



Faculteit Ingenieurswetenschappen
Vakgroep Wiskundige Analyse

Bepaling van een onbekende diffusiecoëfficiënt in een parabolisch begin- en randwaardenprobleem

door

Karel VAN BOCKSTAL

Promotor: Prof. Dr. M. SLODIČKA

Masterproef ingediend tot het behalen van de academische graad van
MASTER IN DE WISKUNDE,
afstudeerrichting
TOEGEPASTE WISKUNDE

Academiejaar 2009–2010



Faculteit Ingenieurswetenschappen
Vakgroep Wiskundige Analyse

Bepaling van een onbekende diffusiecoëfficiënt in een parabolisch begin- en randwaardenprobleem

door

Karel VAN BOCKSTAL

Promotor: Prof. Dr. M. SLODIČKA

Masterproef ingediend tot het behalen van de academische graad van
MASTER IN DE WISKUNDE,
afstudeerrichting
TOEGEPASTE WISKUNDE

Academiejaar 2009–2010

Voorwoord

Na het volgen van de vakken partiële differentiaalvergelijkingen, functionaalanalyse en benaderingsmethoden voor randwaardeproblemen merkte ik dat ik erg geïnteresseerd was in dergelijke materie. Ongeveer een jaar geleden kreeg ik van Prof. Dr. M. Slodička een onderwerp voorgeschoteld. Mijn uitwerking ervan vinden jullie op de komende bladzijden. Dat het niet altijd even vlot verlopen is, kwam vooral door het vele werk dat de lerarenopleiding met zich meebracht. Maar ik heb de moeilijke momenten doorstaan en ik ben best tevreden met het resultaat.

Uiteraard kan een dankwoord niet ontbreken. In de eerste plaats gaat mijn dank uit naar mijn promotor Prof. Dr. M. Slodička voor het interessante onderwerp, de hulp en de vrijheid die hij mij gaf bij het maken van mijn werk. Ook dank ik hem voor het begrip dat hij opbracht op de momenten dat al mijn energie en tijd naar de lerarenopleiding ging. Daarnaast gaat mijn dank ook uit naar Dr. V. Melicher voor zijn enorme hulp bij het programmeren.

Ik wil ook mijn ouders bedanken voor alle kansen die ze mij gegeven hebben om mijn studies te starten en tot een goed einde te brengen. Ik dank mijn broer en zus omdat ze er in de weekends voor zorgden dat er een glimlach op mijn gezicht verscheen. Ook gaat mijn dank uit naar mijn kotgenoot Tim voor het geduld toen ik hem vanalles wou uitleggen dat hij niet begreep en voor het nalezen van enkele delen van mijn thesis. Tot slot van dit lijstje dank ik nonkel Hans voor de taalkundige opmerkingen.

Wie zeker nog aandacht verdient in dit stukje is mijn vriendin, die steeds klaar staat als ik het nodig heb en die me een andere kant van mezelf liet kennen. Bedankt.

Karel Van Bockstal, juni 2010

Toelating tot bruikleen

“De auteur geeft de toelating deze scriptie voor consultatie beschikbaar te stellen en delen van de scriptie te kopiëren voor persoonlijk gebruik.

Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit deze scriptie.”

