

Het oplossen van fractionele differentiaalvergelijkingen

Promotor: Dr. Karel Van Bockstal

Student: Thomas Deneve 02003074 thomas.deneve@ugent.be

Academiejaar: 2022–2023

Bachelorproef ingediend tot het behalen van de academische graad van bachelor in de wiskunde.

De auteur geeft de toelating deze bachelorproef voor consultatie beschikbaar te stellen en delen van de bachelorproef te kopiëren voor persoonlijk gebruik. Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit deze bachelorproef.

Datum:

Handtekening:

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
1.1	Laplacetransformatie	1
1.1.1	Eigenschappen	4
1.1.2	Inverse laplacetransformatie	5
1.2	Gewone homogene lineaire differentiaalvergelijkingen van orde 1 en 2	6
2	Caputo fractionele afgeleide	9
2.1	Gammafunctie	9
2.2	Definitie	11
3	Gewone fractionele differentiaalvergelijkingen	15
3.1	Mittag-Leffler functie	15
3.2	Het geval $0 < \alpha < 1$	18
3.3	Het geval $1 < \alpha < 2$	20
3.4	Discussie	22
	Bibliografie	23
A	Appendix	24
A.1	Gebruikte stellingen	24

1 Inleiding

In dit verslag wordt het oplossen van gewone fractionele differentiaalvergelijkingen met de Caputo fractionele afgeleide D^α bestudeerd. Dit zal meer bepaald gebeuren met behulp van de methode van Laplace. Hiertoe zullen enkele eigenschappen van de laplacetransformatie en de Caputo fractionele afgeleide nodig zijn. Het doel is om oplossingen te vinden van gewone homogene vergelijkingen van de vorm

$$D^\alpha(y)(t) + ay(t) = 0 \quad (a \in \mathbb{R}, t > 0) \quad (1)$$

met $0 < \alpha < 1$ of $1 < \alpha < 2$ en deze te vergelijken met de resultaten van de gewone klassieke differentiaalvergelijkingen

$$y^{(n)}(t) + ay(t) = 0 \quad (a \in \mathbb{R}, t > 0), \quad (2)$$

met $n = 1$ of $n = 2$.

Diethelm (2007) bespreekt algemenere gewone fractionele differentiaalvergelijkingen met Caputo afgeleide. De geïnteresseerde lezer kan daar terecht voor meer informatie.

We beginnen met de laplacetransformatie en eigenschappen van deze transformatie die nuttig zullen blijken om gewone differentiaalvergelijkingen op te lossen. Het oplossen van homogene gewone differentiaalvergelijkingen wordt geïllustreerd in sectie 1.2. De Caputo fractionele afgeleide D^α zal nadien aan bod komen samen met een fundamentele eigenschap om vergelijkingen van de vorm (1) op te lossen met de laplacetransformatie. Vervolgens wordt een uitbreiding van de exponentiële functie e^t bestudeerd: de Mittag-Leffler functie. Met behulp van deze functie berekenen we ten slotte de oplossingen van (1). Deze worden besproken vanaf 3.2.

1.1 Laplacetransformatie

De laplacetransformatie is genoemd naar de Franse wiskundige Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Hij had in zijn werk rond probabiliteitstheorie een gelijkaardige transformatie gebruikt. Daar was de integraalvorm van deze transformatie op natuurlijke wijze uit geëvolueerd. Deze transformatie begon meer gebruikt te worden tijdens en na de tweede wereldoorlog (vooral in de ingenieurswetenschappen). De voordelen van de laplacetransformatie werden benadrukt door Gustav Doetsch, die deze transformatie zijn naam heeft gegeven.

Definitie 1.1.1 (Laplacetransformatie). *De laplacetransformatie is de lineaire transformatie die een lokaal integreerbare functie $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ afbeeldt op*

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Definitie 1.1.2 (Kilbas e.a., 2006). *De convergentie-abscis is gedefinieerd als*

$$\sigma_f = \inf_{z \in \mathbb{C}} \{\Re(z) : \mathcal{L}(f)(z) < \infty\}.$$

Stelling 1.1.1 (Kilbas e.a., 2006). *De laplacetransformatie convergeert voor elk complex getal z met $\Re(z) > \sigma_f$.*

Bewijs. Zij $z_0 \in \mathbb{C}$ met $\Re(z_0) > \sigma_f$.

$$\sigma_f = \inf_{z \in \mathbb{C}} \{\Re(z) : \mathcal{L}(f)(z) < \infty\} \implies (\exists u \in \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{L}(f)(z) < \infty\}) (\sigma_f < \Re(u) < \Re(z_0)).$$

Dan is

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty e^{-z_0 t} f(t) dt \right| &= \left| \int_0^\infty e^{-(z_0-u)t} e^{-ut} f(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^\infty e^{-\Re(z_0-u)t} \cos(\Im(z_0-u)t) e^{-ut} f(t) dt \right| + \left| \int_0^\infty e^{-\Re(z_0-u)t} \sin(\Im(z_0-u)t) e^{-ut} f(t) dt \right| \\ &\leq \max_{t \in [0, +\infty[} |e^{-\Re(z_0-u)t}| \left(\max_{t \in [0, +\infty[} |\cos(\Im(z_0-u)t)| + \max_{t \in [0, +\infty[} |\sin(\Im(z_0-u)t)| \right) \left| \int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt \right| \\ &= 2 \left| \int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt \right| < \infty. \end{aligned}$$

□

Hieronder staan enkele laplacetransformaties van elementaire functies uitgewerkt.

Voorbeeld 1.1.1. Zij $a \in \mathbb{C}$, dan is

$$\mathcal{L}(e^{at})(z) = \int_0^\infty e^{-zt} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{(a-z)t} dt.$$

De laatste integraal convergeert als $\Re(z) > \Re(a)$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{(a-z)t}| &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\Re(a-z)t} = \infty \quad (\Re(z) < \Re(a)) \\ \left| \int_0^\infty e^{(a-z)t} dt \right| &\leq \int_0^\infty e^{\Re(a-z)t} dt = \frac{1}{\Re(z) - \Re(a)} \quad (\Re(z) > \Re(a)) \end{aligned}$$

Dus $\mathcal{L}(e^{at})(z) = \int_0^\infty e^{(a-z)t} dt = \frac{1}{z-a}$ met $\sigma_f = \Re(a)$.

Voorbeeld 1.1.2. Zij $a \in \mathbb{C}$, dan is

$$\mathcal{L}(\sin(at))(z) = \frac{\mathcal{L}(e^{iat} - e^{-iat})}{2i} = \frac{1}{2i(z-ia)} - \frac{1}{2i(z+ia)} = \frac{a}{z^2 + a^2} \quad (\Re(z) > 0).$$

Voorbeeld 1.1.3. Zij $a \in \mathbb{C}$, dan is

$$\mathcal{L}(\sinh(at))(z) = \frac{\mathcal{L}(e^{at} - e^{-at})}{2} = \frac{1}{2(z-a)} - \frac{1}{2(z+a)} = \frac{a}{z^2 - a^2} \quad (\Re(z) > \Re(a)).$$

Voorbeeld 1.1.4. Zij $a \in \mathbb{C}$, dan is

$$\mathcal{L}(\cos(at))(z) = \frac{\mathcal{L}(e^{iat} + e^{-iat})}{2} = \frac{1}{2(z-ia)} + \frac{1}{2(z+ia)} = \frac{z}{z^2 + a^2} \quad (\Re(z) > 0).$$

Voorbeeld 1.1.5. Zij $a \in \mathbb{C}$, dan is

$$\mathcal{L}(\cosh(at))(z) = \frac{\mathcal{L}(e^{at} + e^{-at})}{2} = \frac{1}{2(z-a)} + \frac{1}{2(z+a)} = \frac{z}{z^2 - a^2} \quad (\Re(z) > \Re(a)).$$

Voorbeeld 1.1.6. Zij $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dan is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(1)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} dt = \frac{1}{z} = \frac{k!}{z^{k+1}} \quad (k=0) \\ \mathcal{L}(t^k)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} t^k dt = \frac{k}{z} \int_0^\infty e^{-zt} t^{k-1} dt = \dots = \frac{k!}{z^k} \int_0^\infty e^{-zt} dt = \frac{k!}{z^{k+1}} \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Hierbij convergeert $\mathcal{L}(t^k)(z)$ als $\Re(z) > 0$.

