{e^{t/2}} = 0$ zodat de tweede integraal ook convergeert,

$$\left| \int_N^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \right| \leq \int_N^\infty e^{t/2} e^{-t} dt = -2 \lim_{M \rightarrow \infty} \left[e^{-t/2} \right]_{t=N}^{t=M} = 2e^{-N/2} < \infty. \quad (1.1)$$

De gammafunctie convergeert bijgevolg absoluut wanneer $\operatorname{Re}(z) > 0$.

1.2 Analyticiteit van $\Gamma(z)$

Om belangrijke stellingen te kunnen gebruiken zoals de residustelling en de stellingen van Cauchy, is het belangrijk te weten waar $\Gamma(z)$ holomorf is en waar eventuele singulariteiten zich bevinden. We vermelden eerst de volgende stellingen (zie cursus Complexe Analyse [2]).

Stelling 1.3 (Residustelling). Zij Γ een eenvoudige kromme en zij f holomorf in $[\Gamma] \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ met $z_1, \dots, z_N \in]\Gamma[$. Dan is

$$\int_{\Gamma_+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

Stelling 1.4 (Integraalformule van Cauchy). Als Γ een eenvoudige kromme is en f holomorf is in $[\Gamma]$, dan is voor elke $z_0 \in]\Gamma[$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Stelling 1.5 (Stelling van Cauchy). Als Γ een eenvoudige kromme is en f holomorfe is in $[\Gamma]$, dan is

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Definieer de afbeelding f voor complexe veranderlijke z en reële t :

$$f(z, t) = e^{-t} t^{z-1} = e^{(z-1)\ln(t)-t}.$$

Deze afbeelding is continu voor willekeurige z en $t > 0$, en voor $\operatorname{Re}(z) > 1$ wanneer $t = 0$. Inderdaad, stel $t = 0$ dan moet $\operatorname{Re}(z - 1) > 0$ of dus $\operatorname{Re}(z) > 1$, alvorens t^{z-1} betekenis heeft, anders is f ongedefinieerd.

Neem nu de open deelverzameling $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ en definieer voor $n > 0$:

$$\Gamma_n(z) = \int_{1/n}^n e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \Omega.$$

Het integrandum van $\Gamma_n(z)$ is duidelijk holomorfe als functie van z in Ω en haar partiële afgeleide naar z : $e^{-t}(z-1)e^{(z-2)\ln(t)}$ is continu in de punten $(z, t) \in \Omega \times [1/n, n]$. We mogen dus afleiden onder het integraalteken en zodoende is $z \mapsto \Gamma_n(z)$ een holomorfe afbeelding in Ω .

We tonen nu aan dat $\Gamma_n(z)$ gelijkmatig convergeert naar de gammafunctie $\Gamma(z)$ over elke strook $a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b$ (met $0 < a < b$). Neem daartoe dergelijke z , dan geldt

$$\begin{aligned} |\Gamma_n(z) - \Gamma(z)| &\leq \int_0^{1/n} e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt \\ &\leq \int_0^{1/n} e^{-t} t^{a-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{b-1} dt. \end{aligned}$$

Er geldt dat

$$\int_0^{1/n} e^{-t} t^{a-1} dt \leq \int_0^{1/n} t^{a-1} dt = \frac{1}{an^a},$$

en wegens (1.1)

$$\int_n^\infty e^{-t} t^{b-1} dt \leq 2e^{-n/2}.$$

Beide integralen convergeren naar nul voor $n \rightarrow \infty$. Er volgt dat $|\Gamma_n(z) - \Gamma(z)| \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$ en de convergentie van $\Gamma_n(z)$ naar $\Gamma(z)$ is bijgevolg gelijkmatig over de strook $a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b$, $0 < a < b$.

Wegens overdracht van analyticiteit is $\Gamma(z)$ holomorfe voor $\operatorname{Re}(z) > 0$.

We kunnen echter de functie $\Gamma(z)$ nog uitbreiden zodat die holomorfe wordt in heel $\mathbb{C}$, met uitsluiting van de punten $z = 0, -1, -2, \dots$. Om dit in te zien schrijven we de Gammafunctie als volgt:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (1.2)$$

In de eerste integraal kan de exponentiële functie ontbonden worden in een machtreeks.

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} t^{z-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+z)},$$

waarbij het termsgewijs integreren toegelaten is. Inderdaad, de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} t^{z-1}$ convergeert uniform op $t \in [0, 1]$ aangezien

$$\left| \frac{(-1)^k t^{k+z-1}}{k!} \right| = \frac{1}{k!} t^{k+\operatorname{Re}(z)-1} \leq \frac{1}{k!}$$

voor $t \in [0, 1]$ en $\operatorname{Re}(z) > 0$. De reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ convergeert zodat met de M-test van Weierstrass, termsgewijs integreren is toegelaten. We tonen nu aan dat de tweede integraal in (1.2) een functie $\varphi(z)$ definieert die holomorf is op heel $\mathbb{C}$. We hebben voor die integraal

$$\varphi(z) := \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_1^{\infty} e^{(z-1)\ln(t)-t} dt.$$

Hier is steeds $t \geq 1$ waardoor het integrandum dat eerder werd gedefinieerd als $f(z, t)$, continu is voor elke $z \in \mathbb{C}$. Neem een willekeurig begrens en gesloten gebied $D \subseteq \mathbb{C}$ en stel $M = \max_{z \in D} \operatorname{Re}(z)$, dan is

$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} \leq e^{-t} t^{M-1}.$$

Uit §1.1 weten we dat de functie $e^{-t} t^{M-1}$ integreerbaar is op $t \in [1, \infty)$. Door deze begrenzing convergeert $\varphi(z)$ gelijkmatig in D en is deze functie holomorf in D , wat direct ook voor alle $z \in \mathbb{C}$ geldt aangezien D willekeurig was. De tweede integraal $\varphi(z)$ is dus een gehele functie. We hebben nu:

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+z)} + \varphi(z).$$

De enige singulariteiten zijn dus de enkelvoudige polen $z = -k$ voor $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ in de bovenstaande machtreeks. We kunnen de gammafunctie holomorf uitbreiden met behulp van Stelling 1.2. De functie $g(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ is holomorf op $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > -1\} \setminus \{0\}$. Door dit vervolgens te herhalen voegen we de punten met $\operatorname{Re}(z) < 0$ toe en sluiten we de punten $\{0, -1, -2, \dots\}$ uit. Door eenduidigheid is deze holomorfe uitbreiding van $\Gamma(z)$ bovendien uniek.

We hebben dus aangetoond dat de gammafunctie $\Gamma(z)$ een meromorfe functie is op $\mathbb{C}$, met enkelvoudige polen in $\{0, -1, -2, \dots\}$.

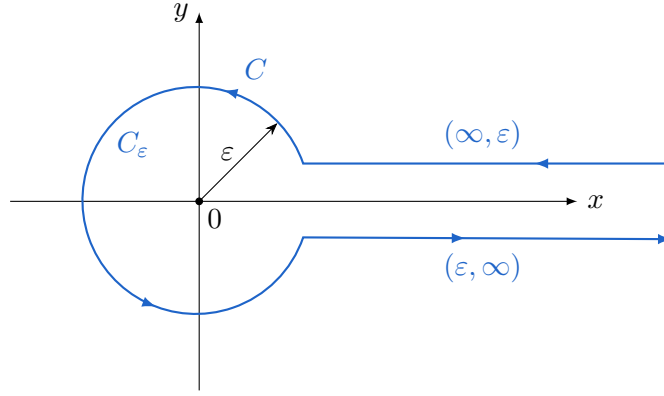
1.3 Contourintegraal-representatie van $\Gamma(z)$

In deze sectie geven we een nuttige contourintegraal-voorstelling van de gammafunctie die voor alle $z \in \mathbb{C}$ geldt.

Stelling 1.6. Voor alle $z \in \mathbb{C}$ geldt

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \int_C e^{-t} t^{z-1} dt,$$

waarbij de contour C uit Figuur 1.1 bestaat uit volgende delen voor $\varepsilon > 0$ (volgens doorloopszin):

Figuur 1.1: De Hankel contour C .

- Een halfrechte $t \in (\infty, \varepsilon)$ bovenaan de positieve reële as,
- Een cirkelboog C_ε met straal $\varepsilon > 0$ om de oorsprong, en met een opening aan de positieve reële as,
- Een halfrechte $t \in (\varepsilon, \infty)$ onderaan de positieve reële as.

Bewijs. Tot nu hebben we in de functie $f(z, t) = e^{(z-1)\ln(t)-t}$ de veranderlijke $t \geq 0$ beschouwd. Als t echter complex is, ontstaat er een vertakkingslijn voor f bij $t = 0$. Dit komt omdat $\ln(t)$ discontinu wordt als we een gesloten contour volledig laten lopen rond $t = 0$. Na elke 2π -periodiek van het argument maakt de waarde van $\ln(t)$ een sprong bij $t = 0$. Dit betekent dat de contour die we willen kiezen niet volledig gesloten zal mogen lopen rond $t = 0$. We maken in het complexe vlak van t een branch cut op $(0, \infty)$ zodat $\ln(t)$ continu wordt. Dan volgt dat $f(z, t)$ nog steeds holomorf is over de contour C .

Als we boven de branch cut $\ln(t)$ hebben, dan wordt dit eronder $\ln(t) + 2\pi i$. Daar is dan

$$t^{z-1} = e^{(z-1)(\ln(t)+2\pi i)} = t^{z-1} e^{2(z-1)\pi i}.$$

Dan volgt

$$\int_C e^{-t} t^{z-1} dt = \int_\infty^\varepsilon e^{-t} t^{z-1} dt + \int_{C_\varepsilon} e^{-t} t^{z-1} dt + e^{2(z-1)\pi i} \int_\varepsilon^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

Op de cirkelboog C_ε is $|t| = \varepsilon$ en we kunnen de integraal over C_ε afschatten als volgt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_\varepsilon} e^{-t} t^{z-1} dt \right| &\leq \int_{C_\varepsilon} \left| e^{-t} t^{x-1} e^{iy \ln(t)} \right| dt \leq \int_{C_\varepsilon} |t^{x-1}| \cdot |e^{-y \arg(t)-t}| dt \\ &\leq M \varepsilon^{x-1} \int_{C_\varepsilon} dt \leq M \varepsilon^{x-1} \cdot 2\pi \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

waarbij we gebruiken dat $z = x + iy$, $\text{Im}(\ln(t)) = \arg(t)$, $|e^{iy \ln(t)}| = e^{-y \arg(t)}$ en $M = \max_{t \in C_\varepsilon} |e^{-y \arg(t)-t}|$. Hier werd dus verondersteld dat $x = \text{Re}(z) > 0$ (we zullen op het einde van het bewijs dit uitbreiden naar heel $\mathbb{C}$). Laten we nu ε naar nul naderen dan wordt de integraal rond C_ε nul en volgt:

$$\begin{aligned} \int_C e^{-t} t^{z-1} dt &= \int_\infty^0 e^{-t} t^{z-1} dt + e^{2(z-1)\pi i} \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= -\Gamma(z) + e^{2\pi i z} e^{-2\pi i} \Gamma(z). \end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \int_C e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \operatorname{Re}(z) > 0). \quad (1.3)$$

De gelijkheid (1.3) is geldig voor $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ met $\operatorname{Re}(z) > 0$ en geeft dan

$$(e^{2\pi iz} - 1)\Gamma(z) = \int_C e^{-t} t^{z-1} dt =: J(z).$$

Merk op dat $e^{2\pi iz} - 1$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ gedefinieerd is en $e^{2\pi iz} = 1$ voor alle $z \in \mathbb{Z}$. Uit §1.2 weten we dat $\Gamma(z)$ meromorf is in $\mathbb{C}$ met enkelvoudige polen in $\{0, -1, -2, \dots\}$. Aldus is $J(z) = 0$ met $z \in \{1, 2, \dots\}$ i.e.

$$\int_C e^{-t} t^{z-1} dt = 0.$$

Voor $z = 1, 2, \dots$ is het rechterlid van (1.3) dus gelijk aan $\frac{0}{0}$. Aangezien de limiet

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \int_C e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z_0 \in \{1, 2, \dots\}$$

bestaat in $\mathbb{C}$, zijn de singulariteiten $z = 1, 2, \dots$ ophefbaar. Zo zijn in de integraalvoorstelling dus de enige polen nog $z = 0, -1, -2, \dots$. Het rechterlid van (1.3) is dus een meromorfe functie met polen $z = 0, -1, -2, \dots$ net zoals de gammafunctie $\Gamma(z)$. Wegens eenduidigheid geldt (1.3) bijgevolg voor alle $z \in \mathbb{C}$. ■

1.4 De betafunctie

Aan de hand van de betafunctie zullen we een belangrijke identiteit (Stelling 1.9) van de gammafunctie afleiden.

Definitie 1.7 (Betafunctie). De betafunctie wordt gedefinieerd door de integraal

$$B(z, w) = \int_0^1 u^{z-1} (1-u)^{w-1} du \quad (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Re}(w) > 0). \quad (1.4)$$

Er geldt ook een handige identiteit die de betafunctie uitdrukt in factoren van de gammafunctie.

Stelling 1.8. Voor $z, w \in \mathbb{C}$ met $\operatorname{Re}(z) > 0$ en $\operatorname{Re}(w) > 0$ geldt

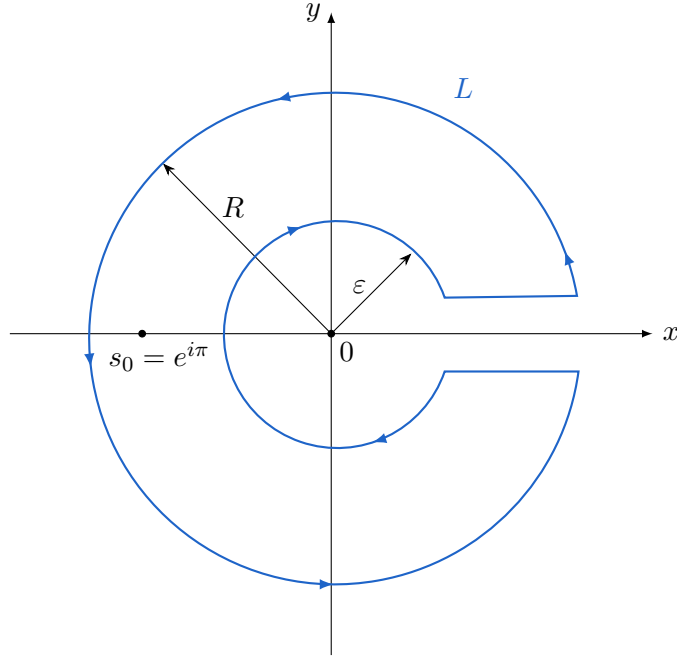
$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Bewijs. Zie cursus Analyse II [3]. ■

Aan de hand van dit verband tussen de beta- en gammafunctie kunnen we volgende stelling bewijzen, beter bekend als de Eulerse reflectieformule.