Karel Van Bockstal, juni 2010

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
2	Theoretisch kader	2
2.1	Enkele begrippen uit de functionaalanalyse	2
2.1.1	Inproductruimten	2
2.1.2	Genormeerde ruimten	4
2.1.3	Banachruimten	5
2.1.4	Hilbertruimte	6
2.1.5	Sobolevruimten	7
2.2	Partiële differentiaalvergelijking	19
2.2.1	Abstracte variationele randwaardenproblemen	22
2.2.2	Galerkin benadering	25
2.2.3	Eindige elementenmethode	27
3	Parabolisch begin- en randwaardenprobleem	30
4	Analyse van het probleem	35
4.1	Opstellen variationeel vraagstuk	35
4.2	Tijdsdiscretisatie	37
4.3	A priori afschattingen	38
4.4	Goed gedefinieerdheid voorwaarts probleem	46
4.5	Invers probleem	60
5	Analyse van het ‘duaal’ probleem	62
5.1	Theoretische analyse	62
5.1.1	Opstellen variationeel vraagstuk	62
5.1.2	Tijdsdiscretisatie	64
5.1.3	A priori afschattingen	66
5.1.4	Goed gedefinieerdheid voorwaarts ‘duaal’ probleem	71
5.1.5	Invers probleem	83
5.2	Numeriek experiment	86
5.2.1	Constante diffusiecoëfficiënt	88
5.2.2	Lineaire diffusiecoëfficiënt	90
5.2.3	Kwadratische diffusiecoëfficiënt	90
5.2.4	Goniometrische diffusiecoëfficiënt	90
6	Conclusie	92

A Appendix	93
A.1 Hulpstellingen	93
A.2 Code van het numeriek experiment	97
Bibliografie	100
Lijst van figuren	102

Hoofdstuk 1

Inleiding

Partiële differentiaalvergelijkingen verschijnen in alle gebieden van de exacte wetenschappen en worden gebruikt om problemen te formuleren en op te lossen die onbekende functies van meerdere variabelen met zich meebrengen. Voorbeelden van problemen zijn de voortplanting van geluid, warmtegeleiding, elektrostatica en elektrodynamica, vloeistofstromen en elasticiteit.

In dit werk beschouwen we een lineair parabolisch begin- en randwaardenprobleem van de tweede orde in een rechthoekig domein $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, met niet-standaard randcondities. We bestuderen in dit invers probleem de bepaling van een onbekende diffusiecoëfficiënt K .

De achtergrondkennis die nodig is om dit werk te begrijpen wordt geschetst in hoofdstuk 2. We gaan er daarbij vanuit dat de lezer enige kennis heeft over de reële analyse en Lebesgue-integralen. In hoofdstuk 2 gaan we dieper in op de begrippen inproductruimten, genormeerde ruimten, Banachruimten, Hilbertruimte en Sobolevruimten. Daarna leggen we uit wat een partiële differentiaalvergelijking is en welke soorten er zijn. We komen tot de definitie van invers probleem en randwaardenprobleem. Vervolgens bekijken we hoe we een variationele formulering van een randwaardenprobleem kunnen opstellen. Tot slot van hoofdstuk 2 tonen we hoe we een variationeel probleem kunnen omzetten tot een algebraïsch systeem via de eindige elementenmethode door gebruik te maken van de Galerkintheorie. In hoofdstuk 3 presenteren we het lineair parabolisch begin- en randwaardenprobleem van de tweede orde. We bespreken de probleemstelling en geven twee oplossingsmethoden om de onbekende diffusiecoëfficiënt K te bepalen. Beide oplossingsmethoden omvatten een voorwaarts vraagstuk met een bijkomende voorwaarde. De eerste oplossingsmethode bestuderen we in hoofdstuk 4. We onderzoeken of het eerste voorwaarts vraagstuk goed gedefinieerd is in de betekenis van Hadamard en of het invers probleem tenminste één oplossing heeft. Voor de tweede oplossingsmethode gaan we analoog te werk in hoofdstuk 5. Samengevat brengen we van beide hulpvraagstukken een geschikte variationele formulering tot stand en bewijzen we het bestaan van tenminste één oplossing van het invers begin- en randwaardenprobleem. Door gebruik te maken van de Rothemethode voor de tijdsdiscretisatie ontwikkelen we een numeriek schema voor de benadering van de oplossing u en de onbekende functie K . Tot slot van hoofdstuk 5 presenteren we een numeriek voorbeeld waarin we de onbekende diffusiecoëfficiënt K gaan bepalen bij gegeven perfecte data.