Er zijn ook functies waarvoor de laplacetransformatie niet bestaat.

Voorbeeld 1.1.7. Neem $f(t) = e^{t^2}$, dan is $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-zt} e^{t^2} = \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{-zt} e^{t^2}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\Re(z)t + t^2} = +\infty.$$

Uit de definitie van de laplacetransformatie volgt dus dat $\mathcal{L}(e^{t^2})$ niet convergeert voor elke waarde $z \in \mathbb{C}$.

Nu stelt zich de vraag voor welke functies de laplacetransformatie wel gedefinieerd is. We zullen ons hierbij beperken tot continue functies, omdat we uiteindelijk de laplacetransformatie willen gebruiken voor het zoeken van continue oplossingen van differentiaalvergelijkingen.

Definitie 1.1.3. Een functie $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ is van exponentiële groei op $]0, +\infty[$ als er $a \in \mathbb{R}$ en $M \in \mathbb{R}$ bestaan zodat voor alle $t \in]0, +\infty[$

$$|f(t)| \leq M e^{at}.$$

De volgende stelling geeft een nodige en voldoende voorwaarde waarvoor de laplacetransformatie bestaat.

Stelling 1.1.2. Zij f een continue functie. Dan is f van exponentiële groei op $]0, +\infty[$ als en slechts als $\mathcal{L}(f)(z)$ convergeert. In het bijzonder is $\sigma_f \leq a$.

Bewijs. We bewijzen eerst dat $\mathcal{L}(f)(z)$ convergeert als f van exponentiële groei is. Voor $z \in \mathbb{C}$ hebben we dat

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \right| &\leq \int_0^\infty |e^{-zt} f(t)| dt \leq M \int_0^\infty e^{-\Re(z)t} e^{at} dt \\ &= M \int_0^\infty e^{a - \Re(z)t} dt = \frac{M}{\Re(z) - a}. \end{aligned}$$

Hierbij geldt de laatste gelijkheid als $\Re(z) > a$. Bijgevolg convergeert de laplacetransformatie van f als $\Re(z) > a$ en volgt $\sigma_f \leq a$.

Stel nu dat $\mathcal{L}(f)(z)$ convergeert en f niet van exponentiële groei is, dan is

$$|f(t)| > M e^{at},$$

voor alle $M, a \in \mathbb{R}$. Dus

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{-zt} f(t)| &> \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{-zt} e^{(a+1)t}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^t e^{-i\Im(z)t}| \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \end{aligned}$$

zodat

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-zt} f(t) = \infty.$$

Bijgevolg convergeert de laplacetransformatie niet. Dit is in tegenstrijd met onze onderstelling dat deze wel convergeert. We concluderen dat f van exponentiële groei moet zijn. $\square$

1.1.1 Eigenschappen

Definitie 1.1.4 (Kilbas e.a., 2006). *De Laplace convolutie operator van twee functies op $[0, +\infty[$ wordt gedefinieerd voor $x \in [0, +\infty[$ door :*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) dt$$

Eigenschap 1.1.1 (Kilbas e.a., 2006). *Zij f en g twee continue functies waarvoor f en g van exponentiële groei zijn, dan is*

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}(f)(z) \mathcal{L}(g)(z).$$

Bewijs. We hebben dat

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g)(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zx} \int_0^x f(x-t)g(t) dt dx \\ &= \int_0^{+\infty} g(t) \int_t^{+\infty} e^{-zx} f(x-t) dx dt \end{aligned}$$

Hierbij geldt de laatste gelijkheid door de stelling van Fubini. Door substitutie is

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(t) \int_t^{+\infty} e^{-zx} f(x-t) dx dt &= \int_0^{+\infty} g(t) \int_0^{+\infty} e^{-zu} e^{-zt} f(u) du dt \\ &= \mathcal{L}(f)(z) \mathcal{L}(g)(z). \end{aligned}$$

$\square$

Volgende eigenschap is fundamenteel voor het oplossen van gewone differentiaalvergelijkingen met de laplacetransformatie. We noteren met $f^{(n)}$ de functie die men bekomt na het n keer afleiden van f naar t .

Eigenschap 1.1.2 (Kilbas e.a., 2006). Zij $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n([0, +\infty[)$ van exponentiële groei op $[0, +\infty[$. Dan is ook $f^{(n)}$ van exponentiële groei en is

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}(f) - \sum_{i=0}^{n-1} z^{n-i-1} f^{(i)}(0). \quad (3)$$

Bewijs. Het bewijs verloopt via volledige inductie. Stel dat $n = 1$, dan bestaat $\mathcal{L}(f)$ zodat $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-zt} f(t) = 0$ en

$$\mathcal{L}(f')(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f'(t) dt = [e^{-zt} f(t)]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = f(0) + z \mathcal{L}(f).$$

Nu is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{(n)})(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} f^{(n)}(t) dt \\ &= [e^{-zt} f^{(n-1)}(t)]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^\infty e^{-zt} f^{(n-1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Door de inductiehypothese bestaat $\mathcal{L}(f^{(n-1)})$ en voldoet deze aan (3) zodat $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-zt} f^{(n-1)}(t) = 0$ en dus

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{(n)})(z) &= z \mathcal{L}(f^{(n-1)})(z) - f^{(n-1)}(0) \\ &= z^n \mathcal{L}(f) - \sum_{i=0}^{n-1} z^{n-i-1} f^{(i)}(0). \end{aligned}$$

□

1.1.2 Inverse laplacetransformatie

In deze sectie beperken we ons enkel tot de functies f op $[0, +\infty[$ die een laplacegetransformeerde hebben.

Notatie 1.1.1. De laplacegetransformeerde van een functie f wordt genoteerd als:

$$\tilde{f} := \mathcal{L}(f).$$

Definitie 1.1.5 (Inverse laplacetransformatie, Kilbas e.a., 2006). De inverse laplacetransformatie is voor $x \in [0, +\infty[$ gegeven door:

$$\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f})(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zt} \tilde{f}(z) dz \quad (\gamma = \Re(z) > \sigma_f).$$

De volgende eigenschap kan goed van pas komen voor het berekenen van $f(t)$ als $\tilde{f}(z)$ gekend is.