Stelling 1.9 (Eulerse reflectieformule). Voor alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ geldt

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Figuur 1.2: De contour L .

Bewijs. Veronderstel eerst $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$. Dan krijgen we aan de hand van Stelling 1.8 en $\Gamma(1) = 1$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z, 1-z) = \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^{-z} du = \int_0^1 \left(\frac{u}{1-u}\right)^{z-1} \frac{du}{1-u}.$$

Met de substitutie $x = \frac{u}{1-u}$ bekomen we dan

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x} dx. \quad (1.5)$$

Beschouw nu de functie g_z in de complexe veranderlijke s :

$$g_z(s) = \frac{s^{z-1}}{1+s},$$

en de integraal

$$\int_L g_z(s) ds, \quad (1.6)$$

langsheen de contour L (zie Figuur 1.2). We maken analoog als voorheen een branch cut in het complexe vlak van s langs de positieve reële as. De contour L bestaat uit een cirkelboog C_R met straal $R > 1$ en C_ε met straal $\varepsilon < 1$, en aan de boven- en onderkant van de positieve reële as telkens een rechte (L_1 en L_2).

We kunnen nu de residustelling toepassen op (1.6). De functie $g_z(s)$ heeft een pool van graad $N = 1$ in $s_0 = e^{\pi i} = -1$, met bijhorend residu

$$\operatorname{res}_{s=s_0} g_z(s) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{s \rightarrow s_0} ((s-s_0)^N g_z(s))^{(N-1)} = (e^{i\pi})^{z-1} = -e^{i\pi z}.$$

De functie $g_z(s)$ is holomorf op $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Uit de residustelling volgt

$$\int_L g_z(s) ds = 2\pi i \operatorname{res}_{s=s_0} g_z(s) = -2\pi i e^{i\pi z}. \quad (1.7)$$

We tonen nu aan dat de integraal van g_z over C_ε convergeert naar nul als $\varepsilon \rightarrow 0$ en naar nul over C_R als $R \rightarrow \infty$. Door de integraal op de volledige cirkel C_V , rond de oorsprong met straal R , te beschouwen krijgen we de afchatting

$$\left| \int_{C_R} g_z(s) ds \right| \leq \int_{C_R} |g_z(s)| |ds| \leq \int_{C_V} |g_z(s)| |ds|.$$

In de integraal over C_V voeren we de parametrisatie $s = Re^{i\theta}$ voor $\theta \in [0, 2\pi]$ in en krijgen:

$$\left| \int_{C_R} g_z(s) ds \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{(Re^{i\theta})^{z-1}}{1 + Re^{i\theta}} \right| |Re^{i\theta}| d\theta \leq R^x \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\theta y}}{|1 + Re^{i\theta}|} d\theta.$$

Aangezien $|1 + Re^{i\theta}| \geq |Re^{i\theta}| - 1 = R - 1$ (want $R > 1$) volgt er:

$$\left| \int_{C_R} g_z(s) ds \right| \leq \frac{R^x}{R-1} \int_0^{2\pi} e^{-\theta y} d\theta.$$

Merk op dat

$$M := \int_0^{2\pi} e^{-\theta y} d\theta < \infty$$

dus volgt wegens $0 < x < 1$

$$\left| \int_{C_R} g_z(s) ds \right| \leq \frac{MR^x}{R-1} = M \frac{R^{x-1}}{1-1/R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Volledig analoog krijgen we over C_ε :

$$\left| \int_{C_\varepsilon} g_z(s) ds \right| \leq \varepsilon^x \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\theta y}}{|1 + \varepsilon e^{i\theta}|} d\theta \leq M \frac{\varepsilon^x}{1-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

omdat $|1 + \varepsilon e^{i\theta}| > |\varepsilon e^{i\theta}| - 1 = 1 - \varepsilon$ (want $\varepsilon < 1$). In totaal wordt

$$\int_L g_z(s) ds = \left(\int_{C_\varepsilon} + \int_{C_R} + \int_{L_1} + \int_{L_2} \right) g_z(s) ds,$$

voor $\varepsilon \rightarrow 0$ en $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{L_1} + \int_{L_2} \right) g_z(s) ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{x^{z-1}}{1+x} dx + e^{2\pi i z} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^0 \frac{x^{z-1}}{1+x} dx = \Gamma(z) \Gamma(1-z) \cdot (1 - e^{2\pi i z}), \end{aligned}$$

waarbij we (1.5) gebruikten.

En uit (1.7) volgt dus:

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{2\pi i e^{i\pi z}}{e^{2\pi i z} - 1} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (0 < \operatorname{Re}(z) < 1). \quad (1.8)$$

Stel nu $m < \operatorname{Re}(z) < m + 1$ voor $m \in \mathbb{Z}$. Dan is $z = a + m$ waarbij $0 < \operatorname{Re}(a) < 1$. Merk eerst op dat wegens Stelling 1.2 geldt:

$$\begin{aligned}\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) &= (z-1)\Gamma(z-1) \cdot \frac{\Gamma(1-(z-1))}{1-z} \\ &= (-1)\Gamma(z-1) \cdot \Gamma(1-(z-1)) \\ &= \dots \\ &= (-1)^m \Gamma(a)\Gamma(1-a) \\ &= \frac{(-1)^m \pi}{\sin(\pi a)} = \frac{\pi}{\sin(\pi(a+m))} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},\end{aligned}$$

waar we (1.8) toegepast hebben aangezien $0 < \operatorname{Re}(a) < 1$, en $\sin(\pi(a+m)) = \sin(\pi a) \cos(\pi m) + \cos(\pi a) \sin(\pi m) = (-1)^m \sin(\pi a)$.

De functie $\Gamma(z)$ is meromorf met polen $\{0, -1, -2, \dots\}$ en de meromorfe functie $\Gamma(1-z)$ heeft polen $\{1, 2, \dots\}$. Aangezien $\Gamma(z) \neq 0$ in de polen van $\Gamma(1-z)$ en $\Gamma(1-z) \neq 0$ in de polen van $\Gamma(z)$, is dan het product $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ een meromorfe functie met polen $z \in \mathbb{Z}$. De functie $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ is meromorf met polen $z \in \mathbb{Z}$. De functie $g(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ is holomorf over $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ en is nul over $\{z \in \mathbb{C} \mid \exists m \in \mathbb{Z} : m < \operatorname{Re}(z) < m + 1\}$. Wegens eenduidigheid volgt dat g nul is over heel $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, en bijgevolg geldt de stelling ook over $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. ■

1.5 Contourintegraal-representatie van $1/\Gamma(z)$

Deze volgende integraal-representaties van $1/\Gamma(z)$ zijn heel nuttig om uiteindelijk een integraal-representatie van de Mittag-Leffler functie te kunnen verkrijgen.

Stelling 1.10. Voor alle $z \in \mathbb{C}$ is

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i a} \int_{\gamma(\epsilon, \mu)} \exp(\zeta^{1/a}) \zeta^{(1-z-a)/a} d\zeta \quad \left(a < 2, \frac{\pi a}{2} < \mu < \min(\pi, \pi a)\right),$$

en voor $\operatorname{Re}(z) > 0$ geldt

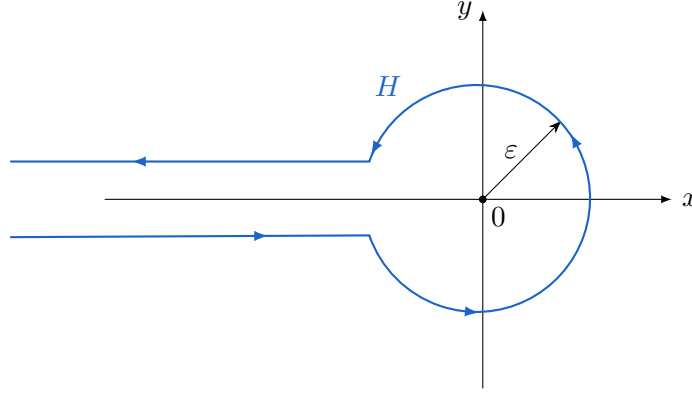
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma(\epsilon, \pi)} \exp(\zeta^{1/2}) \zeta^{-(z+1)/2} d\zeta,$$

waarbij de contour $\gamma(\epsilon, \varphi)$ met $(\epsilon > 0, \pi/2 < \varphi \leq \pi)$ bestaat uit de volgende delen in doorloopszin, gegeven in Figuur 1.4, voor $u \in \gamma(\epsilon, \varphi)$:

- $\arg(u) = -\varphi$ met $|u| \geq \epsilon$,
- $-\varphi \leq \arg(u) \leq \varphi$ met $|u| = \epsilon$,
- $\arg(u) = \varphi$ met $|u| \geq \epsilon$.

Bewijs. We beginnen met z te vervangen door $1-z$ in Stelling 1.6:

$$\int_C e^{-t} t^z dt = (e^{-2z\pi i} - 1)\Gamma(1-z). \quad (1.9)$$



Figuur 1.3: De contour H .

Met de substitutie $t = ue^{\pi i} = -u$, transformeren we het complexe vlak van t zodat de branch cut langs de positieve reële as nu overeenstemt met de branch cut langs de negatieve reële as in het complexe vlak van u . Hierdoor roteert de contour C tot de contour H (zie Figuur 1.3) en we krijgen

$$\int_C e^{-t} t^{z-1} dt = - \int_H e^u (e^{\pi i} u)^{-z} du = -e^{-z\pi i} \int_H e^u u^{-z} du.$$

Wegens (1.9) en Stelling 1.9 wordt dit

$$\int_H e^u u^{-z} du = (e^{z\pi i} - e^{-z\pi i}) \Gamma(1-z) = 2i \sin(\pi z) \Gamma(1-z) = \frac{2\pi i}{\Gamma(z)}.$$

Hieruit vinden we de integraalrepresentatie:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_H e^u u^{-z} du. \quad (1.10)$$

We wensen nu een vervorming van de contour in te voeren. Neem daartoe de contour $\gamma(\varepsilon, \varphi)$ uit Figuur 1.4 met ($\varepsilon > 0$, $\pi/2 < \varphi \leq \pi$) zoals gedefinieerd in de opgave.

Deze contour verdeelt het complexe vlak van u in twee gebieden: links van de contour $G^-(\varepsilon, \varphi)$ en rechts ervan $G^+(\varepsilon, \varphi)$. Nu tonen we aan dat we in (1.10) kunnen integreren langs $\gamma(\varepsilon, \varphi)$ en dat

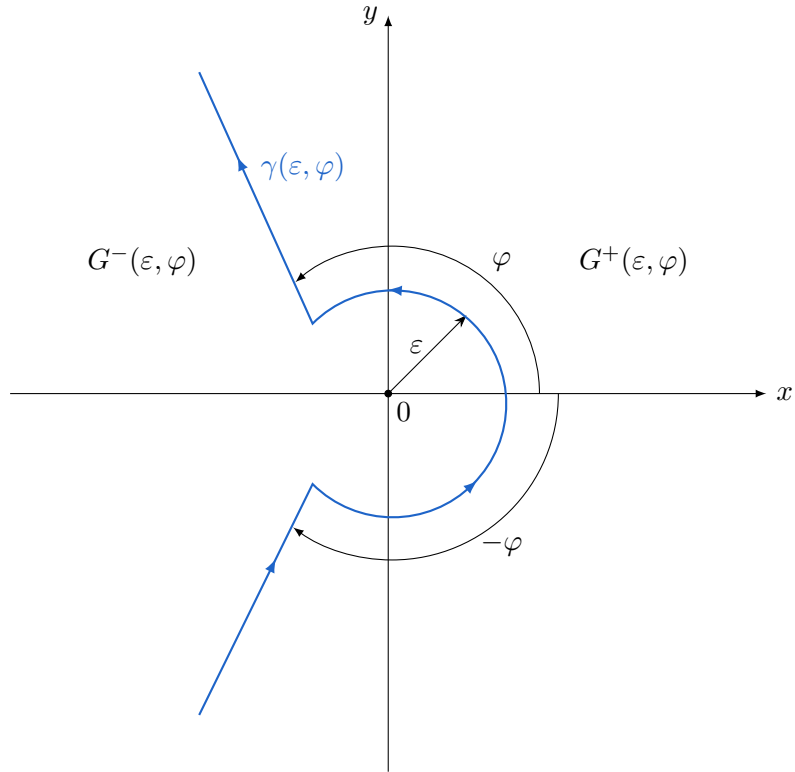
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \varphi)} e^u u^{-z} du \quad (\varepsilon > 0, \pi/2 < \varphi \leq \pi). \quad (1.11)$$

Beschouw nu de contouren in Figuur 1.5. We proberen een verband tussen de contour H en γ te vinden. Over de gesloten contour $A^+ B^+ C^+ D^+$ is het integrandum holomorf en passen we de stelling van Cauchy toe:

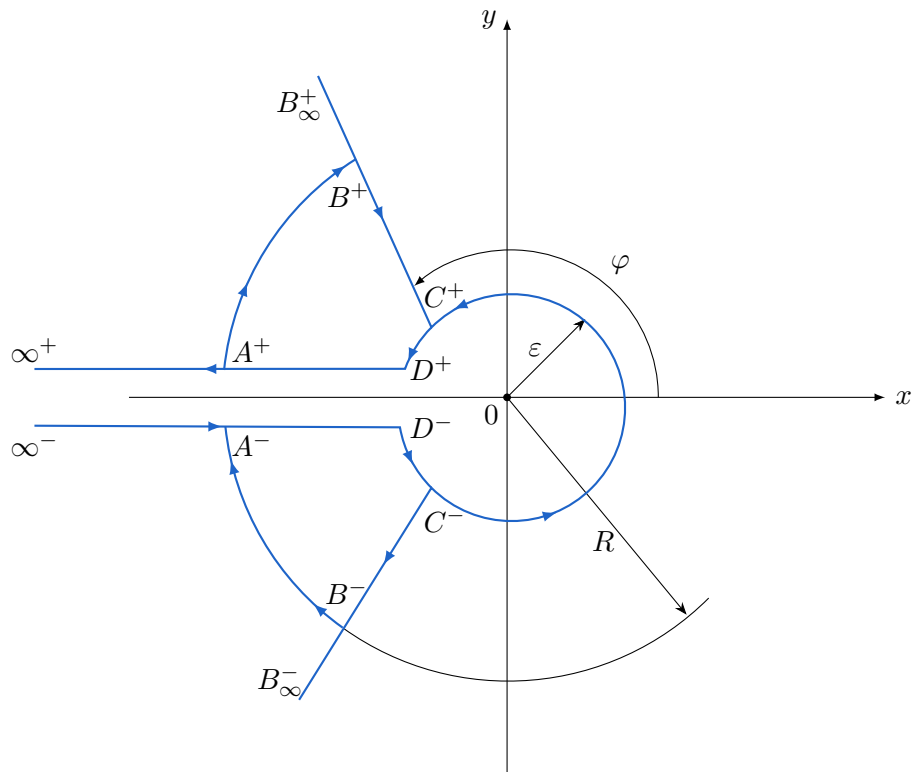
$$\int_{A^+ B^+ C^+ D^+} e^u u^{-z} du = \left(\int_{A^+}^{B^+} + \int_{B^+}^{C^+} + \int_{C^+}^{D^+} + \int_{D^+}^{A^+} \right) e^u u^{-z} du = 0.$$

Over de cirkelboog $A^+ B^+$ heeft u vaste modulus R en geldt er:

$$\begin{aligned} |e^u u^{-z}| &= \left| e^{R \cos(\arg(u))} \right| \left| e^{iR \sin(\arg(u))} \right| \left| e^{-x \ln(u)} \right| \left| e^{-iy \ln(u)} \right| \\ &= e^{R \cos(\arg(u))} \cdot 1 \cdot e^{-x \ln(R)} \cdot e^{y \arg(u)} \\ &= e^{R \cos(\arg(u)) - x \ln(R) + y \arg(u)} \\ &\leq e^{-R \cos(\pi - \varphi) - x \ln(R) + 2\pi y} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$



Figuur 1.4: De contour $\gamma(\varepsilon, \varphi)$.



Figuur 1.5: De transformatie van H naar $\gamma(\varepsilon, \varphi)$.

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van $|e^{\ln(u)}| = |e^{\ln(R)+i\arg(u)}| = e^{\ln(R)}, |e^{iy\ln(t)}| = e^{-y\arg(t)}$ en het feit dat door de keuze van φ : $\cos(\pi - \varphi) > 0$ zodat bij $R \rightarrow \infty$ de convergentie geldt voor elke z . Merk op dat als $\varphi = \pi/2$ dus $\cos(\pi - \varphi) = 0$, de integraal zal divergeren voor $x = \operatorname{Re}(z) < 0$. Bijgevolg hebben we dat de integraal over de cirkelboog A^+B^+ naar nul convergeert wegens (1.12) als $R \rightarrow \infty$ en we krijgen:

$$\left(\int_{B_\infty^+}^{C^+} + \int_{C^+}^{D^+} + \int_{D^+}^{\infty^+} \right) e^u u^{-z} du = 0$$

zodat

$$\left(\int_{C^+}^{D^+} + \int_{D^+}^{\infty^+} \right) e^u u^{-z} du = \int_{C^+}^{B_\infty^+} e^u u^{-z} du.$$

Analoog krijgen we voor de gesloten contour $A^-D^-C^-B^-$ dat

$$\left(\int_{\infty^-}^{D^-} + \int_{D^-}^{C^-} \right) e^u u^{-z} du = \int_{B_\infty^-}^{C^-} e^u u^{-z} du.$$

Het combineren van beide resultaten en het vervangen van de contour H door delen van de nieuwe contour geeft dat

$$\int_H e^u u^{-z} du = \left(\int_{B_\infty^-}^{C^-} + \int_{C^-}^{C^+} + \int_{C^+}^{B_\infty^+} \right) e^u u^{-z} du = \int_{\gamma(\varepsilon, \varphi)} e^u u^{-z} du.$$

We kunnen hieruit twee integraalrepresentaties afleiden waarbij de parameter $a \in (0, 2)$ zeer handig zal zijn voor de Mittag-Lefflerfunctie.

De eerste representatie is geldig voor willekeurige $z \in \mathbb{C}$. Met de substitutie $u = \zeta^{1/a}$ in (1.11) voor een positieve reële parameter $a < 2$, krijgen we nu $\arg(\zeta) = \arg(u^a) = a \arg(u)$. De voorwaarde op a in (1.11) wordt dus: $\frac{\pi a}{2} < \arg(\zeta) < \pi a$. Als echter $1 \leq a < 2$, willen we enkel contouren $\gamma(\varepsilon, \varphi)$ waarbij $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{a}$ zodat steeds $\arg(\zeta) < \pi$. Bijgevolg wordt de voorwaarde dan $\frac{\pi a}{2} < \mu < \min(\pi, \pi a)$ voor $\mu = \arg(\zeta)$. Dan bekomen we de uiteindelijke representatie

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i a} \int_{\gamma(\varepsilon, \mu)} \exp(\zeta^{1/a}) \zeta^{(1-z-a)/a} d\zeta \quad \left(a < 2, \frac{\pi a}{2} < \mu < \min(\pi, \pi a) \right).$$

De tweede representatie is voor het specifieke geval waar $\varphi = \pi/2$. We hadden al opgemerkt in het bewijs van (1.11) dat er enkel convergentie is van de integraal wanneer $\operatorname{Re}(z) > 0$. De formule (1.11) werkt dus nog steeds hier als $\operatorname{Re}(z) > 0$. Met de substitutie $u = \sqrt{\zeta}$ wordt $\arg(\zeta) = 2 \arg(u) = \pi$ en krijgen we de volgende integraalrepresentatie:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \pi)} \exp(\zeta^{1/2}) \zeta^{-(z+1)/2} d\zeta \quad (\varepsilon > 0, \operatorname{Re}(z) > 0).$$

■

2

Mittag-Lefflerfunctie: twee parameters

Nu kunnen we beginnen aan de effectieve bestudering van de Mittag-Lefflerfunctie. Een van de belangrijkste functies in de complexe analyse is de exponentiële functie

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Aangezien de gammafunctie $\Gamma(z)$ de veralgemening is van de faculteitsfunctie naar het complexe vlak, kunnen we hiermee de exponentiële functie op een natuurlijk wijze uitbreiden. Zo krijgen we de Mittag-Lefflerfunctie met één parameter.

Definitie 2.1 (Mittag-Lefflerfunctie met één parameter). Stel $a \in \mathbb{C}$ met $\operatorname{Re}(a) > 0$, dan is de Mittag-Leffler functie met één parameter, de functie met complexe veranderlijke z :

$$E_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak + 1)}.$$

De meest gebruikte versie van de Mittag-Lefflerfunctie voegt in de gammafunctie nog een extra parameter $b \in \mathbb{C}$ toe. Deze wordt als volgt gedefinieerd.

Definitie 2.2 (Mittag-Lefflerfunctie met twee parameters). Stel $a, b \in \mathbb{C}$ en $\operatorname{Re}(a) > 0$, dan is de Mittag-Lefflerfunctie met twee parameters, de functie met complexe veranderlijke z :

$$E_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak + b)}.$$

Merk op dat er in Definitie 2.2 enkel wordt geëist dat $\operatorname{Re}(a) > 0$, terwijl b willekeurig complex mag zijn. Dat zal duidelijk blijken uit het convergentie gedrag van de Mittag-Lefflerfunctie. De parameter a wordt overigens vaak reëel genomen (dus $a > 0$) voor asymptotische benaderingen van $E_{a,b}(z)$, en bij praktische toepassingen wordt met reële b gewerkt.

2.1 Gehele functies

In deze sectie maken we gebruik van [4]. Aangezien de Mittag-Lefflerfunctie $E_{a,b}(z)$ een machtreeks is, kunnen we zijn convergentiegedrag voor verschillende z gemakkelijk bestuderen. Beschouw de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ met $c_k = \frac{1}{\Gamma(ak+b)}$ en bijhorende convergentiestraal die voldoet aan $\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right|$ als de limiet bestaat. Voor grote $|z|$ kunnen we Stirlings benadering gebruiken:

$$\Gamma(ak + b) \sim \sqrt{2\pi}(ak)^{ak+b-\frac{1}{2}} e^{-ak},$$

of dus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(ak + b)}{\sqrt{2\pi}(ak)^{ak+b-\frac{1}{2}} e^{-ak}} = 1.$$

Dan geldt er

$$\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(b + ak)}{\Gamma(b + a + ak)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |ak|^{-\operatorname{Re}(a)} e^{\operatorname{Re}(a)} = |a|^{-\operatorname{Re}(a)} e^{\operatorname{Re}(a)} \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-\operatorname{Re}(a)}.$$

Zo is $1/R = 0$ als $\operatorname{Re}(a) > 0$, voor alle $b \in \mathbb{C}$, dus zal de reeks convergeren voor alle z . Als $\operatorname{Re}(a) < 0$ dan is $1/R = \infty$ en zal de reeks voor geen enkele z convergeren, behalve $z = 0$. Als $\operatorname{Re}(a) = 0$ is $1/R = 1$ en is er bijgevolg enkel convergentie voor $|z| < 1$. Als nu in het bijzonder $a = 0$ krijgen we $E_{0,b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} z^k$. Deze meetkundige reeks convergeert wanneer $|z| < 1$, bijgevolg is $E_{0,b}(z)$ (enkel) convergent als $|z| < 1$ en dan is $E_{0,b}(z) = \frac{1}{\Gamma(b)} \frac{1}{1-z}$.

We zullen aantonen dat $E_{a,b}(z)$ een gehele functie van eindige orde is als $\operatorname{Re}(a) > 0$. Om dat te kunnen doen definiëren we eerst gehele functies van eindige orde en geven een handige stelling dat een criterium geeft opdat een machtreeks een gehele functie van eindige orde is. We bedoelen met $f(z) = O(g(z))$ voor $|z| \rightarrow \infty$ dat er een $M \in \mathbb{R}^+$ en $C > 0$ bestaat zodat $\forall z \in \mathbb{C} : |z| > M$ en $|f(z)| \leq Cg(z)$, voor positieve functies $g(z)$.

Definitie 2.3 (Gehele functies van eindige orde). Stel dat $f(z)$ een gehele functie is. Dan noemen we f van eindige orde als er een positieve constante A bestaat zodat als $|z| \rightarrow \infty$ dan

$$f(z) = O\left(e^{|z|^A}\right).$$

De kleinste A waarvoor dit geldt noemen we de orde ρ van de functie f .

Als een gehele functie van orde ρ is geldt dus voor elke $\varepsilon > 0$: $f(z) = O\left(e^{|z|^{\rho+\varepsilon}}\right)$.

Veeltermen zijn van orde 0, want voor $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ domineert de hoogstegraadsterm $a_n z^n$ wanneer $|z| \rightarrow \infty$ zodat $|f(z)| = O(|z|^n) \leq O\left(e^{|z|^\varepsilon}\right)$ voor elke $\varepsilon > 0$. De exponentiële functie e^z is een gehele functie van orde 1. Inderdaad $|e^z| = e^x = O(e^{|z|})$, want $|x| \leq |z|$.

Stelling 2.4. Beschouw de functie $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Een nodige en voldoende voorwaarde dat f een gehele functie van orde ρ is, is dat:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/|a_k|)}{k \ln(k)} = \frac{1}{\rho}.$$

Bewijs. Zie [5]. ■

Stelling 2.5. De Mittag-Lefflerfunctie $E_{a,b}$ is een gehele functie van orde $1/\operatorname{Re}(a)$ indien $\operatorname{Re}(a) > 0$.

Bewijs. We passen Stirling's benadering van de gammafunctie toe:

$$\Gamma(ak + b) \sim \sqrt{2\pi} e^{-ak} (ak)^{ak+b-\frac{1}{2}}.$$

Dan passen we Stelling 2.4 toe op $E_{a,b}(z)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Gamma(b + ak)|}{k \ln(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sqrt{2\pi} e^{-\operatorname{Re}(a)k} (|a|k)^{\operatorname{Re}(ak+b)-1/2} e^{-\operatorname{Im}(ak+b) \arg(a)})}{k \ln(k)} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sqrt{2\pi}) - \operatorname{Re}(a)k + (\operatorname{Re}(ak+b) - \frac{1}{2}) \ln(|a|k) - (\operatorname{Im}(a)k + \operatorname{Im}(b)) \arg(a)}{k \ln(k)} \\
 &= \operatorname{Re}(a).
 \end{aligned}$$

Hieruit en het feit dat de reekssomfunctie $E_{a,b}$ convergeert wanneer $\operatorname{Re}(a) > 0$ volgt het gestelde. ■

We besluiten dus dat voor $\operatorname{Re}(a) > 0, b \in \mathbb{C}$ de Mittag-Lefflerfunctie $E_{a,b}(z)$ gedefinieerd in Definitie 2.2 een gehele functie is van orde $\frac{1}{\operatorname{Re}(a)}$. Dat betekent dus dat $|E_{a,b}| = O\left(e^{|z|^{\frac{1}{\operatorname{Re}(a)}}}\right)$ of dus dat

$$|E_{a,b}(z)| \leq C \exp(|z|^{\frac{1}{\operatorname{Re}(a)}}), \quad |z| \rightarrow \infty,$$

voor een zekere constante $C > 0$ en $\operatorname{Re}(a) > 0$.