Hoofdstuk 2

Theoretisch kader

In dit hoofdstuk geven we enkele basisdefinities en stellingen uit de functionaalanalyse. Eerst voeren we de begrippen in van inproductruimte, genormeerde ruimte, convergentie, . . . en vermelden de relevante eigenschappen hiervan om vervolgens te komen tot de concepten Banachruimte, Hilbertruimte en Sobolevruimte.

In sectie 2.2 leggen we uit wat een partiële differentiaalvergelijking is en welke soorten er zijn. Zo komen we tot de definitie van *invers probleem* en *randwaardenprobleem*. De klassieke oplossing van een randwaardenprobleem is in vele toepassingen niet te bepalen. We gaan op zoek naar een ‘zwakkere’ oplossing en daarom bekijken we in sectie 2.2.1 hoe een variationele formulering van een randwaardenprobleem kunnen opstellen. Vervolgens wordt een variationeel probleem in sectie 2.2.2 en 2.2.3 omgezet tot een algebraïsch systeem door de op de Galerkintheorie gebaseerde eindige elementenmethode. Dit systeem kan worden opgelost met een algebraïsche solver en levert dan een benadering van de ‘zwakke’ oplossing van het oorspronkelijke randwaardenprobleem.

2.1 Enkele begrippen uit de functionaalanalyse

2.1.1 Inproductruimten

In wat volgt, beschouwen we een complexe vectorruimte V . De dimensie van V is niet noodzakelijk eindig.

Definitie 2.1.1 (Inproduct). Een inproduct op een vectorruimte V is een afbeelding

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

die voor alle u, v en $w \in V$ en voor alle $\alpha \in \mathbb{C}$ voldoet aan de volgende condities:

- (i) Additiviteit: $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,
- (ii) Homogeniteit: $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \cdot \langle u, v \rangle$,
- (iii) Hermitische symmetrie: $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$,
- (iv) Positief definit: $\langle u, u \rangle \geq 0$ en $\langle u, u \rangle = 0$ impliceert $u = 0$.

Opmerking 2.1.2 (Sesquilineairiteit). Uit (i), (ii) en (iii) volgt dat

$$\langle \lambda x + \mu y, \alpha u + \beta v \rangle = \lambda \bar{\alpha} \langle x, u \rangle + \lambda \bar{\beta} \langle x, v \rangle + \mu \bar{\alpha} \langle y, u \rangle + \mu \bar{\beta} \langle y, v \rangle,$$

voor alle x, y, u en $v \in V$ en voor alle α, β, λ en $\mu \in \mathbb{C}$.

Definitie 2.1.3 (Inproductruimte). Een vectorruimte waarop een inproduct is gedefinieerd noemt men een inproductruimte.

Voorbeeld 2.1.4.

- (i) De ruimte \mathbb{C}^N van de geordende N -tallen complexe getallen $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$, $z_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, N$, met inproduct

$$\langle z^1, z^2 \rangle = \sum_{j=1}^N z_j^1 \overline{z_j^2}, \quad z^1 = (z_1^1, z_2^1, \dots, z_N^1), z^2 = (z_1^2, z_2^2, \dots, z_N^2)$$

is een eindigdimensionale inproductruimte.

- (ii) De ruimte $C([a, b])$ van de continue functies $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, met inproduct

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

is een inproductruimte.

- (iii) De ruimte van de kwadratisch integreerbare functies over \mathbb{R}^N

$$L_2(\mathbb{R}^N) = \left\{ f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

met inproduct ($f, g \in L_2(\mathbb{R}^N)$)

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \overline{g(x)} dx$$

is een inproductruimte.

- (iv) Stel $1 \leq p < \infty$ en Ω een open deelverzameling van \mathbb{R}^d . De ruimte

$$L_p(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\Omega} |\varphi|^p < \infty \right\},$$

heeft enkel een inproduct voor $p = 2$, namelijk ($f, g \in L_2(\Omega)$)

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \overline{g}.$$

Stelling 2.1.5 (De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz). *In een inproductruimte V geldt dat*

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle, \quad \text{voor alle } u \text{ en } v \in V.$$

Waarbij de gelijkheid optreedt als en slechts dan als u en v lineair afhankelijk zijn.