Eigenschap 1.1.3 (Kilbas e.a., 2006). Voor continue functies f en $\tilde{f}$ geldt er dat de laplacetransformatie en de inverse laplacetransformatie elkaars inverse zijn:

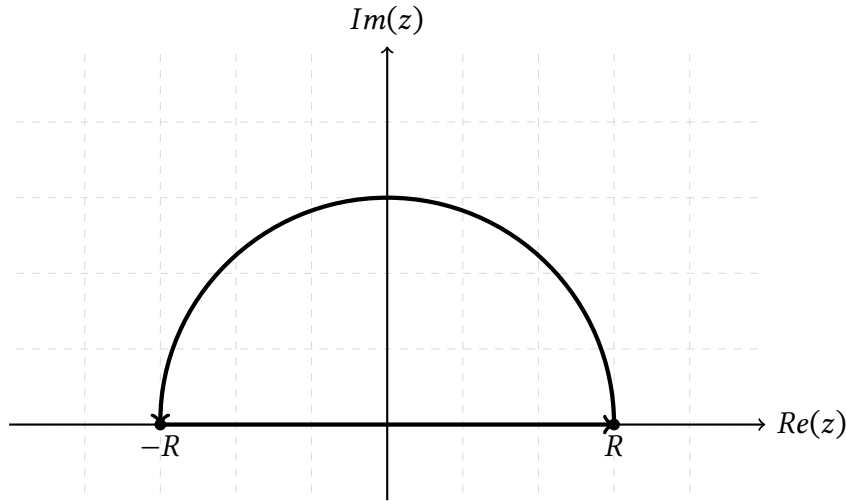
$$\mathcal{L} \mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}) = \tilde{f} \text{ en } \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L}(f) = f.$$

Voorbeeld 1.1.8.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z-a}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{zx}}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\gamma+i\eta)x}}{\gamma-a+i\eta} d\eta$$

$e^{(\gamma+i\eta)x}/(\gamma-a+i\eta)$ heeft een singulier punt $\eta = i(\gamma-a)$. Deze integraal kan nu opgelost worden via contourintegratie met de residustelling (A.1.1). Vermits γ willekeurig gekozen kan worden groter dan σ_f , kunnen we γ groot genoeg nemen zodat dit singulier punt zich in het bovenste halfvlak van het complexe vlak bevindt. Neem dan een stuk contour zoals in figuur 1. Dan zal het stuk contour in $\Im(\eta) > 0$ naar 0 gaan als $R \rightarrow +\infty$ zodat

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\gamma+i\eta)x}}{\gamma-a+i\eta} d\eta = \frac{2\pi i}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow i(\gamma-a)} \left(\frac{(\eta - i(\gamma-a)) e^{(\gamma+i\eta)x}}{\gamma-a+i\eta} \right) = e^{ax}$$



Figuur 1: Contour in het complexe vlak

1.2 Gewone homogene lineaire differentiaalverlijkingen van orde 1 en 2

De methode van Laplace is een methode die kan gebruikt worden om oplossingen te vinden van lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. Het idee is om de laplace-transformatie toe te passen op de differentiaalvergelijking, ervan uitgaande dat de oplossing een laplacegetransformeerde heeft, en gebruik te maken van eigenschap (3). In het geval van gewone homogene differentiaalvergelijkingen weten we dat er lokaal een oplossing bestaat door de stelling van Picard-Lindelöf.

Stelling 1.2.1 (Picard, 1890). Zij $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ een gesloten rechthoek met $(t_0, y_0) \in D$. Zij $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ een functie die continu is in t en Lipschitz-continu in y . Dan bestaat er een $\epsilon > 0$ zodat het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

een unieke oplossing $y(t)$ heeft op het interval $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$.

We zullen deze methode meteen illustreren aan de hand van twee voorbeelden: vergelijking (2) met $n = 1$ en $n = 2$.

Voorbeeld 1.2.1. *Stel dat de volgende eerste orde gewone homogene lineaire differentiaalvergelijking met beginvoorwaarde gegeven is:*

$$\begin{cases} y'(t) + ay(t) = 0 & (a \in \mathbb{R}, t \geq 0) \\ y(0) = A \end{cases} \quad (4)$$

Hier is $f(t, y) = f(y) = -ay$ en voor $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ geldt

$$\|f(y_1) - f(y_2)\| = |a| \|y_1 - y_2\|$$

met $\|\cdot\|$ de euclidische norm, zodat f Lipschitz-continu is in y en continu in t . De stelling van Picard-Lindelöf is hier dus toepasbaar.

Het gebruik van de laplacetransformatie op deze vergelijking levert

$$y'(t) + ay(t) = 0 \iff \mathcal{L}(y')(z) + a\mathcal{L}(y)(z) = 0.$$

Gebruikmakend van eigenschap (3) geeft dan

$$\iff (z + a)\mathcal{L}(y) = y(0)$$

$$\iff \mathcal{L}(y) = \frac{y(0)}{z + a}$$

$$\iff y(t) = A e^{-at}.$$

Hierbij geldt de laatste gelijkheid door het toepassen van $\mathcal{L}^{-1}$ zoals in voorbeeld 1.1.8 of direct uit voorbeeld 1.1.1.

Voorbeeld 1.2.2. *Stel dat een tweede orde gewone homogene lineaire differentiaalvergelijking gegeven is met beginvoorwaarde van de volgende vorm met $b \in \mathbb{R}$ en $t \geq 0$:*

$$\begin{cases} y''(t) + by(t) = 0 \\ y(0) = A \\ y'(0) = B \end{cases} \iff \begin{cases} y'(t) = x(t) \\ x'(t) = -by(t) \\ y(0) = A \\ x(0) = B \end{cases}. \quad (5)$$

Dan is hier $f(x, y) = (x, -by)^\top$ en voor $(x_1, y_1)^\top, (x_2, y_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ is

$$\|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\| = \|(1, -b) \cdot (x_1 - x_2, y_1 - y_2)^\top\| \leq \|(1, -b)\| \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)^\top\|$$

met opnieuw $\|\cdot\|$ de euclidische norm en door gebruik van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz. Dus f is Lipschitz-continu in y en continu in t zodat opnieuw de stelling van Picard-Lindelöf toepasbaar is.

Daarmee is

$$\begin{aligned} y''(t) + by(t) = 0 &\iff \mathcal{L}(y'')(z) + b\mathcal{L}(y)(z) = 0 \\ &\iff \mathcal{L}(y)(z) = \frac{Az + B}{z^2 + b} \end{aligned}$$

Als $b = 0$, dan is

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y)(z) &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} = \mathcal{L}(Bt + A)(z) \\ \implies y(t) &= Bt + A.\end{aligned}$$

Als $b < 0$, dan is $b = -a^2$ met $a > 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y)(z) &= \frac{Az + B}{z^2 - a^2} = \mathcal{L}(A \cosh at)(z) + \mathcal{L}\left(\frac{B \sinh at}{a}\right)(z) \\ \implies y(t) &= A \cosh at + \frac{B \sinh at}{a}.\end{aligned}$$

Dit laatste volgt door gebruik te maken van voorbeelden [1.1.3](#) en [1.1.5](#).

Als $b > 0$, dan is $b = a^2$ met $a > 0$ en

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y)(z) &= \frac{Az + B}{z^2 + a^2} = \mathcal{L}(A \cos at)(z) + \mathcal{L}\left(\frac{B \sin at}{a}\right)(z) \\ \implies y(t) &= A \cos at + \frac{B \sin at}{a}.\end{aligned}$$

Dit laatste volgt door gebruik te maken van voorbeelden [1.1.2](#) en [1.1.4](#).

2 Caputo fractionele afgeleide

In deze sectie starten we met het introduceren van de gammafunctie om er nadien de Caputo fractionele afgeleide mee te definiëren. Daarna worden enkele eigenschappen van de Caputo fractionele afgeleide bestudeerd.

2.1 Gammafunctie

Het probleem van het uitbreiden van de faculteitsfunctie tot niet-gehele getallen werd voor het eerst beschouwd door Daniel Bernoulli en Christian Goldbach in 1720-1730. Leonard Euler ontdekte in 1730 de integraalvorm voor zo een uitbreiding:

$$n! = \int_0^1 (-\ln s)^n ds \quad (\Re(n) > -1)$$

De naam gammafunctie samen met het symbool werden pas in 1809 geïntroduceerd door Adrien-Marie Legendre. Hij heeft de definitie van Euler herschreven in zijn moderne vorm.

Definitie 2.1.1 (Gammafunctie, Legendre, 1809). *De Euler gammafunctie is de functie*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0),$$

waarbij $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$.