2.2 Relaties met andere functies

Uit de vorige sectie weten we dat de Mittag-Lefflerfunctie $E_{a,b}(z)$ een gehele functie is als $\operatorname{Re}(a) > 0$. Met bepaalde keuzes van a en b zullen enkele bekende functies opduiken, zoals de exponentiële functie. Neem $a = 1, b \in \mathbb{N}$ en $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \\
 E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{1}{z} (e^z - 1), \\
 &\vdots \\
 E_{1,n}(z) &= \frac{1}{z^{n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+n-1}}{(k+n-1)!} = \frac{1}{z^{n-1}} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{1}{z^{n-1}} \left(e^z - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{z^k}{k!} \right).
 \end{aligned}$$

De hyperbolische sinus- en cosinusfunctie zijn ook speciale gevallen van de Mittag-Leffler functie:

$$\begin{aligned}
 E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \\
 z \cdot E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k)!} = \sinh(z).
 \end{aligned}$$

Met de keuze van $a = 1/2$ en $b = 1$ komt de complementaire errorfunctie voor:

$$E_{\frac{1}{2},1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)} = e^{-z^2/i^2} \operatorname{erfc}(-iz/i) = e^{z^2} \operatorname{erfc}(z),$$

waarbij

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

2.3 Eigenschappen en recurrente betrekkingen

Als $a \in \mathbb{C}$ met $\operatorname{Re}(a) > 0$ en $b = 0$ dan is

$$E_{a,0}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{a(k+1)} = z \cdot E_{a,a}(z),$$

omdat $\frac{1}{\Gamma(z)} = 0$ als $z = 0$ omdat 0 een pool is van $\Gamma(z)$. Zo bekomen we de functionele gelijkheid

$$E_{a,0}(z) = zE_{a,a}(z), \quad (\operatorname{Re}(a) > 0).$$

Als $a = 0$ en $b \in \mathbb{C}$ dan is zoals eerder besproken

$$E_{0,b}(z) = \frac{1}{\Gamma(b)} \frac{1}{1-z}, \quad (|z| < 1).$$

We kunnen voor de Mittag-Lefflerfunctie in de definiërende reeks het geval $k = 0$ uit de reeks halen

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{\Gamma(b)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+b)},$$

en vinden dat

$$\lim_{a \rightarrow \infty} E_{a,b}(z) = \frac{1}{\Gamma(b)} = E_{a,b}(0),$$

aangezien $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(ak+b)} = 0$ als $\operatorname{Re}(a) > 0$.

Stel $b = \beta + am$ met $m \in \mathbb{Z}$. Dan kunnen we de Mittag-Lefflerfunctie schrijven als

$$\begin{aligned} E_{a,b}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+b)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{\Gamma(ak-a+b)} \\ &= \frac{1}{z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak-a+b)} - \frac{1}{\Gamma(b-a)} \right) = \frac{1}{z} \left(E_{a,b-a}(z) - \frac{1}{\Gamma(b-a)} \right). \end{aligned}$$

Hieruit vinden we de formule:

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{z} \left(E_{a,b-a}(z) - \frac{1}{\Gamma(b-a)} \right), \quad (\operatorname{Re}(a) > 0). \quad (2.1)$$

Nemen we nu $a+b$ in plaats van b in formule (2.1) dan krijgen we de relatie:

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{\Gamma(b)} + zE_{a,b+a}(z), \quad (\operatorname{Re}(a) > 0). \quad (2.2)$$

We zullen dadelijk een handige recurrente betrekking voor de Mittag-Lefflerfunctie bewijzen, die bij de asymptotische expansie nodig zal zijn. Eerst tonen we een voorbereidend lemma aan.

Lemma 2.6. Voor $m \in \mathbb{N}$ met $m > 0$ geldt

$$\sum_{l=-m}^m e^{\frac{i2\pi lk}{2m+1}} = \begin{cases} 2m+1 & \text{als } k \equiv 0 \pmod{2m+1} \\ 0 & \text{als } k \not\equiv 0 \pmod{2m+1} \end{cases}.$$

Bewijs. Er geldt $\sum_{l=0}^{2m} z^l = \frac{1-z^{2m+1}}{1-z}$, aangezien dit een partielsom van een meetkundige reeks is. Stel nu $z = e^{\frac{i2\pi k}{2m+1}}$ voor $k \in \mathbb{Z}$, dan wordt de reekssom $\frac{1-e^{\frac{i2\pi k}{2m+1}}}{1-e^{\frac{i2\pi k}{2m+1}}}$. Als k geen veelvoud van $2m+1$ is, wordt dit nul. Wanneer k echter een veelvoud van $2m+1$ is, wordt de noemer nul, dus keren we terug naar de originele reeks $\sum_{l=0}^{2m} z^l$ dewelke vereenvoudigt tot $\sum_{l=0}^{2m} e^{\frac{i2\pi lk}{2m+1}} = \sum_{l=0}^{2m} 1 = 2m+1$. Merk nu op dat

$$\sum_{l=-m}^m e^{\frac{i2\pi lk}{2m+1}} = e^{-i2\pi mk} \sum_{l=0}^{2m} e^{\frac{i2\pi lk}{2m+1}} = \sum_{l=0}^{2m} e^{\frac{i2\pi lk}{2m+1}}.$$

We besluiten

$$\sum_{l=-m}^m e^{\frac{i2\pi lk}{2m+1}} = \begin{cases} 2m+1 & \text{als } k \equiv 0 \pmod{2m+1} \\ 0 & \text{als } k \not\equiv 0 \pmod{2m+1} \end{cases}.$$

■

Stelling 2.7 (Recursieve sommatieformule). *Stel $m \in \mathbb{N}$ met $m > 0$ dan geldt*

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{2m+1} \sum_{l=0}^{m-1} E_{\frac{a}{2m+1},b} \left(z^{\frac{1}{2m+1}} e^{\frac{i2\pi l}{2m+1}} \right).$$

Bewijs. We passen Lemma 2.6 toe op de optredende Mittag-Lefflerfuncties in het linkerlid van

$$\sum_{l=-m}^m E_{a,b} \left(z e^{\frac{i2\pi l}{2m+1}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+b)} \sum_{l=-m}^m e^{\frac{i2\pi lk}{2m+1}}$$

De binnenste som in de laatste gelijkheid is steeds 0 behalve wanneer in de buitenste sommatie k een veelvoud is van $2m+1$. In de buitenste som kunnen we dus k vervangen door $k(2m+1)$ en is de binnenste som steeds $2m+1$. Zo bekomen we dat

$$\sum_{l=-m}^m E_{a,b} \left(z e^{\frac{i2\pi l}{2m+1}} \right) = (2m+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k(2m+1)}}{\Gamma(ak(2m+1)+b)} = (2m+1) \cdot E_{a(2m+1),b}(z^{2m+1}).$$

Het vervangen van a met $\frac{a}{2m+1}$ en z met $z^{\frac{1}{2m+1}}$ geeft dan het resultaat. ■

2.4 Fractionele calculus

In fractionele calculus speelt de Mittag-Leffler functie een belangrijke rol. Deze komt expliciet voor in de Riemann-Liouville fractionele afgeleide en integraal van functies zoals $e^{\lambda t}$, $\cosh(\sqrt{\lambda}t)$ en $\sinh(\sqrt{\lambda}t)$ voor een zekere $\lambda > 0$. Er zijn heel wat definities voor de fractionele afgeleiden en integralen, waar de voorkeur kan liggen voor praktische toepassing of eerder theoretische. We bestuderen de Riemann-Liouville definitie van de fractionele afgeleide en integraal en het verband met de Mittag-Lefflerfunctie.

Beschouw een continue functie $t \mapsto f(t)$ die $n+1$ continu afleidbaar is in $\mathbb{R}$ voor $n \in \mathbb{N}$. De fractionele afgeleide/integraal is een veralgemening van de n -de orde afgeleide/integraal van f . We willen dus n -de orde afgeleiden

$$\frac{d}{dt}f(t), \quad \frac{d^2}{dt^2}f(t), \quad \dots, \quad \frac{d^n}{dt^n}f(t)$$

en n -de orde integralen

$$\int_a^t f(t_1) dt_1, \quad \int_a^t \left(\int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 \right) dt_2, \quad \dots, \quad \int_a^t \int_a^{t_n} \dots \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

compact definiëren, en dan wel met behulp van slechts één integraal. Bovendien werkt de fractionele afgeleide en integraal voor een willekeurig reële orde.

Daarvoor definiëren we de fractionele Riemann-Liouville afgeleide/integraal.

Definitie 2.8 (Riemann-Liouville fractionele afgeleide). Stel $f(t)$ een C^{n+1} functie voor $n \in \mathbb{N}$. Dan wordt de Riemann-Liouville fractionele afgeleide van orde $p \in \mathbb{R}$ gedefinieerd als

$${}_t D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^t \frac{f(u)}{(t-u)^{p-n+1}} du \quad (n-1 \leq p < n).$$

Merk op dat voor $p \in \mathbb{N}$ geldt dat ${}_t D_t^p f(t) = f^{(p)}(t)$.

De definitie van de fractionele integraal haalt zijn inspiratie uit Cauchys formule voor herhaalde integratie, die een n -voudige integraal uitdrukt als een enkele integraal:

$$\int_a^t \int_a^{t_n} \dots \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-u)^{n-1} f(u) du.$$

Definitie 2.9 (Riemann-Liouville fractionele integraal). Stel $f(t)$ een L_{loc}^1 -functie. Dan wordt de Riemann-Liouville fractionele integraal van orde $p \in \mathbb{R}$ gedefinieerd als

$${}_t D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_t^t (t-u)^{p-1} f(u) du.$$

We bekijken nu de fractionele afgeleide en integraal van een vaak gebruikte vorm van Mittag-Leffler functie met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a > 0$:

$$E_{a,b}(\lambda t^a) t^{b-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

2.4.1 Integratie van de Mittag-Lefflerfunctie

We berekenen de fractionele integraal van orde $p > 0$ van bovenstaande functie $E_{a,b}(\lambda t^a) t^{b-1}$.

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^{-p} \left(E_{a,b}(\lambda t^a) t^{b-1} \right) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-u)^{p-1} E_{a,b}(\lambda u^a) u^{b-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(ak+b)} \int_0^t (t-u)^{p-1} u^{ak+b-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(ak+b)} t^{p+ak+b-1} \frac{\Gamma(p)\Gamma(ak+b)}{\Gamma(ak+b+p)} \\ &= t^{b+p-1} E_{a,b+p}(\lambda t^a). \end{aligned}$$

In de berekening werd gebruik gemaakt van de betafunctie en Stelling 1.8. Als $p = 1$, vinden we in het bijzonder de integraal

$$\int_0^t E_{a,b}(\lambda u^a) u^{b-1} du = t^b E_{a,b+1}(\lambda t^a).$$

Herinner dat $E_{1,1}(z) = e^z$, $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$, en $zE_{2,2}(z^2) = \sinh(z)$. Dan krijgen we uit het vorige de fractionele integralen van de functies $e^{\lambda t}$, $\cosh(\sqrt{\lambda}t)$ en $\sinh(\sqrt{\lambda}t)$

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-p} e^{\lambda t} &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-u)^{p-1} E_{1,1}(\lambda u) du = t^p E_{1,p+1}(\lambda t), \\ {}_0D_t^{-p} \cosh(\sqrt{\lambda}t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-u)^{p-1} E_{2,1}(\lambda u^2) du = t^p E_{2,p+1}(\lambda t^2), \\ {}_0D_t^{-p} \sinh(\sqrt{\lambda}t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-u)^{p-1} \cdot \sqrt{\lambda} u E_{2,2}(\lambda u^2) du = \sqrt{\lambda} \cdot t^{p+1} E_{2,p+2}(\lambda t^2), \end{aligned}$$

die compact te noteren zijn met behulp van de Mittag-Leffler functie.

2.4.2 Afgeleide van de Mittag-Lefflerfunctie

Beschouw eerst de k -de orde afgeleide van de Mittag-Lefflerfunctie met $a > 0$ naar z voor $k \in \mathbb{N}$. Dan geldt er dat

$$\frac{d^k}{dz^k} E_{a,b}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(a(m+k)+b)} z^m,$$

wat we noteren als $E_{a,b}^{(k)}(z)$. Inderdaad want we hebben door steeds te herindexeren dat

$$E_{a,b}^{(1)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{mz^{m-1}}{\Gamma(am+b)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mz^{m-1}}{\Gamma(am+b)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)}{\Gamma(a(m+1)+b)} z^m,$$

en

$$E_{a,b}^{(2)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m+1)}{\Gamma(a(m+1)+b)} z^{m-1} = \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)(m+2)}{\Gamma(a(m+2)+b)} z^m,$$

zodat uiteindelijk

$$E_{a,b}^{(k)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)(m+2) \dots (m+k)}{\Gamma(a(m+k)+b)} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(a(m+k)+b)} z^m,$$

waarbij het termsgewijs afleiden gerechtvaardigd is door het feit dat $E_{a,b}(z)$ een gehele machtreeks is aangezien $a > 0$. Nu berekenen we de fractionele afgeleide van $E_{a,b}^{(k)}(\lambda t^a) \cdot t^{ak+b-1}$ voor p met $n-1 \leq p < n$:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^p \left(E_{a,b}^{(k)}(\lambda t^a) t^{ak+b-1} \right) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-u)^{n-p-1} u^{ak+b-1} \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(a(m+k)+b)} (\lambda u^a)^m du \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(a(m+k)+b)} \lambda^m \\ &\quad \times \int_0^t (t-u)^{n-p-1} u^{ak+b-1+am} du. \end{aligned}$$

De integraal binnenin de uitdrukking kunnen we met de substitutie $u = xt$ omvormen naar de betafunctie en met Stelling 1.8 volgt

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-u)^{n-p-1} u^{ak+b-1+am} du &= t^{n-p+a(k+m)+b-1} \int_0^1 (1-x)^{n-p-1} x^{a(k+m)+b-1} dx \\ &= t^{n-p+a(k+m)+b-1} \cdot \frac{\Gamma(n-p)\Gamma(a(k+m)+b)}{\Gamma(a(k+m)+b+n-p)}. \end{aligned}$$

Dan krijgen we

$$\begin{aligned} {}_0D_t^p \left(E_{a,b}^{(k)}(\lambda t^a) t^{ak+b-1} \right) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(a(m+k)+b)} \lambda^m t^{n-p+a(k+m)+b-1} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(n-p)\Gamma(a(k+m)+b)}{\Gamma(a(k+m)+b+n-p)} \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(a(k+m)+b+n-p)} \lambda^m t^{n-p+a(k+m)+b-1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(a(k+m)+b+n-p)} \lambda^m \frac{d^n}{dt^n} t^{n-p+a(k+m)+b-1} \\ &= t^{ak+b-p-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(a(k+m)+b-p)} (\lambda t^a)^m \\ &= t^{ak+b-p-1} E_{a,b-p}^{(k)}(\lambda t^a). \end{aligned}$$

Door $k = 0$ te nemen vinden we de fractionele afgeleide van orde p van $E_{a,b}(t^a) \cdot t^{b-1}$:

$${}_0D_t^p \left(E_{a,b}(\lambda t^a) t^{b-1} \right) = t^{b-p-1} E_{a,b-p}(\lambda t^a).$$

Nemen we vervolgens $a = b = 1$, dan vinden we de fractionele afgeleide van de exponentiële functie $e^{\lambda t}$:

$${}_0D_t^p e^{\lambda t} = {}_0D_t^p (E_{1,1}(\lambda t) t^0) = t^{-p} E_{1,1-p}(\lambda t).$$

Met de keuzes $a = 1, b = 2$ en $a = b = 2$ vinden we de fractionele afgeleiden van respectievelijk $\cosh(\sqrt{\lambda t})$ en $\sinh(\sqrt{\lambda t})$:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^p \cosh(\sqrt{\lambda t}) &= {}_0D_t^p (E_{2,1}(\lambda t^2) t^0) = t^{-p} E_{2,1-p}(\lambda t^2), \\ {}_0D_t^p \sinh(\sqrt{\lambda t}) &= {}_0D_t^p (E_{2,2}(\lambda t^2) \sqrt{\lambda t}) = \sqrt{\lambda} \cdot t^{1-p} E_{2,2-p}(\lambda t^2). \end{aligned}$$

Merk op dat wanneer we in de bekomen uitdrukkingen p met $-p$ vervangen, we de fractionele integralen vinden.