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [1], pp. 154. □

2.1.2 Genormeerde ruimten

We geven het verband tussen inproductruimten en genormeerde ruimten. In het algemeen geldt dat elke inproductruimte een genormeerde ruimte is, maar niet omgekeerd.

Definitie 2.1.6 (Norm). Een norm over een vectorruimte V is een afbeelding, genoteerd $\|\cdot\|$, van V in \mathbb{R}^+ (de verzameling van de niet-negatieve reële getallen)

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

waarvoor voor alle u en $v \in V$ en voor alle $\alpha \in \mathbb{C}$ geldt dat deze norm

(i) positief definit is: $\|u\| \geq 0$ en $\|u\| = 0$ impliceert $u = 0$,

(ii) homogeen is: $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$

en voldoet aan de

(iii) driehoeksongelijkheid: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Opmerking 2.1.7. Uit (ii) volgt dat de implicatie in (i) ook in de omgekeerde richting geldt: $\|0\| = 0$. Merk ook op dat uit (iii) volgt dat

$$\left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u - v\|.$$

Voorbeeld 2.1.8 (Euclidische norm). Op de vectorruimte \mathbb{R}^d kan men volgende norm definiëren:

$$\|(x_1, \dots, x_d)\|_{\mathbb{R}^d} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2},$$

met $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. De afstand tussen twee punten $x = (x_1, \dots, x_d)$ en $y = (y_1, \dots, y_d)$ in \mathbb{R}^d wordt gegeven door

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_d - y_d)^2}.$$

Definitie 2.1.9 (Genormeerde ruimte). Een vectorruimte voorzien van een norm is een genormeerde ruimte. Het niet-negatief getal $\|u\|$ heet de ‘norm van u ’.

Voorbeeld 2.1.10. De ruimte \mathbb{R}^d is een genormeerde ruimte.

Stelling 2.1.11. Een inproductruimte V is een genormeerde ruimte met norm $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Men zegt dat deze norm geassocieerd is aan het inproduct.

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [2], pp. 262. □

Voorbeeld 2.1.12. De ruimten \mathbb{C}^N , $C([a, b])$ en $L_p(\Omega)$ gedefinieerd in Voorbeeld 2.1.4 zijn genormeerde ruimten.

Eigenschap 2.1.13. Als in een genormeerde ruimte de parallelogramwet geldt

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2,$$

dan bestaat er een inproduct waarvoor $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, voor alle x in de ruimte. De genormeerde ruimte is dan een inproductruimte.

Definitie 2.1.14 (Convergentie in de norm). De rij $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ convergeert in een genormeerde ruimte V naar f of f is de limiet van $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in V , notatie

$$f_m \rightarrow f \text{ of } f = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m$$

indien de rij positieve getallen $(\|f_m - f\|)_{m \in \mathbb{N}}$ naar nul convergeert:

$$\|f_m - f\| \rightarrow 0, \quad \text{als } m \rightarrow \infty.$$

Eigenschap 2.1.15.

- (i) De limiet van een convergente rij is uniek: $f_m \rightarrow f, f_m \rightarrow \tilde{f} \Rightarrow f = \tilde{f}$;
- (ii) $f_m \rightarrow f, g_m \rightarrow g \Rightarrow f_m + g_m \rightarrow f + g$;
- (iii) $f_m \rightarrow f, \alpha_m \rightarrow \alpha$ (numerieke rij) $\Rightarrow \alpha_m f_m \rightarrow \alpha f$;
- (iv) $f_m \rightarrow f \Rightarrow \|f_m\| \rightarrow \|f\|$.

Eigenschap 2.1.16 (Continuïteit van het inproduct). Stel $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ en $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ convergente rijen in de genormeerde ruimte V met norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Dan is het inproduct continu, dwz.

$$f_m \rightarrow f, g_m \rightarrow g \Rightarrow \langle f_m, g_m \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle.$$

Definitie 2.1.17 (Adherentie-Gesloten).