Eigenschap 2.1.1 (Kilbas e.a., 2006). *De gammafunctie voldoet aan*

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \quad (\Re(z) > 0).$$

Bewijs. Met partiële integratie:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = [-t^z e^{-t}]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z)$$

Doordat $\Re(z) > 0$, is de eerste term 0 zodat de laatste gelijkheid geldt. □

Gevolg 2.1.1. *Voor $n \in \mathbb{N}$ geldt:*

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Bewijs.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1.$$

Door de vorige eigenschap volgt het gestelde door volledige inductie:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)! = (n-1)!.$$

□

Notatie 2.1.1. Zij $n \in \mathbb{N}$, dan is voor $z \in \mathbb{C}$

$$(z)_n = z(z+1) \cdots (z+n-1).$$

Met deze eigenschap wordt de gammafunctie nu uitgebreid tot het complexe halfvlak $\Re(z) \leq 0$ door hier $\Gamma(z) = \Gamma(z+n)/(z)_n$ te stellen met $-n < \Re(z) < -n+1$.

Met behulp van de gammafunctie kan de uitdrukking uit voorbeeld 1.1.6, met $\Re(z) > 0$, veralgemeend worden naar $k \in \mathbb{C}$:

$$\left| \int_0^\infty e^{-zt} t^k dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-\Re(z)t} t^{\Re(k)} dt = \frac{1}{\Re(z)^{k+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\Re(k)} dt = \frac{\Gamma(\Re(k)+1)}{\Re(z)^{\Re(k)+1}},$$

zodat $\mathcal{L}(t^k)(z)$ convergeert als $\Re(k) > -1$. Bovendien is $f(k) = \int_0^\infty e^{-zt} t^k dt$ holomorf op het gebied $\Re(k) > -1$, omdat voor een vaste $z \in \mathbb{C}$ (met $k = x + iy$, $n \in \mathbb{R}$ en $\Re(z) > 0$)

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty e^{-zt} t^k dt = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_0^\infty e^{-zt} t^{k+1/n} dt - \int_0^\infty e^{-zt} t^k dt \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^\infty e^{-zt} t^k (t^{1/n} - 1) dt.$$

Door de middelwaardestelling is $n(t^{k+1/n} - t^k) = \ln(t) t^{k+\theta/n}$ voor een $\theta \in [0, 1]$.

Nu is $|\ln(t) t^{k+\theta/n}| \leq |t^{k+2}|$, als $n \geq 1$ zodat

$$\left| \int_0^\infty n e^{-zt} t^k (t^{1/n} - 1) dt \right| \leq \int_0^\infty |t^{k+2} e^{-zt}| dt < \infty \quad (\Re(z) > 0, \Re(k) > -1, n \geq 1).$$

Noem $1_{[0,+\infty[}(t)$ de functie waarbij

$$1_{[0,+\infty[}(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}.$$

Wegens de gedomineerde convergentiestelling (A.1.3) met $f_n(t) = n e^{-zt} (t^{k+1/n} - t^k) 1_{[0,+\infty[}(t)$ en $g(t) = t^{\Re(k)+2} e^{-\Re(z)t} 1_{[0,+\infty[}(t)$ mogen afgeleide en integraal verwisseld worden en is

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty e^{-zt} t^k dt = \int_0^\infty e^{-zt} \ln(t) t^k dt = \int_0^\infty -i \frac{\partial}{\partial y} (e^{-zt} t^k) dt = -i \frac{d}{dy} \int_0^\infty e^{-zt} t^k dt.$$

Hierbij geldt de laatste gelijkheid door analoog de gedomineerde convergentiestelling toe te passen. Dus

$$-i \frac{d}{dy} \int_0^\infty e^{-zt} t^k dt = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_0^\infty e^{-zt} t^{k+i/n} dt - \int_0^\infty e^{-zt} t^k dt \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^\infty e^{-zt} t^k (t^{i/n} - 1) dt.$$

Door de middelwaardestelling is $n(t^{k+i/n} - t^k) = i \ln(t) t^{k+i\xi/n}$ voor een $\xi \in [0, 1]$.

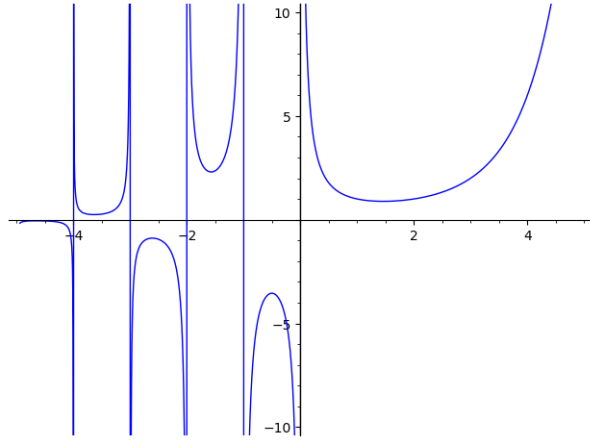
Nu is $|i \ln(t) t^{k+i\xi/n}| \leq |t^{k+1}|$, als $n \geq 1$ zodat

$$\left| \int_0^\infty n e^{-zt} t^k (t^{i/n} - 1) dt \right| \leq \int_0^\infty |t^{k+1} e^{-zt}| dt < \infty \quad (\Re(z) > 0, \Re(k) > -1, n \geq 1).$$

Nu dat $f(k) = \mathcal{L}(t^k)(z)$ bestaat voor $k \in \mathbb{C}$ als $\Re(k) > -1$ en $f(k)$ er holomorf is, moet wegens eenduidigheid voor holomorfe functies en voorbeeld 1.1.6 gelden dat $\mathcal{L}(t^k)(z) = \frac{\Gamma(k+1)}{z^{k+1}}$.

Gevolg 2.1.2. Zij $k \in \mathbb{C}$ met $\Re(k) > -1$, dan is

$$\mathcal{L}(t^k)(z) = \frac{\Gamma(k+1)}{z^{k+1}} \quad (\Re(z) > 0).$$



Figuur 2: Plot van de gammafunctie met $-5 \leq x \leq 5$.

2.2 Definitie

Definitie 2.2.1 (Caputo, 1967). Zij $\alpha \in \mathbb{C}$ zodat $\Re(\alpha) > 0$ en $\alpha \notin \mathbb{N}$, dan kan de Caputo fractionele afgeleide gedefinieerd worden voor $y(t) \in C^n([0, +\infty[)$ met $n = \lceil \Re(\alpha) \rceil$ als

$$D^\alpha(y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x - t)^{\alpha+1-n}} dt \quad (x > 0).$$

We zullen meteen beginnen met de fundamentele eigenschap om (1) op te lossen met de laplacetransformatie.

Eigenschap 2.2.1 (Kilbas e.a., 2006). Zij $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ met $n - 1 < \Re(\alpha) < n$. Zij $y(t) \in C^n([0, +\infty[) \cap C^{n-1}([0, +\infty[)$ met de eigenschap dat $y(t)$ van exponentiële groei is, dan is $D^\alpha(y)(t)$ van exponentiële groei en is

$$\mathcal{L}(D^\alpha(y))(z) = z^\alpha \mathcal{L}(y) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0).$$

Bewijs. Het bewijs is geïnspireerd door de redenering in Podlubny (1998), waarbij de fractionele afgeleide geschreven wordt als een convolutieproduct. Schrijf $\alpha = n - 1 + \theta$ met $0 < \Re(\theta) < 1$, dan is

$$\begin{aligned} D^\alpha(y)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n - (n - 1 + \theta))} \int_0^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x - t)^{n-1+\theta+1-n}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \theta)} \int_0^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x - t)^\theta} dt = D^\theta(y^{(n-1)})(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \theta)} (y^{(n)} * x^{-\theta}) \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}(D^\alpha(y)) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \theta)} \mathcal{L}(y^{(n)})(z) \mathcal{L}(x^{-\theta})(z) \\ &= \frac{1}{z^{1-\theta}} \mathcal{L}(y^{(n)})(z) \\ &= z^\alpha \mathcal{L}(y) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0). \end{aligned}$$

Hierbij wordt gebruik gemaakt van (3) en gevolg (2.1.2). □

Eigenschap 2.2.2 (Podlubny, 1998). Zij $y(t) \in C^{n+1}([0, +\infty[)$. Zij $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ zodat $n - 1 < \alpha < n$.