2.5 Integraalrepresentaties van $E_{a,b}(z)$

Als de parameter a reëel is, kunnen we integraalrepresentaties opstellen die tot een asymptotische ontwikkeling leiden van de Mittag-Lefflerfunctie alsook uiteindelijk een bovengrens voor zijn modulus. In deze sectie gebruiken we de contour $\gamma(\varepsilon, \mu)$ en de bijhorende gebieden $G^-(\varepsilon, \mu)$ en $G^+(\varepsilon, \mu)$ uit Figuur 1.4.

We onderscheiden drie aparte gevallen voor waarden van de parameter a : $0 < a < 2$, $a = 2$ en $a > 2$, en geven integraalrepresentaties voor de verschillende gevallen.

Stelling 2.10. *Stel $a \in \mathbb{R}$ met $0 < a < 2$ en $b \in \mathbb{C}$ willekeurig. Dan geldt voor elke $\varepsilon > 0$ en μ met $\frac{\pi a}{2} < \mu \leq \min(\pi, \pi a)$ het volgende:*

Als $z \in G^-(\varepsilon, \mu) : \mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$ of $|z| < \varepsilon$, dan is

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{2a\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \mu)} \frac{\exp(u^{1/a}) u^{1-b/a}}{u-z} du$$

Als $z \in G^+(\varepsilon, \mu) : |\arg(z)| < \mu$, dan is

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{a} z^{\frac{1-b}{a}} \exp(z^{1/a}) + \frac{1}{2a\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \mu)} \frac{\exp(u^{1/a}) u^{1-b/a}}{u-z} du.$$

Bewijs. Veronderstel eerst dat $|z| < \varepsilon$. Voor elke $u \in \gamma(\varepsilon, \mu)$ is $|u| \geq \varepsilon$ zodat $|\frac{z}{u}| < \frac{\varepsilon}{|u|} \leq 1$. Nu maken we gebruik van de eerste integraalrepresentatie uit Stelling 1.10 van $1/\Gamma(z)$. Deze vervangen we in de definitie van de Mittag-Lefflerfunctie.

$$\begin{aligned} E_{a,b}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+b)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i a} \left(\int_{\gamma(\varepsilon, \mu)} \exp(u^{1/a}) u^{(1-(ak+b)-a)/a} du \right) z^k \\ &= \frac{1}{2\pi i a} \int_{\gamma(\varepsilon, \mu)} \exp(u^{1/a}) u^{\frac{1-b}{a}-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{u} \right)^k du \\ &= \frac{1}{2\pi i a} \int_{\gamma(\varepsilon, \mu)} \exp(u^{1/a}) u^{\frac{1-b}{a}-1} \cdot \frac{u}{u-z} du \\ &= \frac{1}{2\pi i a} \int_{\gamma(\varepsilon, \mu)} \frac{\exp(u^{1/a}) u^{\frac{1-b}{a}}}{u-z} du. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Waar we gebruik maken van $\frac{1-(ak+b)-a}{a} = \frac{1-b}{a} - 1 - k$ en dat de optredende meetkundige reeks convergeert wegens $|\frac{z}{u}| < 1$.

We tonen nu aan dat de integraal langs $\gamma(\varepsilon, \mu)$ absoluut convergeert. Aangezien $|z| < \varepsilon$ en $|u| \geq \varepsilon$ is $|u-z| \geq \varepsilon - |z| > 0$ en kunnen we de integraal afschatten als volgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma(\varepsilon, \mu)} \frac{\exp(u^{1/a}) u^{\frac{1-b}{a}}}{u-z} du \right| &\leq \int_{\gamma(\varepsilon, \mu)} \frac{|\exp(u^{1/a})| \left| u^{\frac{1-b}{a}} \right|}{|u-z|} |du| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon - |z|} \int_{\gamma(\varepsilon, \mu)} \left| \exp(u^{1/a}) \right| \left| u^{\frac{1-b}{a}} \right| |du| \end{aligned} \quad (2.4)$$

Het integrandum van (2.4) is continu op de begrensde contour $\{u \in \mathbb{C} : |u| = R, |\arg(u)| \leq \mu\}$ zodat de integraal convergeert op deze contour. Over de onbegrensde contouren $\{u \in \mathbb{C} : |u| > R, \arg(u) = \pm\mu\}$ geldt

$$\left| \exp(u^{1/a}) \right| = \exp\left(|u|^{1/a} \cos(\mu/a)\right) \quad \text{met} \quad \cos(\mu/a) < 0,$$

zodat door de exponentiële afname de integraal ook convergeert over de onbegrensde contouren.

De bekomen integraal (2.3) van $E_{a,b}$ is in functie van z een gehele functie in de gebieden $G^-(\varepsilon, \mu)$ en $G^+(\varepsilon, \mu)$. Wegens de keuze $\frac{\pi a}{2} < \mu < \min(\pi, \pi a)$ is elke cirkel $|z| < \varepsilon$ bevat in $G^-(\varepsilon, \mu)$. We kunnen door analytische extensie het gebied van $|z| < \varepsilon$ uitbreiden naar heel $G^-(\varepsilon, \mu)$. Neem nu zo een willekeurige $z \in G^-(\varepsilon, \mu)$. Als $|z| < \varepsilon$ kunnen we gewoon vorige argumenten gebruiken.

Als dan in het ander geval $|z| \geq \varepsilon$, geldt er ook dat $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$ (want $z \in G^-(\varepsilon, \mu)$). Door nu in de afchatting van (2.4) in de plaats te gebruiken dat

$$|u - z| \geq |z| \sin(|\arg(z)| - \mu),$$

dan zal de integraal in (2.3), met dezelfde stappen, nog steeds convergeren. De bekomen integraal in (2.3) geldt dus voor alle $z \in G^-(\varepsilon, \mu)$.

Stel nu dat $|z| > \varepsilon$. We nemen nu $|\arg(z)| < \mu$ zodat $z \in G^+(\varepsilon, \mu)$. Neem nu een willekeurige $\varepsilon_1 > 0$ met $|z| < \varepsilon_1$ zodat we een grotere cirkel genomen hebben zodanig dat $z \in G^-(\varepsilon_1, \mu)$. We kunnen de bekomen integraal representatie toepassen:

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{2a\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon_1, \mu)} \frac{\exp(u^{1/a})u^{1-b/a}}{u - z} du.$$

Stel $f(u) = \exp(u^{1/a})u^{1-b/a}$. Deze functie is holomorf op het binnengebied van de contour $\Gamma = \gamma(\varepsilon_1, \mu) \setminus \gamma(\varepsilon, \mu)$. Uit de integraalformule van Cauchy volgt dan dat

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{u - z} du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\exp(u^{1/a})u^{1-b/a}}{u - z} du,$$

zodat

$$\begin{aligned} E_{a,b}(z) &= \frac{1}{2\pi i a} \int_{\gamma(\varepsilon_1, \mu)} \frac{f(u)}{u - z} du = \frac{1}{2\pi i a} \left(\int_{\Gamma} \frac{f(u)}{u - z} du + \int_{\gamma(\varepsilon, \mu)} \frac{f(u)}{u - z} du \right) \\ &= \frac{1}{a} z^{1-b/a} \exp(z^{1/a}) + \frac{1}{2a\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \mu)} \frac{\exp(u^{1/a})u^{1-b/a}}{u - z} du. \end{aligned}$$

■

Stelling 2.11. Stel $a = 2$ en $b \in \mathbb{C}$ met $\operatorname{Re}(b) > 0$. Dan geldt voor willekeurige $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} E_{2,b}(z) &= \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \mu)} \frac{\exp(u^{1/2})u^{1-b/2}}{u - z} du && \text{als } z \in G^-(\varepsilon, \pi), \\ E_{2,b}(z) &= \frac{1}{2} z^{1-b/2} \exp(z^{1/2}) + \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \mu)} \frac{\exp(u^{1/2})u^{1-b/2}}{u - z} du && \text{als } z \in G^+(\varepsilon, \pi). \end{aligned}$$

Bewijs. Volledig analoog aan het vorig bewijs. We gebruiken hier echter de integraalrepresentatie $1/\Gamma(z)$ uit 1.10 waarvoor $\operatorname{Re}(z) > 0$, waardoor voor $1/\Gamma(ak + b)$ moet gelden dat $\operatorname{Re}(b) > 0$ en we nemen $\mu = \pi$. ■

2.6 Asymptotische expansies

Onder de verschillende gevallen van de parameter, wordt nog een bepaalde begrenzing op het argument van z gegeven. De verschillende asymptotische expansies worden in de volgende stellingen gegeven. Deze expansies geven benaderingen van de Mittag-Lefflerfunctie voor numerieke toepassingen. Bovendien kunnen we voor $a < 2$ een bovengrens voor de absolute waarde van de Mittag-Lefflerfunctie geven waaruit zal blijken dat de Mittag-Lefflerfunctie in het gebied $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$ uniform begrensd is wanneer $a \in (0, 2)$.

Stelling 2.12. *Stel $0 < a < 2$ en $b \in \mathbb{C}$ willekeurig. Dan geldt voor $\frac{\pi a}{2} < \mu < \min(\pi, \pi a)$ en een willekeurig natuurlijk getal $p \geq 1$ dat:*

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{a} z^{1-b/a} \exp(z^{1/a}) - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(b-ak)} + O(|z|^{-1-p})$$

$$|z| \rightarrow \infty, \quad |\arg(z)| \leq \mu.$$

Bewijs. Neem φ zodanig dat $\frac{\pi a}{2} < \mu < \varphi \leq \min(\pi, \pi a)$. Stel willekeurig $p \in \mathbb{N}$ met $p \geq 1$. Kies $\varepsilon = 1$ en $|\arg(z)| \leq \mu$ dan is, voor $|z|$ voldoende groot, $z \in G^+(1, \varphi)$. We vervangen

$$\begin{aligned} \frac{1}{u-z} &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{z^{k+1}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{k-1}}{z^k} = -\sum_{k=1}^p \frac{u^{k-1}}{z^k} - \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{u^{k-1}}{z^k} \\ &= -\sum_{k=1}^p \frac{u^{k-1}}{z^k} - \frac{u^p}{z^{p+1}} \frac{z}{z-u} = -\sum_{k=1}^p \frac{u^{k-1}}{z^k} + \frac{u^p}{z^p} \frac{1}{u-z}, \end{aligned}$$

in de integraalrepresentatie van Stelling 2.10, en bekomen

$$\begin{aligned} E_{a,b}(z) &= \frac{1}{a} z^{1-b/a} \exp(z^{1/a}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(1,\varphi)} \frac{\exp(u^{1/a}) u^{1-b/a}}{u-z} du \\ &= \frac{1}{a} z^{1-b/a} \exp(z^{1/a}) - \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(1,\varphi)} \exp(u^{1/a}) u^{\frac{1-b}{a}+k-1} du \right) z^{-k} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i z^p} \int_{\gamma(1,\varphi)} \exp(u^{1/a}) u^{\frac{1-b}{a}+p} du. \end{aligned}$$

Wegens Stelling 1.10 is

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(1,\varphi)} \exp(u^{1/a}) u^{\frac{1-b}{a}+k-1} du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(1,\varphi)} \exp(u^{1/a}) u^{\frac{1-(b-ak)-a}{a}} du = \frac{1}{\Gamma(b-ak)},$$

en krijgen we

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{a} z^{1-b/a} \exp(z^{1/a}) - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(b-ak)} + \frac{1}{2\pi i z^p} \int_{\gamma(1,\varphi)} \exp(u^{1/a}) u^{\frac{1-b}{a}+p} du.$$

Nu maken we een afchatting van de integraal

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i z^p} \int_{\gamma(1,\varphi)} \exp(u^{1/a}) u^{\frac{1-b}{a}+p} du,$$

voor grote $|z|$ met $|\arg(z)| \leq \mu$. Voor $z \in G^+(1, \varphi)$ is $|z| > 1$ en voor $u \in \gamma(1, \varphi)$ is $|u| \geq 1$, bijgevolg geldt voor grote $|z|$ en $|\arg(z)| \leq \mu$:

$$\min_{u \in \gamma(1,\varphi)} |u-z| \geq |z| \sin(\varphi - \mu),$$

en dus

$$\frac{1}{|u-z|} \leq \frac{1}{\min_{u \in \gamma(1,\varphi)} |u-z|} = \frac{|z|^{-1}}{\sin(\varphi - \mu)}.$$