- (i) Is E een deelverzameling van een genormeerde ruimte V , dan noemt de verzameling van de limieten van alle convergente rijen van elementen van E , de adherentie \overline{E} van E ;
- (ii) De deelverzameling heet gesloten indien $E = \overline{E}$.

Eigenschap 2.1.18 (Eigenschappen van de adherentie van $E \subset V$).

- (i) $E \subset \overline{E}$;
- (ii) $E \subset F \subset V \Rightarrow \overline{E} \subset \overline{F}$;
- (iii) $\overline{E} = \overline{\overline{E}}$;
- (iv) E lineaire deelruimte van $V \Rightarrow \overline{E}$ lineaire deelruimte van V .

Definitie 2.1.19 (Dichtheid). Een deelverzameling E van een genormeerde ruimte V heet dicht in V indien elke element van V limiet is van een convergente rij van elementen van E :

$$\begin{aligned} E \text{ dicht in } V &\Leftrightarrow \overline{E} = V \\ &\Leftrightarrow \forall f \in V \text{ en } \forall \varepsilon > 0 \text{ bestaat } f_n \in E \text{ waarvoor } \|f - f_n\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

2.1.3 Banachruimten

In een genormeerde ruimte wordt het concept ‘compleetheid’ gedefinieerd aan de hand van Cauchyrijen.

Definitie 2.1.20 (Cauchyrij). Een rij $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ heet een Cauchyrij in een genormeerde ruimte V indien

$$\|f_p - f_q\| \rightarrow 0, \quad \text{als } p, q \rightarrow +\infty.$$

Eigenschap 2.1.21 (Eigenschappen van Cauchyrijen).

- (i) Stel f_m en g_m Cauchyrijen in een genormeerde ruimte, dan is $f_m + g_m$ een Cauchyrij;
- (ii) Als f_m een Cauchyrij is in een genormeerde ruimte en α_m een convergente numerieke rij, dan is $\alpha_m f_m$ een Cauchyrij;
- (iii) Als f_m een Cauchyrij is in een genormeerde ruimte, dan is $(\|f_m\|)$ een convergente rij in \mathbb{R}^+ ;
- (iv) Stel f_m en g_m Cauchyrijen voor een norm geassocieerd aan een inproduct, dan is $\langle f_m, g_m \rangle$ een convergente rij in \mathbb{C} .

Stelling 2.1.22. *Iedere convergente rij in een genormeerde ruimte is een Cauchyrij, maar niet omgekeerd.*

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [3], pp. 18. □

We komen nu tot de definitie van Banachruimte.

Definitie 2.1.23 (Banachruimte). Indien iedere Cauchyrij in een genormeerde ruimte V convergent is in V , dan zegt men dat de ruimte V aan het criterium van Cauchy voldoet of dat V (rij) compleet is. Een complete genormeerde ruimte heet een Banachruimte.

Voorbeeld 2.1.24.

- (i) $L_p(\Omega)$, gedefinieerd in Voorbeeld 2.1.4, is een Banachruimte.
- (ii) Stel $1 \leq p < \infty$, Ω een begrensde¹ open deelverzameling van \mathbb{R}^d en X een Banachruimte met norm $\|\cdot\|_X$. De ruimte

$$L_p(\Omega, X) = \left\{ g : \Omega \longrightarrow X \mid \left(\int_{\Omega} \|g\|_X^p \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

is een Banachruimte met norm

$$\|g\|_{L_p(\Omega, X)} = \left(\int_{\Omega} \|g\|_X^p \right)^{1/p}.$$

2.1.4 Hilbertruimte

Aangezien een inproductruimte ook een genormeerde ruimte is, bestaat in een inproductruimte automatisch het concept ‘compleetheid’.

Definitie 2.1.25. Een inproductruimte die compleet is voor de geassocieerde norm wordt een Hilbertruimte genoemd.