Dan is

$$\lim_{\alpha \rightarrow n-1} D^\alpha(y)(t) = y^{(n-1)}(t) - y^{(n-1)}(0) \quad (6)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} D^\alpha(y)(t) = y^{(n)}(t) \quad (7)$$

Bewijs. Dan is via partiële integratie

$$\begin{aligned} D^\alpha(y)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{y^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} y^{(n)}(0) t^{n-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_0^t y^{(n+1)}(x) (t-x)^{n-\alpha} dx \end{aligned}$$

Neem $\alpha \rightarrow n$ en $\alpha \rightarrow n-1$, dan wordt dit

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n-1} D^\alpha(y)(t) &= y^{(n-1)}(t) - y^{(n-1)}(0) \\ \lim_{\alpha \rightarrow n} D^\alpha(y)(t) &= y^{(n)}(t) \end{aligned}$$

Doordat de limiet binnen de integraal mag genomen worden door gebruik te maken van de monotone-/gedomineerde convergentiestelling. $y(t) \in C^{n+1}([0, +\infty[)$ betekent dat $|y^{(n+1)}(t)|$ continu is op $[0, t]$ en dus een extremum M bereikt op $[0, t]$. Als $t-1 < x < t$, dan is $(t-x)^{n-\alpha} \leq 1$. Anders is $(t-x)^{n-\alpha} \leq (t-x)^n$. Dan kan men de gedomineerde convergentiestelling gebruiken met

$$f_k(x) = \begin{cases} y^{(n+1)}(x)(t-x)^{n-\alpha_k} & (0 < x < t) \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \quad \text{en} \quad g(x) = \begin{cases} M(t-x)^n & (0 < x \leq t-1) \\ M & (t-1 < x < t) \\ 0 & \text{anders} \end{cases},$$

waarbij in het eerste geval (resp. tweede geval) $(\alpha_k)_k$ een rij is die naar $n-1$ (resp. n) convergeert met $\alpha_0 = \alpha$ en $n-1 < \alpha_k < n$. □

Voorbeeld 2.2.1 (Kilbas e.a., 2006). De Caputo afgeleide voor machtsfuncties:

1. Zij $\alpha \in \mathbb{C}$ met $n-1 < \Re(\alpha) < n$, dan is

$$D^\alpha(1)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{0}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt = 0.$$

Dus de Caputo fractionele afgeleide van een constante is 0. Algemeener geldt voor $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ met $m < n$ dat

$$D^\alpha(t^m)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{0}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt = 0,$$

omdat $\frac{d^n t^m}{dt^n} = 0$.

2. Zij $\alpha, k \in \mathbb{C}$ met $0 < \Re(\alpha) < 1$. Stel dat $\Re(k) > 1$, dan is

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D^\alpha(t^k))(z) &= z^\alpha \mathcal{L}(t^k)(z) = \frac{\Gamma(k+1)}{z^{k-\alpha+1}} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \mathcal{L}(t^{k-\alpha})(z) \\ \implies D^\alpha(t^k)(x) &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha}.\end{aligned}$$

Dit impliceert dat voor $n-1 < \Re(\alpha) < n < \Re(k)$ en $\theta = \alpha - n + 1$

$$\begin{aligned}D^\alpha(t^k)(x) &= D^\theta \left(\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+2)} t^{k-n+1} \right) (x) = \frac{\Gamma(k+1) \Gamma(k-n+2)}{\Gamma(k-n+2) \Gamma(k-n+2-\theta)} x^{k-n+1-\theta} \\ \implies D^\alpha(t^k)(x) &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha}.\end{aligned}$$

Deze laatste gelijkheid kan men intuïtief verwachten aangezien $\frac{d^n}{dx^n} x^k = \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}$ als $k > n$ en $k \in \mathbb{N}$. Met dezelfde intuïtie zou $D^\alpha(e^{\lambda t})(x) = \lambda^\alpha e^{\lambda x}$ voor $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, maar dit blijkt niet het geval te zijn. Stel dat

$$\begin{aligned}D^\alpha(e^{\lambda t})(x) &= \lambda^\alpha e^{\lambda x} \\ \iff \mathcal{L}(D^\alpha(e^{\lambda t}))(z) &= \frac{\lambda^\alpha}{z-\lambda} \quad (\Re(z) > \Re(\lambda)) \\ \iff \frac{z^\alpha}{z-\lambda} - z^{\alpha-1} &= \frac{\lambda^\alpha}{z-\lambda} \quad (\Re(z) > \Re(\lambda))\end{aligned}$$

Als $z = \lambda + 1$, dan staat er

$$\lambda(\lambda+1)^{\alpha-1} = \lambda^\alpha$$

Dit kan duidelijk niet, want dan zou $\lambda+1 = \lambda$.

Men kan $D^\alpha(e^{\lambda t})(x)$ berekenen door de Taylorontwikkeling van $e^{\lambda t}$ te gebruiken en termsgewijs fractioneel af te leiden. Dit mag omdat men termsgewijs kan integreren en afleiden.

$$\begin{aligned}D^\alpha(e^{\lambda t})(x) &= D^\alpha \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} \right) (x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{\lambda^k x^{k-\alpha}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+n} x^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+n+1)}.\end{aligned}$$

Deze reeks kan geschreven worden in termen van een Mittag-Leffler functie. Dit soort functie wordt gedefinieerd in de volgende sectie.

$$D^\alpha(e^{\lambda t})(x) = \lambda^n x^{n-\alpha} E_{1, n+1-\alpha}(\lambda x)$$

3 Gewone fractionele differentiaalvergelijkingen

Eerst introduceren we de Mittag-Leffler functie, nadien worden de oplossingen van de gewone fractionele differentiaalvergelijkingen in de vorm van (1) besproken.

3.1 Mittag-Leffler functie

Definitie 3.1.1 (Mittag-Leffler, 1903).

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (z \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0)$$

is de klassieke Mittag-Leffler functie.

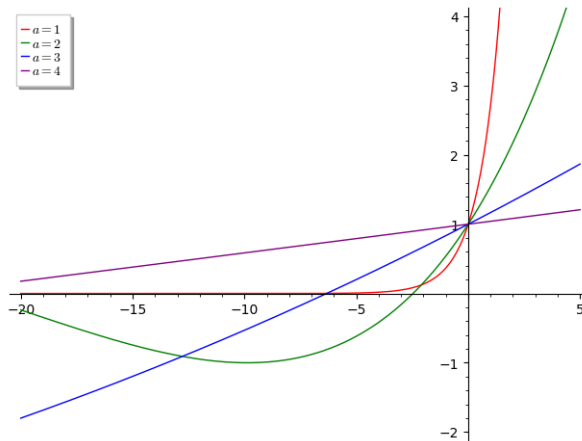
De basiseigenschappen van deze functie werden bestudeerd door Mittag-Leffler en Wiman in 1903-1905.

Definitie 3.1.2 (Wiman, 1905). Een functie f is een Mittag-Leffler type functie als $f(z) = E_{\alpha,\beta}(z)$ met

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (z, \beta \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0)$$

i.h.b. is $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$.