Dan volgt er

$$\begin{aligned} |I(z)| &\leq \frac{1}{|2\pi a i z^p|} \int_{\gamma(1, \varphi)} \left| \exp(u^{1/a}) \right| \left| u^{\frac{1-b}{a}+p} \right| |du| \\ &\leq \frac{|z|^{-1-p}}{2\pi a \sin(\varphi - \mu)} \int_{\gamma(1, \varphi)} \left| \exp(u^{1/a}) \right| \left| u^{\frac{1-b}{a}+p} \right| |du|. \end{aligned}$$

Voor een u waarvoor $\arg(u) = \pm\varphi$ geldt (en $|u| \geq 1$) geldt

$$u^{1/a} = |u|^{1/a} \cos(\varphi/a) + i|u|^{1/a} \sin(\varphi/a),$$

dus

$$\left| \exp(u^{1/a}) \right| = \exp(\operatorname{Re}(u^{1/a})) = \exp\left(|u|^{1/a} \cos(\varphi/a)\right).$$

Door de keuze van φ is $\frac{\pi}{2} < \varphi/a < \min(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a^2})$ en omdat $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ en $\cos(\min(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a^2})) < 0$ is steeds $\cos(\varphi/a) < 0$. Hierdoor zal de integraal $I(z)$ convergeren met begrenzing

$$\begin{aligned} |I(z)| &\leq \frac{|z|^{-1-p}}{2\pi a \sin(\varphi - \mu)} \int_{\gamma(1, \varphi)} \exp\left(|u|^{1/a} \cos(\varphi/a)\right) \left| u^{\frac{1-b}{a}+p} \right| du \\ &= O(|z|^{-1-p}) \quad \text{als } |z| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

wat het bewijs vervolledigt. ■

Stelling 2.13. *Stel $0 < a < 2$ en $b \in \mathbb{C}$ willekeurig. Dan geldt voor $\frac{\pi a}{2} < \mu < \min(\pi, \pi a)$ en een willekeurig natuurlijk getal $p \geq 1$ dat:*

$$\begin{aligned} E_{a,b}(z) &= - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(b - ak)} + O(|z|^{-1-p}) \\ |z| &\rightarrow \infty, \quad \mu \leq |\arg(z)| \leq \pi. \end{aligned}$$

Bewijs. Neem φ zodanig dat $\frac{\pi a}{2} < \varphi < \mu < \min(\pi, \pi a)$. Kies $\varepsilon = 1$ en $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$ zodat $z \in G^-(1, \varphi)$. Wegens Stelling 2.10 en gelijke stappen als in het vorig bewijs volgt:

$$E_{a,b}(z) = - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(b - ak)} + O(|z|^{-1-p}).$$
■

Uit deze twee stellingen volgen nu de volgende begrenzingen voor $a < 2$:

Stelling 2.14. *Stel $a \in \mathbb{R}$ met $a < 2$ en $b \in \mathbb{C}$ willekeurig. Als voor μ geldt dat $\frac{\pi a}{2} < \mu < \min(\pi, \pi a)$, dan zijn er reële constanten $C_1 > 0$ en $C_2 > 0$ waarvoor:*

$$\begin{aligned} |E_{a,b}(z)| &\leq C_1(1 + |z|)^{(1-b)/a} \exp(\operatorname{Re}(z^{1/a})) + \frac{C_2}{1 + |z|} \\ &(|\arg(z)| \leq \mu), \quad |z| \geq 0. \end{aligned}$$

Bewijs. Wegens Stelling 2.12 met $p = 1$ krijgen we de afchatting

$$|E_{a,b}(z)| \leq \left| \frac{1}{a} z^{(1-b)/a} \exp(z^{1/a}) \right| + \left| \frac{1}{\Gamma(b-a)} \frac{1}{z} \right| + O(|z|^{-2}),$$

voor $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg(z)| \leq \mu$. Dit betekent dat er een $M > 0$ en een constante $C > 0$ bestaat zodat voor $|z| > M$:

$$|E_{a,b}(z)| \leq \left| \frac{1}{a} z^{(1-b)/a} \exp(z^{1/a}) \right| + \left| \frac{1}{\Gamma(b-a)} \right| \frac{1}{|z|} + C \frac{1}{|z|^2} \quad (2.5)$$

Als $\frac{1-b}{a} \geq 0$ dan is $|z|^{(1-b)/a} \leq (1+|z|)^{(1-b)/a}$ voor alle z . Merk op dat als $f(x) = \frac{1+x}{x}$ voor $x \in (M, +\infty[$ en $f(M)$ eindig, $f(\infty) = 1$ en $f' < 0$ dan

$$|f(x)| \leq \frac{1+M}{M}. \quad (2.6)$$

Als $\frac{1-b}{a} < 0$ geldt er wegens (2.6)

$$\frac{1}{|z|^{(b-1)/a}} = \frac{1}{(1+|z|)^{(b-1)/a}} \cdot \left(\frac{1+|z|}{|z|} \right)^{(b-1)/a} \leq \frac{1}{(1+|z|)^{(b-1)/a}} \cdot \left(\frac{1+M}{M} \right)^{(b-1)/a},$$

en neem vervolgens $M' := \left(\frac{1+M}{M} \right)^{(b-1)/a}$. Dan kan eerste term van (2.5) worden afgeschat als volgt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{a} z^{(1-b)/a} \exp(z^{1/a}) \right| &\leq \frac{1}{a} |z|^{(1-b)/a} \exp(\operatorname{Re}(z^{1/a})) \\ &\leq \frac{1}{a} \max(1, M') \cdot (1+|z|)^{(1-b)/a} \exp(\operatorname{Re}(z^{1/a})) \\ &= C_1 (1+|z|)^{(1-b)/a} \exp(\operatorname{Re}(z^{1/a})), \end{aligned}$$

voor de constante $C_1 = \frac{1}{a} \max(1, M')$. Voor $|z| > M$ kunnen we ook de volgende afchatting maken voor de laatste twee termen van (2.5):

$$\left| \frac{1}{\Gamma(b-a)} \right| \frac{1}{|z|} + C \frac{1}{|z|^2} \leq C' \frac{1}{|z|},$$

voor de constante $C' = \frac{1}{|\Gamma(b-a)|} + C > 0$. We passen nogmaals (2.6) toe om de volgende bovengrens van vorige uitdrukking te krijgen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Gamma(b-a)} \right| \frac{1}{|z|} + C \frac{1}{|z|^2} &\leq C' \frac{1}{|z|} = C' \frac{1+|z|}{|z|} \frac{1}{1+|z|} \\ &\leq C' \frac{1+M}{M} \frac{1}{1+|z|}. \end{aligned}$$

Voor het compactum $|z| \leq M$ krijgen we met de definitie van de Mittag-Lefflerfunctie:

$$|E_{a,b}(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{|\Gamma(b-ak)|} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{|\Gamma(b-ak)|} = |E_{a,b}(M)| := C_M < \infty.$$

Hiermee vinden we de gezochte bovengrens:

$$|E_{a,b}(z)| \leq C_M \leq (1+|z|) \frac{C_M}{1+|z|} \leq (1+M) \frac{C_M}{1+|z|}.$$

Neem nu $C_2 := (1 + M) \max(C'/M, C_M)$ en dan volgt uiteindelijk:

$$|E_{a,b}(z)| \leq C_1(1 + |z|)^{(1-b)/a} \exp(\operatorname{Re}(z^{1/a})) + \frac{C_2}{1 + |z|}.$$

■

Stelling 2.15. *Stel $a \in \mathbb{R}$ met $a < 2$ en $b \in \mathbb{C}$ willekeurig. Als voor μ geldt dat $\frac{\pi a}{2} < \mu < \min(\pi, \pi a)$ dan bestaat een reële constante C en geldt*

$$|E_{a,b}(z)| \leq \frac{C}{1 + |z|}$$

$$(\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi), \quad |z| \geq 0.$$

Bewijs. Uit Stelling 2.13 volgt voor $|z| \geq 1$ en $p = 1$:

$$E_{a,b}(z) = -\frac{1}{z \cdot \Gamma(b-a)} + O(|z|^{-2})$$

en

$$|E_{a,b}(z)| \leq C \frac{1}{|z|} \leq C \frac{1}{1 + |z|}.$$

Als $|z| \leq 1$ klopt de afchatting ook omdat

$$|E_{a,b}(z)| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|z|^k \cdot \Gamma(ak+b)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(ak+b)} = E_{a,b}(1) \leq E_{a,b}(1) \frac{2}{1 + |z|}.$$

Zo krijgen we voor $C' = 2 \max(E_{a,b}(1), C)$:

$$|E_{a,b}(z)| \leq \frac{C'}{1 + |z|}.$$

■

Nu behandelen we de expansie en begrenzing van de Mittag-Lefflerfunctie voor het geval $a \geq 2$.

Stelling 2.16. *Stel $a \in \mathbb{R}$ met $a \geq 2$ en $b \in \mathbb{C}$. Dan geldt voor een willekeurig natuurlijk getal $p \geq 1$ dat*

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \Omega} \left(z^{1/a} \exp\left(\frac{2\pi ni}{a}\right) \right)^{1-b} \cdot \exp\left(\exp\left(\frac{2\pi ni}{a}\right) z^{1/a}\right)$$

$$- \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(b-ak)} + O(|z|^{-1-p}),$$

met $\Omega := \{n \in \mathbb{N} : |\arg(z) + 2\pi n| \leq \frac{\pi a}{2}\}$.

Bewijs. We maken gebruik van Stelling 2.7 voor $m \geq 1$:

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{2m+1} \sum_{n=0}^{m-1} E_{\frac{a}{2m+1}, b} \left(z^{\frac{1}{2m+1}} e^{\frac{i2\pi n}{2m+1}} \right).$$

We hebben dat $a \geq 2$ dus stel nu $m \geq 1$ zodanig dat $a_1 = \frac{a}{2m+1} < 2$ zodat we binnen de bovenstaande sommatie de Stellingen 2.12 en 2.13 kunnen toepassen, waarbij dan μ moet gekozen

worden zodat $\frac{\pi a_1}{2} < \mu < \min(\pi, \pi a_1)$. Als we voor de leesbaarheid stellen dat $u = z^{\frac{1}{2m+1}} e^{\frac{i2\pi n}{2m+1}}$ dan volgt

$$\begin{aligned} E_{a,b}(z) &= \frac{1}{2m+1} \sum_{\substack{n \in [-m, m] \\ |\arg(u)| \leq \mu}} \left(\frac{1}{a_1} u^{1-b/a_1} \exp(u^{1/a_1}) - \sum_{k=1}^p \frac{u^{-k}}{\Gamma(b - a_1 k)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2m+1} \sum_{\substack{n \in [-m, m] \\ \mu < |\arg(u)| \leq \pi}} \frac{u^{-k}}{\Gamma(b - a_1 k)} + O(|u|^{-1-p}) \\ &= \frac{1}{a} \sum_{\substack{n \in [-m, m] \\ |\arg(u)| \leq \mu}} \left(\left(z^{1/a} \exp\left(\frac{2\pi n i}{a}\right) \right)^{1-b} \exp\left(z^{1/a} \exp\left(\frac{2\pi n i}{a}\right)\right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2m+1} \sum_{n=-m}^m \left(\sum_{k=1}^p \frac{z^{\frac{-k}{2m+1}} \exp\left(\frac{-ki2\pi n}{2m+1}\right)}{\Gamma(b - \frac{ak}{2m+1})} + O(|z|^{\frac{-1-p}{2m+1}}) \right). \end{aligned}$$

De eerste som wordt genomen over natuurlijke waarden $n \in [-m, m] \cap \mathbb{N}$ die voldoen aan $|\arg(u)| \leq \mu$ of dus $\left| \arg(z^{\frac{1}{2m+1}} \exp(\frac{2\pi n i}{2m+1})) \right| = \left| \arg(z^{\frac{1}{2m+1}}) + \arg(\exp(\frac{2\pi n i}{2m+1})) \right| = \left| \frac{\arg(z)}{2m+1} + \frac{2\pi n}{2m+1} \right| \leq \mu$, of dus de voorwaarde

$$|\arg(z) + 2\pi n| \leq (2m+1)\mu.$$

Veronderstel nu dat z vast is en neem $\lambda > \frac{\pi a}{2}$ met λ dicht genoeg bij $\frac{\pi a}{2}$. Dan gelden de volgende twee voorwaarden voor dezelfde waardenverzameling van n .

$$\begin{aligned} |\arg(z) + 2\pi n| &\leq \frac{\pi a}{2}, \\ |\arg(z) + 2\pi n| &\leq \lambda. \end{aligned}$$

We kunnen bovendien $(2m+1)\mu > \frac{\pi a}{2}$ dicht genoeg bij $\frac{\pi a}{2}$ nemen. Bijgevolg kan de voorwaarde van de eerste som vervangen worden door

$$|\arg(z) + 2\pi n| \leq \frac{\pi a}{2}.$$

De tweede som kan worden geschreven als

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-m}^m \left(\sum_{k=1}^p \frac{z^{\frac{-k}{2m+1}} \exp\left(\frac{-ki2\pi n}{2m+1}\right)}{\Gamma(b - \frac{ak}{2m+1})} + O(|z|^{\frac{-1-p}{2m+1}}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^p \left(\frac{z^{\frac{-k}{2m+1}}}{\Gamma(b - \frac{ak}{2m+1})} \sum_{n=-m}^m \left(\exp\left(\frac{-ki2\pi n}{2m+1}\right) \right) \right) + O(|z|^{\frac{-1-p}{2m+1}}). \end{aligned}$$

Wegens het bewijs van Stelling 2.7 is de binnenste som steeds nul behalve wanneer $k = 0 \pmod{2m+1}$. Dan wordt de som

$$(2m+1) \sum_{k=1}^p \left(\frac{z^{-k}}{\Gamma(b - ak)} \right) + O(|z|^{-1-p}).$$

Dan volgt de expansie

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \Omega} \left(z^{1/a} \exp \left(\frac{2\pi n i}{a} \right) \right)^{1-b} \cdot \exp \left(\exp \left(\frac{2\pi n i}{a} \right) z^{1/a} \right) - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(b - ak)} + O(|z|^{-1-p}),$$

voor $\Omega = \{n \in \mathbb{N} : |\arg(z) + 2\pi n| \leq \frac{\pi a}{2}\}$. ■

3

De multinomiale Mittag-Lefflerfunctie

De Mittag-Lefflerfunctie van twee parameters kent vele uitbreidingen, naar meerdere parameters en/of meerdere variabelen. We bespreken de volgende interessante uitbreiding naar een multi-variabele en multi-index variant op de Mittag-Lefflerfunctie. We zullen ook enkele eigenschappen uit Hoofdstuk 2 kunnen veralgemenen naar deze versie. We sluiten af met een veralgemening van de schatting uit Stelling 2.15 die cruciaal is bij het regulariteitsonderzoek van oplossingen van fractionele diffusievergelijkingen van meerdere termen.