Iedere Hilbertruimte is dus een Banachruimte, maar niet omgekeerd: de norm moet afgeleid zijn van een inproduct in de ruimte. Een Banachruimte is dus een Hilbertruimte als de parallellogramwet geldt.

Voorbeeld 2.1.26. De ruimten \mathbb{C}^N , $L_2(\Omega)$ en $L_2(\Omega, X)$ zijn Hilbertruimten (voor de definitie van deze ruimten, zie Voorbeeld 2.1.4 en 2.1.24). De ruimte $C([a, b])$, $L_p(\Omega)$ en $L_p(\Omega, X)$ met $p \neq 2$ zijn geen Hilbertruimten.

¹Een deelverzameling Ω van \mathbb{R}^d wordt begrensd genoemd als er een $C \in \mathbb{R}^+$ bestaat zodanig dat voor alle elementen x en y in Ω geldt dat $d(x, y) \leq C$.

Eigenschap 2.1.27.

- (i) Iedere gesloten deelruimte E van een Hilbertruimte H is zelf een Hilbertruimte voor het geïnduceerde inproduct.
- (ii) Voor elke vector x in een Hilbertruimte geldt:

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y \rangle|.$$

Later in dit werk hebben we het begrip separabele Hilbertruimte nodig. Daartoe keren we even terug naar de inproductruimten om volgende definitie in te voeren.

Definitie 2.1.28 (Orthogonaal systeem - Orthonormaal systeem - Orthonormale rij). Een verzameling vectoren in een inproductruimte wordt een orthogonaal systeem genoemd als geen enkele ervan de nulvector is en als elke twee verschillende vectoren uit die verzameling loodrecht op elkaar staan. Als bovendien alle vectoren uit een orthogonaal systeem eenheidsvectoren zijn, dan spreekt men van een orthonormaal systeem.

Als het orthonormaal systeem een rij is, spreekt men van een orthonormale rij.

Voorbeeld 2.1.29. De rij $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(inx)$, $n \in \mathbb{Z}$ is een orthonormale rij in de inproductruimte $L_2((-\pi, \pi))$.

Definitie 2.1.30 (Volledige orthonormale rij). Een orthonormale rij (x_n) in een inproductruimte wordt volledig genoemd als voor elke vector x in die ruimte geldt:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle x_j.$$

Voorbeeld 2.1.31. De orthonormale rij $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(inx)$, $n \in \mathbb{Z}$ in $L_2((-\pi, \pi))$ is volledig.

Nu komen we tot de definitie van separabele Hilbertruimte.

Definitie 2.1.32 (Separabele Hilbertruimte). Een Hilbertruimte heet separabel als ze een volledige orthonormale rij bevat.

Voorbeeld 2.1.33. De ruimten $L_2((-\pi, \pi))$ en $L_2((0, T), L_2(\Omega))$ zijn separabele Hilbertruimten.

2.1.5 Sobolevruimten

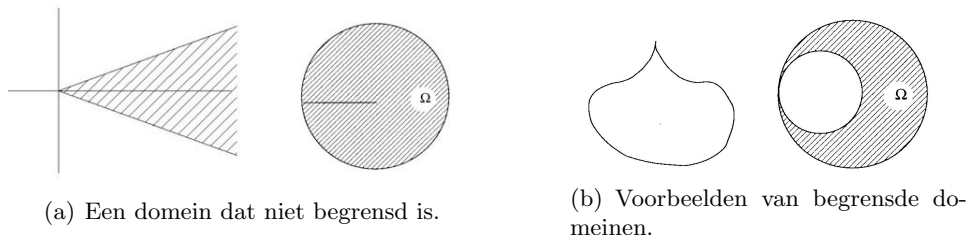
In dit deel leggen we de basis voor de theorie van de abstracte variationele randwaardenproblemen. We voeren het begrip ‘Sobolevruimten $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ ’ in en bespreken hun voornaamste eigenschappen. Ze spelen een belangrijke rol in een strenge en algemene behandeling van brede klassen van (variationele) randwaarden- en eigenwaardenproblemen voor ordinare en partiële differentiaalvergelijkingen.