Eigenschappen van deze functie gedefinieerd door Wiman werden pas later onderzocht door Agarwal en Humbert volgens Kilbas e.a., 2006.



Figuur 3: Plot van de klassieke Mittag-Leffler functie $E_a(x)$ met $-20 \leq x \leq 5$.

Voorbeeld 3.1.1.

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z \quad (z \in \mathbb{C})$$

Voorbeeld 3.1.2.

$$E_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+1)} = \cosh \sqrt{z}$$

Voorbeeld 3.1.3.

$$E_2(-z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{\Gamma(2k+1)} = \cos \sqrt{z}$$

Stelling 3.1.1 (Stelling 1.6 in Podlubny, 1998)). Zij $\alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}$. Als $\alpha < 2$ en $\pi\alpha/2 < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$, dan bestaat er een $C \in \mathbb{R}$ zodat

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1+|z|} \quad (\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi \text{ en } |z| \geq 0),$$

In het bijzonder is

$$|E_{\alpha,\beta}(-x)| \leq \frac{C}{1+x} \leq C \quad (x \geq 0).$$

Eigenschap 3.1.1 (Kilbas e.a., 2006). Zij $n \in \mathbb{N}$ en $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$, dan geldt er:

$$\frac{d^n}{dz^n} (z^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda z^n)) = z^{\beta-n-1} E_{n,\beta-n}(\lambda z^n).$$

In het bijzonder geldt dat

$$\frac{d^n}{dz^n} E_n(\lambda z^n) = \lambda E_n(\lambda z^n).$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n} (z^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda z^n)) &= \frac{d^n}{dz^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k z^{nk+\beta-1}}{\Gamma(nk+\beta)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(nk+\beta) \lambda^k z^{nk+\beta-1-n}}{\Gamma(nk+\beta-n)\Gamma(nk+\beta)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k z^{nk+\beta-1-n}}{\Gamma(nk+\beta-n)} = z^{\beta-n-1} E_{n,\beta-n}(\lambda z^n). \end{aligned}$$

Stel nu $\beta = 1$, dan is

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(nk+1) \lambda^k z^{nk-n}}{\Gamma(nk+1-n)\Gamma(nk+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1} z^{nk}}{\Gamma(nk+1)} = \lambda E_n(\lambda z^n).$$

□

Doordat aan deze eigenschap voldaan is, zal $E_n(-\lambda t^n)$ een oplossing zijn van de homogene differentiaalvergelijking

$$y^{(n)}(t) + \lambda y(t) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Deze functie is dus een goede kandidaatoplossing voor deze vergelijking in fractionele vorm (met $n \in \mathbb{R}$). Om dit na te gaan met de methode van Laplace, zal de laplacegetransformeerde van deze functie nodig zijn. We zullen eerst nagaan dat $E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})$ van exponentiële groei is als $0 < \alpha < 2$.

Stel dat $\lambda \in \mathbb{C}$ en $\pi\alpha/2 < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$ willekeurig. Dan weten we uit eigenschap 3.1.1 dat als $\mu \leq |\arg(-\lambda t^\alpha)| \leq \pi$ voor $t \geq 0$

$$E_\alpha(-\lambda t^\alpha) \leq \frac{C}{1 + |\lambda t^\alpha|} \leq C,$$

voor een zekere constante $C \in \mathbb{R}$. Dus dan zal $E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$ van exponentiële groei zijn.

In het geval dat $\arg(-\lambda t^\alpha) \leq \mu$ gebruiken we volgende eigenschap uit Kilbas e.a., 2006.

Eigenschap 3.1.2. Zij $0 < \alpha < 2$ en $\mu \in \mathbb{R}$ met $\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$. Dan bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodat

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \frac{1}{z^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right) \quad (z \in \mathbb{C})$$

als $|z| \rightarrow +\infty$ en $|\arg(z)| \leq \mu$.

Deze eigenschap leert ons dat voor $t \geq 0$

$$E_\alpha(-\lambda t^\alpha) = \frac{1}{\alpha} e^{(-\lambda)^{1/\alpha} t} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha k)} \frac{1}{(-\lambda)^k t^{\alpha k}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(-\lambda)^{N+1} t^{\alpha(N+1)}}\right),$$

als $t \rightarrow +\infty$. We kunnen besluiten dat ook $E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$ van exponentiële groei is als $|\arg(z)| \leq \mu$ en concluderen dat de laplacetransformatie van $E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$ bestaat.

Eigenschap 3.1.3 (Kilbas e.a., 2006). Zij $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ en $\lambda \in \mathbb{C}$, dan is

$$\mathcal{L}(E_\alpha(-\lambda t^\alpha))(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha + \lambda} \quad \left(\Re(z) > 0, \left| \frac{\lambda}{z^\alpha} \right| < 1 \right).$$

Bewijs. Zij $\alpha \in \mathbb{R}$, dan bestaat er een $n \in \mathbb{N}$ zodat $n - 1 \leq \alpha \leq n$ en is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E_\alpha(-\lambda t^\alpha)) &= \int_0^\infty e^{-zt} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\lambda)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty e^{-zt} \frac{(-\lambda)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty e^{-zt} \frac{(-\lambda)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} dt \quad (\Re(z) > 0) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\lambda)^k \mathcal{L}(t^{\alpha k})}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\lambda)^k}{z^{\alpha k + 1}} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \lambda/z^\alpha} \quad \left(\Re(z) > 0, \left| \frac{\lambda}{z^\alpha} \right| < 1 \right) \\ &= \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha + \lambda} \quad \left(\Re(z) > 0, \left| \frac{\lambda}{z^\alpha} \right| < 1 \right). \end{aligned}$$

Hierbij geldt de derde gelijkheid, omdat de convergentie gelijkmatig is. Dit is in te zien door gebruik te maken van de M-test van Weierstrass:

$$g_k(t) = \left| \frac{(-\lambda)^k t^{\alpha k}}{e^{zt} \Gamma(\alpha k + 1)} \right| = \frac{|\lambda|^k t^{\alpha k}}{e^{\Re(z)t} \Gamma(\alpha k + 1)}$$

Nu hebben we met de regel van de l'Hôpital dat wanneer $\Re(z) > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|\lambda|^k t^{\alpha k}}{e^{\Re(z)t} \Gamma(\alpha k + 1)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha k(\alpha k - 1) \cdots (\alpha k - (n-1)k) |\lambda|^k t^{\alpha k - nk}}{\Re(z)^{nk} e^{\Re(z)t} \Gamma(\alpha k + 1)} = 0$$

omdat $\alpha k - nk < 0$. Doordat $g_k(t)$ ook continu is op $[0, +\infty[$ bereikt $g_k(t)$ een maximum $g_k(t_{\max}) = M_k$ op $[0, +\infty[$ en

$$\sum_{k=0}^{+\infty} M_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\lambda|^k t_{\max}^{\alpha k}}{e^{\Re(z)t_{\max}} \Gamma(\alpha k + 1)} = e^{-\Re(z)t_{\max}} E_{\alpha}(|\lambda| t_{\max}^{\alpha}) \in \mathbb{R}.$$

□

Bovenstaande eigenschap is een bijzonder geval van een meer algemeen resultaat over de functie $t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\lambda t^{\alpha})$.