We introduceren de uitbreiding van de Mittag-Lefflerfunctie naar meerdere variabelen en multi-index, de zogenaamde multinomiale Mittag-Lefflerfunctie.

Definitie 3.1 (Multinomiale Mittag-Lefflerfunctie). Stel $a_j, b \in \mathbb{R}$ voor $(j = 1, \dots, m)$. Dan wordt de multinomiale Mittag-Lefflerfunctie gedefinieerd als de functie in de complexe veranderlijken $z_j \in \mathbb{C}$:

$$E_{(a_1, \dots, a_m), b}(z_1, \dots, z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_m = k} \frac{(k; k_1, \dots, k_m) \prod_{j=1}^m z_j^{k_j}}{\Gamma(b + \sum_{j=1}^m a_j k_j)}.$$

Hierbij veronderstellen we steeds dat $k_j \geq 0$ voor $j = 0, 1, \dots, m$ en gebruiken de multinomiaal coëfficiënt

$$(k; k_1, \dots, k_m) := \frac{k!}{k_1! \dots k_m!}$$

voor natuurlijke getallen k_j .

De volgende twee stellingen uit het artikel [6] veralgemenen al bekende eigenschappen van de Mittag-Lefflerfunctie naar de multinomiale variant.

De reeds geziene identiteit (2.2)

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{\Gamma(b)} + zE_{a,b+a}(z),$$

kan worden uitgebreid voor de multinomiale Mittag-Lefflerfunctie.

Stelling 3.2. Stel $a_j, b \in \mathbb{R}$ met $0 < a_j < 1$ en $0 < b < 2$ ($j = 1, \dots, m$). Dan geldt voor vaste $z_j \in \mathbb{C}$:

$$E_{(a_1, \dots, a_m), b}(z_1, \dots, z_m) = \frac{1}{\Gamma(b)} + \sum_{j=1}^m z_j E_{(a_1, \dots, a_m), b+a_j}(z_1, \dots, z_m).$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^m z_j E_{(a_1, \dots, a_m), b+a_j}(z_1, \dots, z_m) \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_m=k} \frac{(k; k_1, \dots, k_m) z_j \prod_{l=1}^m z_l^{k_l}}{\Gamma(b+a_j+\sum_{l=1}^m a_l k_l)} \\
 &\stackrel{2)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m \left(\frac{z_j^k (1 \dots z_j \dots 1)}{\Gamma(b+a_j+a_j k)} + \sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=k \\ k_j < k}} \frac{(k; k_1, \dots, k_m) z_j \prod_{l=1}^m z_l^{k_l}}{\Gamma(b+a_j+\sum_{l=1}^m a_l k_l)} \right) \\
 &\stackrel{3)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m \left(\frac{z_j^{k+1}}{\Gamma(b+a_j(k+1))} + \sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=k+1 \\ k_j < k+1}} \frac{(k; k_1, \dots, k_{j-1}, k_j-1, k_{j+1}, \dots, k_m) z_j z_j^{-1} z_j^{k_j} \prod_{l \neq j} z_l^{k_l}}{\Gamma(b+a_j-a_j+\sum_{l=1}^m a_l k_l)} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m \left(\frac{z_j^{k+1}}{\Gamma(b+a_j(k+1))} + \sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=k+1 \\ k_j < k+1}} \frac{(k; k_1, \dots, k_{j-1}, k_j-1, k_{j+1}, \dots, k_m) \prod_{l=1}^m z_l^{k_l}}{\Gamma(b+\sum_{l=1}^m a_l k_l)} \right) \\
 &\stackrel{5)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m \frac{z_j^{k+1}}{\Gamma(b+a_j(k+1))} + \sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=k+1 \\ k_l < k+1}} \frac{(k+1; k_1, \dots, k_m) \prod_{l=1}^m z_l^{k_l}}{\Gamma(b+\sum_{l=1}^m a_l k_l)} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_m=k+1} \frac{(k+1; k_1, \dots, k_m) \prod_{l=1}^m z_l^{k_l}}{\Gamma(b+\sum_{l=1}^m a_l k_l)} \\
 &\stackrel{7)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_m=k} \frac{(k; k_1, \dots, k_m) \prod_{l=1}^m z_l^{k_l}}{\Gamma(b+\sum_{l=1}^m a_l k_l)} \\
 &= E_{(a_1, \dots, a_m), b}(z_1, \dots, z_m) - \frac{1}{\Gamma(b)}.
 \end{aligned}$$

In de tweede gelijkheid halen we het geval $k_j = k$ uit de binnenste som. In de derde gelijkheid voeren we de transformatie $k_j \rightarrow k_j - 1$ uit in de binnenste som zodat de conditie in de sommatie verandert naar $0 < k_j < k+1$ en $k_1 + \dots + k_m = k+1$. In de vijfde gelijkheid wordt de som $\sum_{j=1}^m$ binnen de haakjes gebracht en gebruiken we de identiteit

$$\sum_{j=1}^m (k-1; k_1, \dots, k_{j-1}, k_j-1, k_{j+1}, \dots, k_m) = (k; k_1, \dots, k_m).$$

In de zevende gelijkheid vervangen we de index $k+1$ door k . ■

De Mittag-Lefflerfunctie komt expliciet naar voren in de oplossingen van fractionele diffusie vergelijkingen. Bij fractionele diffusievergelijkingen met één term is dat de Mittag-Lefflerfunctie met twee parameters en geldt de begrenzing uit Stelling 2.15 voor $a < 2$, $b \in \mathbb{C}$ en $\frac{\pi a}{2} < \mu < \min(\pi, \pi a)$:

$$\begin{aligned}
 |E_{a,b}(z)| &\leq \frac{C}{1+|z|} \\
 (\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi), \quad |z| &\geq 0,
 \end{aligned}$$

die essentieel is om het gedrag van zijn oplossingen te beschrijven (de regulariteit).

Bij de fractionele diffusievergelijkingen van meerdere termen komt de multinomiale Mittag-Leffler functie expliciet voor in haar oplossing. Bovenstaande begrenzing kan veralgemeend worden voor de multinomiale Mittag-Leffler functie voor $a \in (0, 1)$ en $b \in (0, 2)$.

Stelling 3.3. *Stel $a_j, b \in \mathbb{R}$ met $0 < a_m < \dots < a_1 < 1$ en $0 < b < 2$. Veronderstel dat $\frac{\pi a_1}{2} < \varphi < \pi a_1$, met $\varphi < |\arg(z_1)| \leq \pi$ en dat er een $K > 0$ bestaat zodat $-K \leq z_j < 0$ voor $(j = 2, \dots, m)$. Dan bestaat een positieve constante C die enkel afhangt van φ, K, b en a_j ($j = 1, \dots, m$) zodat*

$$|E_{(a_1, a_1 - a_2, \dots, a_1 - a_m), b}(z_1, \dots, z_m)| \leq \frac{C}{1 + |z_1|}.$$

Bewijs. We noteren voor de leesbaarheid

$$E_{\mathbf{a}, b}(z_1, \dots, z_m) := E_{(a_1, a_1 - a_2, \dots, a_1 - a_m), b}(z_1, \dots, z_m).$$

We gebruiken de contourintegraal-voorstelling van $1/\Gamma(z)$ uit Stelling 1.10 toegepast met de parameter $a_1 < 1$:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i a_1} \int_{\gamma(R, \mu)} \exp(u^{1/a_1}) u^{(1-z-a_1)/a_1} du \quad \left(a_1 < 2, \frac{\pi a_1}{2} < \mu < \min(\pi, \pi a_1) \right).$$

We gebruiken de contour $\gamma(R, \mu) = \{u \in \mathbb{C} : |u| = R, |\arg(u)| \leq \mu\} \cup \{u \in \mathbb{C} : |u| > R, \arg(u) = \pm\mu\}$, een hoek φ zodat $\frac{\pi a_1}{2} < \mu < \varphi$ en een constante R die nog te bepalen is. Aangezien $0 < a_1 < 1$ geldt er $\frac{\pi a_1}{2} < \mu < \pi a_1$.

Deze integraalrepresentatie substitueren we vervolgens in de definitie van de multinomiale Mittag-Lefflerfunctie:

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{a}, b}(z_1, \dots, z_m) &= \frac{1}{2\pi i a_1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_m = k} (k; k_1, \dots, k_m) \prod_{j=1}^m z_j^{k_j} \\ &\quad \times \int_{\gamma(R, \mu)} \exp(u^{1/a_1}) u^{(1-b-a_1 k_1 - \sum_{j=2}^m (a_1 - a_j) k_j - a_1)/a_1} du \\ &= \frac{1}{2\pi i a_1} \int_{\gamma(R, \mu)} \exp(u^{1/a_1}) u^{(1-b)/a_1 - 1} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1 + \dots + k_m = k} (k; k_1, \dots, k_m) \left(\frac{z_1}{u} \right)^{k_1} \prod_{j=2}^m \left(\frac{z_j}{u^{1-a_j/a_1}} \right)^{k_j} \right) du \\ &= \frac{1}{2\pi i a_1} \int_{\gamma(R, \mu)} \exp(u^{1/a_1}) u^{(1-b)/a_1 - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z_1}{u} + \sum_{j=2}^m \frac{z_j}{u^{1-a_j/a_1}} \right)^k du. \end{aligned}$$

In de tweede gelijkheid gebruiken we dat

$$\begin{aligned} u^{(1-b-a_1 k_1 - \sum_{j=2}^m (a_1 - a_j) k_j - a_1)/a_1} &= u^{(1-b)/a_1 - 1} \cdot \frac{1}{u^{k_1 + \dots + k_m}} \cdot \frac{1}{u^{(-a_2 k_2 - \dots - a_m k_m)/a_1}} \\ &= u^{(1-b)/a_1 - 1} \cdot \left(\frac{1}{u} \right)^{k_1} \prod_{j=2}^m \left(\frac{1}{u} \right)^{k_j} \cdot \prod_{j=2}^m \frac{1}{u^{-a_j k_j/a_1}} \\ &= u^{(1-b)/a_1 - 1} \cdot \left(\frac{1}{u} \right)^{k_1} \cdot \prod_{j=2}^m \left(\frac{1}{u^{1-a_j/a_1}} \right)^{k_j}. \end{aligned}$$

en in de laatste gelijkheid wordt de multinomiaalstelling

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + \cdots + k_m = n \\ k_1, \dots, k_m \geq 0}} (n; k_1, \dots, k_m) \prod_{i=1}^m x_i^{k_i}$$

toegepast op hetgene in de binnenste haakjes.

Om convergentie van de meetkundige reeks over k te garanderen, is het nodig dat

$$\left| \frac{z_1}{u} + \sum_{j=2}^m \frac{z_j}{u^{1-a_j/a_1}} \right| < 1, \quad \forall u \in \gamma(R, \mu).$$

Aangezien $-K \leq z_j < 0$ voor $(j = 2, \dots, m)$ geldt voor die indices dat $|z_j| \leq K$. We kunnen de begrenzing bereiken door R goed te kiezen. We hebben dat

$$\left| \frac{z_1}{u} + \sum_{j=2}^m \frac{z_j}{u^{1-a_j/a_1}} \right| \leq \frac{|z_1|}{R} + K \sum_{j=2}^m \frac{R^{a_j/a_1}}{R} = \frac{1}{R} \left(|z_1| + K \sum_{j=2}^m R^{a_j/a_1} \right)$$

zodat de keuze

$$R > |z_1| + K \sum_{j=2}^m R^{a_j/a_1}$$

de convergentie verzekert. Merk op dat we steeds zo een R kunnen vinden. Inderdaad er geldt dat $a_j/a_1 \in (0, 1)$ en zo domineert R de som $\sum_{j=2}^m R^{a_j/a_1}$ voor groot genoeg R . We willen echter een constante die niet afhangt van de variabele z_1 . Door de extra voorwaarde $|z_1| \leq K$ kunnen we R dan kiezen als

$$R > K + K \sum_{j=2}^m R^{a_j/a_1}$$

zodat de constante enkel afhangt van K en a_j voor $(j = 1, \dots, m)$.

Met deze keuze van R en $|z_j| \leq K$ voor $(j = 1, \dots, m)$ convergeert de meetkundige reeks naar

$$\left(1 - \frac{z_1}{u} - \sum_{j=2}^m \frac{z_j}{u^{1-a_j/a_1}} \right)^{-1} = \frac{u}{u - z_1 - \sum_{j=2}^m z_j u^{a_j/a_1}}$$

en er volgt

$$E_{\mathbf{a},b}(z_1, \dots, z_m) = \frac{1}{2\pi i a_1} \int_{\gamma(R, \mu)} \frac{\exp(u^{1/a_1}) u^{(1-b)/a_1}}{u - z_1 - \sum_{j=2}^m z_j u^{a_j/a_1}} du. \quad (3.1)$$

Fixeer nu $z_2, \dots, z_m$ als (negatieve) begrensde constanten zodat beide leden van (3.1) enkel in functie van z_1 zijn. Bovendien is (3.1) geldig over het gesloten gebied $D = \{z_1 \in \mathbb{C} : |z_1| \leq K\}$. Via analytische verderzetting kunnen we dit gebied uitbreiden naar een gebied inclusief $\{z_1 \in \mathbb{C} : \varphi < |\arg(z_1)| \leq \pi\}$, omdat het rechterlid van (3.1) holomorf blijft in dat gebied en de bijhorende waarde samenvalt met de oorspronkelijke waarde voor gebied D .

Nu onderscheiden we twee gevallen: $|z_1| > R$ en $|z_1| \leq R$.