Eerst herhalen we de definitie van de ruimte $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. We gaan dieper in op het geval $p = 2$, namelijk de ruimte $L_2(\Omega)$, de ruimte van Lebesguemeetbare, kwadratisch integreerbare functies over een domein $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Daarna bespreken we veralgemeende afgeleiden van $L_p(\Omega)$ -functies. Vervolgens komt de definitie van Sobolevruimten $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, en geven we enkele onmiddellijke eigenschappen van deze ruimten. Daarna hebben we het over het spoor van een $H^k(\Omega)$ -functie. Tenslotte wordt het begrip normale afgeleide van een $H^k(\Omega)$ -functie ingevoerd en geven we de stelling van Green in Sobolevruimten.

Definitie 2.1.34 (Domein). Een domein is een open samenhangende deelverzameling² Ω van \mathbb{R}^d .

Definitie 2.1.35 (Begrensd domein). Een begrensd domein $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is een domein met een stuksgewijze gladde rand $\partial\Omega$, dit wil zeggen $\partial\Omega$ bestaat uit een eindig aantal gladde delen en er bestaat een uitwendige normaalvector ν in bijna alle punten van $\partial\Omega$.

Voorbeelden van niet-begrensd, respectievelijk begrensde domeinen vinden we terug in Figuur 2.1(a), respectievelijk in Figuur 2.1(b).



Figuur 2.1: Domeinen

Definitie 2.1.36 (Lebesguemeetbare verzameling). Verzamelingen waaraan een volume of maat³ kan worden toegekend worden Lebesguemeetbaar genoemd.

Definitie 2.1.37 (Lebesguemeetbare functie). Stel X een verzameling. Een functie $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ is meetbaar als, voor elke $a \in \mathbb{R}$ geldt dat de verzameling

$$\{x \in X \mid f(x) \geq a\}$$

meetbaar is.

Opmerking 2.1.38. De meeste reële functies die in alledaagse toepassingen opduiken, zijn meetbaar. Voor bijvoorbeeld $X = \mathbb{R}$ is elke continue functie meetbaar.

Definitie 2.1.39 (Drager van een functie). De drager van een functie f van $\Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ is

$$[f] = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$$

de afsluiting of adherentie genomen zijnde m.b.t. de gewone afstandsnorm in \mathbb{R}^d , gedefinieerd in Voorbeeld 2.1.8.

Stel $1 \leq p < \infty$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ een domein, dan is

$$L_p(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ is meetbaar en } \int_{\Omega} \varphi^p < +\infty \right\}.$$

De ruimte $L_p(\Omega)$ is een Banachruimte met norm

$$\|\varphi\|_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \varphi^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

met $\varphi \in L_p(\Omega)$.

²De definitie van ‘samenhangende deelverzameling’ valt buiten het bestek van deze thesis. Die is bijvoorbeeld te vinden op <http://mathworld.wolfram.com/ConnectedSet.html>.

³De definitie van ‘maat’ valt buiten het bestek van deze thesis. Die is bijvoorbeeld te vinden op <http://mathworld.wolfram.com/Measure.html>.

Definitie 2.1.40 (Gelijkheid in $L_p(\Omega)$). Twee functies u en $v \in L_p(\Omega)$ worden ‘equivalent’ of ‘gelijk’ genoemd in de ruimte $L_p(\Omega)$ indien

$$u = v, \text{ b.o. in } \Omega$$

waarbij b.o. staat voor ‘bijna overal’, dwz. dat de gelijkheid van u en v eventueel niet geldt in de punten van een deelverzameling van Ω met maat nul. In de punten van zulke verwaarloosbare verzameling mag $u \neq v$ of is eventueel u en/of v niet gedefinieerd. We noteren $u = v$ in $L_p(\Omega)$. Voor twee functies die niet gelijk zijn, dit is niet equivalent zijn in de aangegeven zin, noteert men $u \neq v$ in $L_p(\Omega)$.