Eigenschap 3.1.4 (Gorenflo en Mainardi, 1997). Zij $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$ en $\lambda \in \mathbb{C}$, dan is

$$\mathcal{L}(t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\lambda t^{\alpha}))(z) = \frac{z^{\alpha-\beta}}{z^{\alpha} - \lambda} \quad (\Re(z) > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}).$$

Eigenschap 3.1.5. Zij $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ en $t > 0$, dan is

$$\frac{d}{dt} E_{\alpha}(-at^{\alpha}) = -at^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-at^{\alpha}).$$

Bewijs. Door termsgewijs af te leiden is

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{\alpha}(-at^{\alpha}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha k \frac{(-a)^k t^{\alpha k - 1}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \\ &= t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha k + \alpha) \frac{(-a)^{k+1} t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \\ &= -at^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \\ &= -at^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-at^{\alpha}). \end{aligned}$$

□

Hieruit merken we op dat $\frac{d}{dt} E_{\alpha}(-at^{\alpha})$ niet gedefinieerd is voor $t = 0$ als $0 < \alpha < 1$.

3.2 Het geval $0 < \alpha < 1$

Beschouw de homogene differentiaalvergelijking

$$\begin{cases} D^{\alpha}(y)(t) + ay(t) = 0 & (a \in \mathbb{R}, t \geq 0), \\ y(0) = A \end{cases} \quad (8)$$

met $0 < \alpha < 1$.

Stelling 3.2.1 (Kilbas e.a., 2006). *De oplossing van (8) wordt gegeven door:*

$$y(t) = A E_\alpha(-at^\alpha).$$

Bewijs. Stel dat $y(t)$ een oplossing is van (8). Door gebruik te maken van de methode van Laplace op deze vergelijking komt er:

$$D^\alpha(y) + ay = 0 \iff \mathcal{L}(D^\alpha(y))(z) + a\mathcal{L}(y) = 0$$

Na het toepassen van eigenschap 2.2.1, komt er

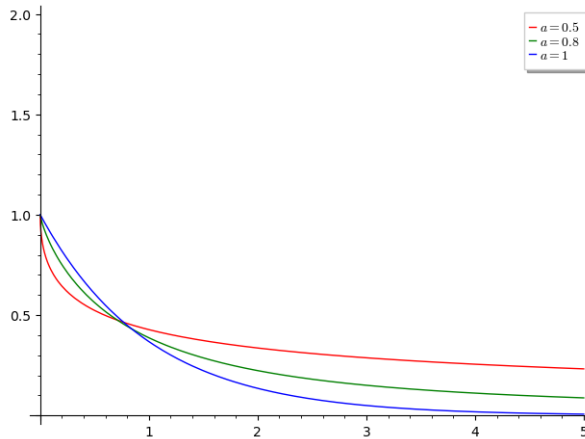
$$\iff \mathcal{L}(y) = \frac{A z^{\alpha-1}}{z^\alpha + a}$$

en met $|a| < |z^\alpha|$ en $\Re(z) > 0$

$$\iff y(t) = A E_\alpha(-at^\alpha).$$

Hierbij moet de laatste gelijkheid gelden wegens 3.1.3 en 1.1.3. □

Dit is ook in overeenstemming met de homogene differentiaalvergelijking (4): als $\alpha \rightarrow 1$, dan zal $y(t) \rightarrow A e^{-at}$ met behulp van voorbeeld 3.1.1. Dit wordt geïllustreerd met onderstaande plot.



Figuur 4: Plot van $y(t) = E_a(-t^a)$, waarbij voor $a < 1$ de reeks na 100 termen wordt afgebroken. In het geval $a = 1$ is $y(t) = e^{-t}$.

De oplossing $y(t)$ van (8) is niet afleidbaar in 0 wegens eigenschap 3.1.5 en het feit dat $E_{\alpha,\alpha}(0) = 1/\Gamma(\alpha)$. Dus $y(t) \in C^1([0, +\infty[)$ in tegenstelling tot de oplossing van de gewone homogene differentiaalvergelijking (4).

3.3 Het geval $1 < \alpha < 2$

Beschouw nu de homogene differentiaalvergelijking

$$\begin{cases} D^\alpha(y)(t) + by(t) = 0 & (b \in \mathbb{R}, t \geq 0), \\ y(0) = A \\ y'(0) = B \end{cases} \quad (9)$$

met $1 < \alpha < 2$.

Stelling 3.3.1 (Kilbas e.a., 2006). *De oplossing van (9) wordt gegeven door:*

$$y(t) = A E_\alpha(-bt^\alpha) + B t E_{\alpha,2}(-bt^\alpha).$$

Bewijs. Stel dat $y(t)$ een oplossing is van (9). Op een analoge manier als in het vorige bewijs krijgt men

$$\begin{aligned} D^\alpha(y) + by &= 0 \iff \mathcal{L}(D^\alpha(y))(z) + b\mathcal{L}(y)(z) = 0 \\ &\iff \mathcal{L}(y)(z) = \frac{Az^{\alpha-1}}{z^\alpha + b} + \frac{Bz^{\alpha-2}}{z^\alpha + b} \end{aligned}$$

Van de eerste term is al geweten dat het de laplacegetransformeerde is van $A E_\alpha(-bt^\alpha)$. Er rest nog aan te tonen dat $\frac{Bz^{\alpha-2}}{z^\alpha + b}$ de laplacegetransformeerde is van $B t E_{\alpha,2}(-bt^\alpha)$. Nu is

$$\begin{aligned} \frac{z^{\alpha-2} B}{z^\alpha + b} &= \mathcal{L}(1)(z) \mathcal{L}(B E_\alpha(-bt^\alpha))(z) = \mathcal{L}(1 * B E_\alpha(-bt^\alpha))(z), \text{ en} \\ (1 * B E_\alpha(-bx^\alpha))(t) &= B \int_0^t E_\alpha(-bx^\alpha) dx \\ &= B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-b^k t^{\alpha k+1}}{\Gamma(\alpha k + 2)} \\ &= B t E_{\alpha,2}(-bt^\alpha). \end{aligned}$$

Waarbij in beide termen van $\mathcal{L}(y)(z)$ geldt dat $|b| \leq |z|^\alpha$. □

Laten we hier α naar 2 naderen. Dan zal

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2} y(t) = A E_2(-bt^2) + B t E_{2,2}(-bt^2).$$

We zullen hier weer een gevalsonderscheid maken om te vergelijken met (5).

1. Stel dat $b < 0$, dan is $b = -a^2$ met $a > 0$. Nu is de eerste term in het rechterlid gelijk aan $A \cosh at$ met voorbeeld 3.1.2. De tweede term wordt

$$B t E_{2,2}(-a^2 t^2) = B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} t^{2k+1}}{\Gamma(2k + 2)} = \frac{B}{a} \sinh at$$

zodat in de limiet voor $\alpha \rightarrow 2$

$$y(t) = A \cosh at + \frac{B}{a} \sinh at.$$

2. Stel dat $b = 0$, dan is de eerste term in het rechterlid $A E_2(0) = A$. De tweede term in het rechterlid is $B t E_{2,2}(0) = B t / \Gamma(2) = B t$, zodat in de limiet voor $\alpha \rightarrow 2$

$$y(t) = B t + A.$$

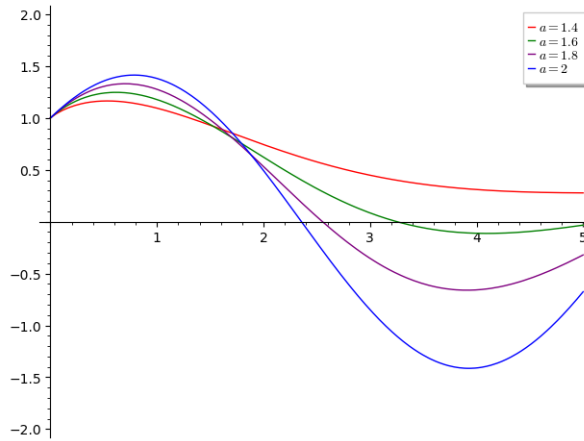
3. Stel dat $b > 0$, dan is $b = a^2$ met $a > 0$. De eerste term in het rechterlid is dus gelijk aan $A \cos at$ met voorbeeld 3.1.3. De tweede term wordt

$$B t E_{2,2}(-a^2 t^2) = B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k} t^{2k+1}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{B}{a} \sin at$$

zodat in de limiet voor $\alpha \rightarrow 2$

$$y(t) = A \cos at + \frac{B}{a} \sin at.$$

Deze oplossing zal dus ook convergeren naar de oplossing van de gewone homogene differentiaalvergelijking in (5). Dit wordt geïllustreerd met volgende plot.