Beschouw eerst het gebied $|z_1| > R$. De curve $u - \sum_{j=2}^m z_j u^{a_j/a_1}$ bevindt zich aan de rechterzijde van de contour $\gamma(R, \mu)$ aangezien $z_j < 0$ en $a_j < a_1$ voor $(j = 2, \dots, m)$. Dit betekent dat

$$\min_{u \in \gamma(R, \mu)} \left| -z_1 + u - \sum_{j=2}^m z_j u^{a_j/a_1} \right| \geq \min_{u \in \gamma(R, \mu)} |u - z_1| \geq |z_1| \sin(\varphi - \mu).$$

Zo krijgen we de afschatting

$$\begin{aligned} |E_{\mathbf{a},b}(z_1, \dots, z_m)| &\leq \frac{1}{2\pi a_1} \left| \int_{\gamma(R, \mu)} \frac{\exp(u^{1/a_1}) u^{(1-b)/a_1}}{u - z_1 - \sum_{j=2}^m z_j u^{a_j/a_1}} du \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi a_1 \sin(\varphi - \mu)} \int_{\gamma(R, \mu)} |\exp(u^{1/a_1})| |u^{(1-b)/a_1}| |du| \right) \cdot \frac{1}{|z_1|}. \end{aligned}$$

Op het begrensde stuk $\{u \in \mathbb{C} : |u| = R, |\arg(u)| \leq \mu\}$ van de contour is $|\exp(u^{1/a_1})| |u^{(1-b)/a_1}|$ continu, dus is de integraal begrensd op dat stuk. Merk op dat

$$|\exp(u^{1/a_1})| = \exp(|u|^{1/a_1} \cos(\mu/a_1)).$$

Voor de onbegrensde stukken $\{u \in \mathbb{C} : |u| > R, |\arg(u)| = \pm\mu\}$ van de contour, convergeert de integraal omdat $\cos(\mu/a_1) < 0$ en de convergenie wordt gegarandeerd door exponentiële afname.

Bijgevolg bestaat er een constante $C_1 \geq 0$ zodat

$$|E_{\mathbf{a},b}(z_1, \dots, z_m)| \leq \frac{C_1}{|z_1|}, \quad \varphi \leq |\arg(z_1)| \leq \pi, \quad |z_1| > R.$$

Merk op dat als $f(x) = \frac{1+x}{x}$ voor $x \in [R, +\infty[$ en $f(R)$ eindig, $f(\infty) = 1$ en $f' < 0$ dan $|f(x)| \leq \frac{1+R}{R}$. Dit geldt duidelijk voor $f(|z_1|) = \frac{1+|z_1|}{|z_1|}$ mits $|z_1| > R$. Hiermee vinden we dan de juiste afschatting

$$|E_{\mathbf{a},b}(z_1, \dots, z_m)| \leq \frac{C_1}{|z_1|} = \frac{C_1}{1+|z_1|} \frac{1+|z_1|}{|z_1|} \leq \frac{C_1}{1+|z_1|} \frac{1+R}{R} =: \frac{C'}{1+|z_1|}.$$

voor een $C' > 0$.

Voor het gebied $|z_1| \leq R$ berekenen we

$$\begin{aligned} |E_{\mathbf{a},b}(z_1, \dots, z_m)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_m=k} \frac{(k; k_1, \dots, k_m) \prod_{j=1}^m z_j^{k_j}}{\Gamma(b + a_1 k - \sum_{j=2}^m a_j k_j)} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_m=k} \frac{(k; k_1, \dots, k_m) \prod_{j=1}^m |z_j^{k_j}|}{\Gamma(b + a_1 k - \sum_{j=2}^m a_j k_j)}. \end{aligned}$$

We tonen nu de volgende begrenzing aan:

$$\frac{1}{\Gamma(b + a_1 k - \sum_{j=2}^m a_j k_j)} \leq \frac{\max\{1, \frac{b}{(a_1 - a_2)} + 1\}}{\Gamma(b + (a_1 - a_2)k)}. \quad (3.2)$$

Merk eerst op dat

$$\sum_{j=2}^m a_j k_j \leq a_2 \sum_{j=2}^m k_j \leq a_2 k$$

zodat

$$b + a_1 k - \sum_{j=2}^m a_j k_j \geq b + (a_1 - a_2)k > 0.$$

Als $k = 0$ geldt (3.2) triviaal. Stel nu $k \geq 1$ en beschouw het geval waar $b + (a_1 - a_2)k \geq 1$. Aangezien $\Gamma(x)$ monotoon stijgend is voor $x \geq 1$ volgt $\Gamma\left(b + a_1 k - \sum_{j=2}^m a_j k_j\right) > \Gamma(b + (a_1 - a_2)k)$ en de begrenzing geldt. Als $b + (a_1 - a_2)k < 1$, maken we de volgende afschatting met behulp van Stelling 1.2 en het vorig geval

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(b + (a_1 - a_2)k)}{\Gamma\left(b + a_1 k - \sum_{j=2}^m a_j k_j\right)} &= \frac{\Gamma(b + 1 + (a_1 - a_2)k)}{\Gamma\left(b + 1 + a_1 k - \sum_{j=2}^m a_j k_j\right)} \cdot \frac{b + a_1 k - \sum_{j=2}^m a_j k_j}{b + (a_1 - a_2)k} \\ &\leq \frac{b + a_1 k - \sum_{j=2}^m a_j k_j}{b + (a_1 - a_2)k} \leq \frac{b + a_1 k}{b + (a_1 - a_2)k} \\ &\leq \frac{b}{(a_1 - a_2)k} + 1 \\ &\leq \frac{b}{a_1 - a_2} + 1. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de begrenzing (3.2) direct. We hebben tot dusver voor $C_2 := \max\{1, \frac{b}{(a_1 - a_2)} + 1\}$, $|z_1| \leq R$ en $|z_j| \leq K$ voor $(j = 2, \dots, m)$ dat

$$\begin{aligned} |E_{\mathbf{a},b}(z_1, \dots, z_m)| &\leq C_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_m = k} \frac{(k; k_1, \dots, k_m) \prod_{j=1}^m |z_j^{k_j}|}{\Gamma(b + (a_1 - a_2)k)} \\ &= C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(b + (a_1 - a_2)k)} \left(\sum_{j=1}^m |z_j| \right)^k \\ &\leq C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(R + (m-1)K)^k}{\Gamma(b + (a_1 - a_2)k)} \\ &= C_2 \cdot E_{a_1 - a_2, b}(R + (m-1)K) =: C_3. \end{aligned}$$

Hierbij hebben we de multinomiaalstelling gebruikt. Om de bekomen begrenzing in de gewenste vorm te brengen doen we het volgende

$$C_3 = \frac{C_3}{1 + |z_1|} (1 + |z_1|) \leq \frac{C_3}{1 + |z_1|} (1 + R)$$

Neem nu $C := \max\{C', C_3(1 + R)\}$ en dan bekomen we uiteindelijk

$$|E_{\mathbf{a},b}(z_1, \dots, z_m)| \leq \frac{C}{1 + |z_1|}.$$

■

Met het artikel [7] kunnen we deze stelling verder uitbreiden naar $a_1 \in (0, 2)$ en $b > 0$.

Stelling 3.4. *Stel $a_j, b \in \mathbb{R}$ met $0 < a_m < \dots < a_1 < 2$ en $b > 0$. Veronderstel dat $\frac{\pi a_1}{2} < \varphi < \min(\pi a_1, \pi)$, $\varphi < |\arg(z_1)| \leq \pi$ en dat er een $K > 0$ bestaat zodat $-K \leq z_j < 0$ voor $(j = 2, \dots, m)$. Dan bestaat er een positieve constante C die enkel afhangt van φ, K, b en a_j ($j = 1, \dots, m$) zodat*

$$|E_{(a_1, \dots, a_m), b}(z_1, \dots, z_m)| \leq \frac{C}{1 + |z_1|}.$$

Bewijs. Het bewijs verloopt redelijk analoog aan vorige stelling, mits enkele nodige aanpassingen wegens dat $a_1 \in (0, 2)$ en $b > 0$. De integraalrepresentatie uit Stelling 1.10 is nog steeds toepasbaar aangezien $a_1 < 2$ en $\frac{\pi a_1}{2} < \mu < \min(\pi, \pi a_1)$. We vullen de integraalvoorstelling in de definitie van de Mittag-Lefflerfunctie in, maar maken nu een andere schikking van het integrandum zodanig dat alle machten van u onafhankelijk van k buiten de sommaties staan en gebruiken de multinomiaalstelling

$$\begin{aligned} E_{(a_1, \dots, a_m), b}(z_1, \dots, z_m) &= \frac{1}{2\pi i a_1} \int_{\gamma(R, \mu)} \exp(u^{1/a_1}) u^{\frac{1-b}{a_1}-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_m=k} (k; k_1, \dots, k_m) \\ &\quad \times \prod_{j=1}^m z_j^{k_j} u^{-\sum_{j=1}^m \frac{a_j}{a_1} k_j} du \\ &= \frac{1}{2\pi i a_1} \int_{\gamma(R, \mu)} \exp(u^{1/a_1}) u^{\frac{1-b}{a_1}-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z_1}{u} + \sum_{j=1}^m z_j u^{-a_j/a_1} \right)^k du. \end{aligned}$$

Voorheen hadden we $a_j/a_1 \in (0, 1)$ dus kunnen we nu $1 - \frac{a_j}{a_1} \in (0, 1)$ nemen en hebben zo de voorwaarde

$$R > |z_1| + K \sum_{j=2}^m R^{1-\frac{a_j}{a_1}}$$

opdat de reeks convergeert. Wanneer voor $j = 1, \dots, m$ geldt dat $|z_j| \leq K$ kunnen we R kiezen als

$$R > K + K \sum_{j=2}^m R^{1-\frac{a_j}{a_1}}$$

zodanig dat die enkel afhangt van K en a_j . Met die keuze bekomen we

$$E_{(a_1, \dots, a_m), b}(z_1, \dots, z_m) = \frac{1}{2\pi i a_1} \int_{\gamma(R, \mu)} \frac{\exp(u^{1/a_1}) u^{(1-b)/a_1}}{u - z_1 - \sum_{j=2}^m z_j u^{1-a_j/a_1}} du.$$

De begrenzing voor het gebied $|z_1| > R$ en $\varphi < |\arg(z_1)| < \pi$ verloopt geheel analoog als het vorig bewijs. Voor het gebied $|z_1| \leq R$ met $\varphi < |\arg(z_1)| < \pi$ hebben we

$$|E_{(a_1, \dots, a_m), b}(z_1, \dots, z_m)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_m=k} \frac{(k; k_1, \dots, k_m) \prod_{j=1}^m |z_j^{k_j}|}{\Gamma(b + \sum_{j=1}^m a_j k_j)}.$$

We tonen nu met een zeer gelijkaardige redenering aan dat voor $k \geq 0$

$$\frac{1}{\Gamma\left(b + \sum_{j=1}^m a_j k_j\right)} \leq \frac{\max\{1, \frac{b+a_1}{a_m}\}}{\Gamma(b + a_m k)}$$

Als $k = 0$ geldt dit duidelijk, dus stel nu $k \geq 1$. Voor het geval $b \geq 1$ hebben we dat

$$\Gamma\left(b + \sum_{j=1}^m a_j k_j\right) > \Gamma(b + a_m k)$$

omdat $\Gamma(x)$ stijgend monotoon is voor $x \geq 1$, en dan volgt het gestelde. Wanneer $0 < b < 1$ gebruiken we analoog aan vorig bewijs, Stelling 1.2 en vinden dat

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(b + a_m k)}{\Gamma\left(b + \sum_{j=1}^m a_j k_j\right)} &= \frac{\Gamma(b + 1 + a_m k)}{\Gamma\left(b + 1 + \sum_{j=1}^m a_j k_j\right)} \cdot \frac{b + \sum_{j=1}^m a_j k_j}{b + a_m k} \\ &\leq \frac{b + \sum_{j=1}^m a_j k_j}{b + a_m k} = \frac{b}{b + a_m k} + \frac{\sum_{j=1}^m a_j k_j}{b + a_m k} \\ &\leq \frac{b}{a_m k} + \frac{a_1}{a_m} \leq \frac{b + a_1}{a_m}. \end{aligned}$$

Met deze begrenzing krijgen we verder

$$\begin{aligned} |E_{(a_1, \dots, a_m), b}(z_1, \dots, z_m)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_m = k} (k; k_1, \dots, k_m) \frac{\prod_{j=1}^m |z_j|^{k_j} \max\{1, \frac{b+a_1}{a_m}\}}{\Gamma(b + a_m k)} \\ &\leq \max\{1, \frac{b + a_1}{a_m}\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(b + a_m k)} \left(\sum_{j=1}^m |z_j|\right)^k \\ &\leq \max\{1, \frac{b + a_1}{a_m}\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(R + (m-1)K)^k}{\Gamma(b + a_m k)} \\ &\leq \max\{1, \frac{b + a_1}{a_m}\} \cdot E_{a_m, b}(R + (m-1)K) =: C_1. \end{aligned}$$

Met dit resultaat volgt de rest van het bewijs volledig analoog. ■

Lijst van figuren

1.1	De Hankel contour C	7
1.2	De contour L	9
1.3	De contour H	12
1.4	De contour $\gamma(\varepsilon, \varphi)$	13
1.5	De transformatie van H naar $\gamma(\varepsilon, \varphi)$	13

Referentielijst

- [1] I. Podlubny. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Deel 198. elsevier, 1998, p. 1–37.
- [2] H. Vernaeve. *Complexe Analyse*. Cursusnota's, Universiteit Gent. Academiejaar 2023-2024.
- [3] H. Vernaeve. *Analyse II*. Cursusnota's, Universiteit Gent. Academiejaar 2022-2023.
- [4] P. V. Mieghem. *The Mittag-Leffler function*. 2021. arXiv: 2005.13330 [math.FA]. URL: <https://arxiv.org/abs/2005.13330>.
- [5] E. C. Titchmarsh. *The theory of functions*. Oxford University Press, USA, 1939, p. 246–254.
- [6] Z. Li, Y. Liu en M. Yamamoto. “Initial-boundary value problems for multi-term time-fractional diffusion equations with positive constant coefficients”. In: *Applied Mathematics and Computation* 257 (2015), p. 381–397.
- [7] F. Maes en K. Van Bockstal. “Existence and uniqueness of a weak solution to fractional single-phase-lag heat equation”. In: *Fractional Calculus and Applied Analysis* 26.4 (jun 2023), p. 1663–1690. ISSN: 1314-2224. DOI: 10.1007/s13540-023-00177-w. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s13540-023-00177-w>.
- [8] R. Gorenflo e.a. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. Springer, 2020.