Figuur 5: Plot van $y(t) = E_a(-t^a) + t E_{a,2}(-t^a)$, waarbij voor $1 < a < 2$ de reeksen na 80 termen worden afgebroken. In het geval $a = 2$ is $y(t) = \cos(t) + \sin(t)$.

De oplossing $y(t)$ van de gewone differentiaalvergelijking (9) zal ook niet behoren tot $C^2([0, +\infty[)$: de tweede afgeleide bestaat niet in 0. Dit kan men opnieuw inzien met eigenschap 3.1.5 en door het bijzonder geval te beschouwen dat $B = 0$:

$$\frac{d^2}{dt^2} A E_\alpha(-b t^\alpha) = \frac{d}{dt} (-b A t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-b t^\alpha)) = (1 - \alpha) b A t^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha}(-b t^\alpha) - b A \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha k (-b)^k t^{\alpha k + \alpha - 2}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)},$$

dan zal het rechterlid naar ∞ gaan als t naar 0 nadert.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^2}{dt^2} A E_\alpha(-b t^\alpha) &= (1 - \alpha) b A \lim_{t \rightarrow 0} t^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha}(-b t^\alpha) - b A \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha k (-b)^k t^{\alpha k + \alpha - 2}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \\ &= (1 - \alpha) \frac{b A}{\Gamma(\alpha)} \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} t^{\alpha-2}}_{\rightarrow \infty} - b A \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha k (-b)^k t^{\alpha k + \alpha - 2}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)}}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

3.4 Discussie

De eigenschap dat de oplossingen $y(t)$ van de gewone fractionele differentiaalvergelijking

$$D^\alpha(y)(t) + ay(t) = 0 \quad (a \in \mathbb{R}, t > 0)$$

behoren tot $C^1([0, +\infty[)$ voor $\alpha \in]0, 1[$ en $C^2([0, +\infty[)$ voor $\alpha \in]1, 2[$ is belangrijk in de praktijk voor het ontwikkelen van numerieke methoden. Dit betekent dat numerieke methoden die zijn ontwikkeld voor gewone differentiaalvergelijkingen van orde $n \in \mathbb{N}$ en uitgaan van de eigenschap $y(t) \in C^1([0, +\infty[)$ hier niet toepasbaar zijn. Dit probleem komt ook ter sprake in Diethelm e.a. (2020): "Unfortunately, the scientific literature is rich with examples of methods that are inappropriate for fractional-order problems. In most cases these are just methods that were devised originally for standard integer-order operators then applied in a naive way to their fractional-order counterparts; without a proper knowledge of the specific features of fractional-order problems, researchers are often unable to understand why unexpected results are obtained."

Meer details worden besproken in Diethelm e.a. (2020) en Stynes (2016). Hier worden ook enkele methoden vermeld die wel kunnen gebruikt worden. Bijvoorbeeld een methode, ontwikkeld door de Britse wiskundige Andrew Young in 1954, die veelterminterpolatie gebuikt om Volterra-integraalvergelijkingen numeriek op te lossen kan ook gebruikt worden voor gewone fractionele differentiaalvergelijkingen (Diethelm e.a., 2020). We zien dus dat de oplossingen van gewone fractionele differentiaalvergelijkingen zoals (1) in de limiet naderen naar de oplossingen van (2), maar er toch kleine verschillen optreden waar men moet mee rekening houden in de praktijk.

Bibliografie

- Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent II. Geophys. J. Royal Astronom. Soc.
- Diethelm, K. (2007). Smoothness properties of solutions of Caputo-type fractional differential equations. Fractional Calculus and Applied Analysis, 10(2).
- Diethelm, K., Garrappa, R., & Stynes, M. (2020). Good (and Not So Good) Practices in Computational Methods for Fractional Calculus. Mathematics, 8(3).
<https://doi.org/10.3390/math8030324>
- Gorenflo, R., & Mainardi, F. (1997). Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order. vol. 378 of CISM courses and lectures.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations (Deel 204). Amsterdam: Elsevier.
- Legendre, A. M. (1809). Mémoires de la Classe des Sciences Mathématiques et Physiques de l'Institut de France. Didot, 1809. https://books.google.be/books/about/M%C3%A9moires_de_la_Classe_des_Sciences_Math.html?id=ZXVFAAAacAAJ&redir_esc=y
- Mittag-Leffler, G. M. (1903). Sur la nouvelle fonction E_α . C.R. Acad. Sci. Paris.
- Picard, E. (1890). Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 145–210.
- Podlubny, I. (1998). Fractional Differential Equations. Elsevier Science.
<https://books.google.be/books?id=K5FdXohLto0C>
- Stynes, M. (2016). Too much regularity may force too much uniqueness. Fractional Calculus and Applied Analysis.
- Vernaeve, H. (g.d.-a). Complexe Analyse (2021-2022).
- Vernaeve, H. (g.d.-b). Topologie en metrische ruimten (2021-2022).
- Wiman, A. (1905). Über den fundamentalsatz in der theorie der funktionen $E_\alpha(x)$. Acta Math.

A Appendix

A.1 Gebruikte stellingen

De volgende gebruikte stellingen en definities komen uit cursussen Complexe Analyse en Topologie en metrische ruimten.

Definitie A.1.1. Een eenvoudige kromme Γ is de randkromme van een eenvoudig gebied. Zulke Γ is altijd een gesloten contour. We noemen het eenvoudig gebied waarvan Γ de randkromme is het binnengebied van Γ en noteren dit d.m.v. $[\Gamma]$. We stellen $] \Gamma[:= [\Gamma] \setminus \Gamma$. Dan is $[\Gamma]$ altijd compact en $] \Gamma[$ altijd open.

Hierbij is een eenvoudig gebied een compact gebied zonder gaten dat door evenwijdigen aan de coördinaatassen kan verdeeld worden in een eindig aantal (disjuncte, op de rand na) x - en y -projecteerbare gebieden.

Stelling A.1.1 (Residustelling). Zij Γ een eenvoudige kromme en zij f holomorf in $[\Gamma] \setminus \{z_1, \dots, z_N\} \in] \Gamma[$. Dan is

$$\int_{\Gamma+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^N \text{res}_{z=z_i} f(z)$$

Stelling A.1.2 (Eenduidigheid voor holomorfe functies). Zij f holomorf in het open gebied Ω . Als $z_0 \in \Omega$ een ophopingspunt is van nulpunten van f , dan is $f = 0$ op heel Ω .

Stelling A.1.3 (Gedomineerde convergentie). Zij $(u_n)_n$ en $(v_n)_n$ rijen zijn van meetbare functies op $\mathbb{R}$ en stel dat (met $f_n = u_n + iv_n$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

bestaat voor alle $x \in \mathbb{R}$. Als er een positieve functie $g \in L^1(\mathbb{R})$ bestaat zodat

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dan is $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \in L^1(\mathbb{R})$ en

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx.$$

Stelling A.1.4 (Monotone convergentie). Zij f_n een rij van meetbare functies op $\mathbb{R}$ met

$$f_n(x) \geq 0$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$ en voor alle $n \in \mathbb{N}$. Als $f_n \nearrow f$ of $f_n \searrow f$, dan is

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx.$$