In het speciale geval $p = 2$ kunnen we een inproduct en geassocieerde natuurlijke norm in $L_p(\Omega) = L_2(\Omega)$ invoeren, namelijk:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv dx,$$

$$\|u\| = \sqrt{\int_{\Omega} u^2 dx},$$

voor elke u en $v \in L_2(\Omega)$.

Opmerking 2.1.41. In het vervolg gebruiken we altijd de $L_2(\Omega)$ -norm voor $\|\cdot\|$ en het $L_2(\Omega)$ -inproduct voor $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tenzij uitdrukkelijk anders vermeld.

Eigenschap 2.1.42. $L_2(\Omega)$ is een Hilbertruimte.

Gevolg 2.1.43 (Ongelijkheid van Hölder). *Zoals in elke inproductruimte geldt in $L_2(\Omega)$ de ongelijkheid van Schwarz (zie stelling 2.1.5). Expliciet,*

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ of } |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|,$$

het gelijkheidsteken slechts voorkomend indien $\alpha u + \beta v = 0$ in $L_2(\Omega)$, α en $\beta \in \mathbb{R}$ niet beide nul.

Opmerking 2.1.44. Bovenstaande stelling is de Hölderongelijkheid voor integralen met $p = q = 2$ (zie Stelling A.1.1).

We noteren hogere orde afgeleiden met de multi-indexnotatie. Voor alle

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \text{ en } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d :$$

$$D^{\alpha} \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Definitie 2.1.45.

- (i) De verzameling van alle continue reële functies gedefinieerd in Ω noteren we met $C^0(\Omega)$.
- (ii) De verzameling van alle functies uit $C^0(\Omega)$ die begrensd en uniform continu zijn op Ω noteren we met $C^0(\overline{\Omega})$.

- (iii) Als $m \in \mathbb{N}$, dan noteren we met $C^m(\Omega)$ de verzameling van alle functies $f \in C^0(\Omega)$ waarvan alle partiële afgeleiden $D^\alpha f$ tot de orde m bestaan (dus bestaan voor alle α waarvoor geldt dat $|\alpha| \leq m$) en continu zijn.
- (iv) Met $C^m(\bar{\Omega})$ noteren we de verzameling van alle functies $f \in C^m(\Omega)$ waarvoor geldt dat $D^\alpha f \in C^0(\bar{\Omega})$ voor alle $|\alpha| \leq m$.
- (v) $C^\infty(\Omega)$ is de verzameling van alle functies gedefinieerd op Ω die afgeleiden hebben tot gelijk welke orde:

$$C^\infty(\Omega) = \left\{ v \in C^0(\Omega) : v \in C^k(\Omega), \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

- (vi) $C^\infty(\bar{\Omega})$ staat voor de ruimte van functies die onbepikt continu differentieerbaar zijn in Ω en die samen met hun afgeleiden van alle orden continu extendeerbaar zijn tot $\bar{\Omega}$:

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \left\{ v \in C^0(\bar{\Omega}) : v \in C^k(\bar{\Omega}), \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Opmerking 2.1.46.

- (i) We herinneren dat een functie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uniform continu is als en slechts als

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in \Omega : d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Een uniform continue functie is continu, maar het omgekeerde is algemeen niet waar. Er is dus een duidelijk onderscheid tussen $C^0(\Omega)$ en $C^0(\bar{\Omega})$, zelfs als $\Omega = \bar{\Omega}$.

- (ii) Een begrensde en uniform continue functie f op Ω heeft een unieke continue uitbreiding op $\bar{\Omega}$ die ook begrensd en uniform continu is en die we door de uniciteit ook noteren als f (zie bijvoorbeeld [4], pp. 77). Dit feit rechtvaardigt de notatie $C^0(\bar{\Omega})$, $C^m(\bar{\Omega})$ en $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Voor het vervolg is de ruimte van Schwarz $D(\Omega)$ als dichte deelruimte van $L_2(\Omega)$ belangrijk.

Definitie 2.1.47 (Schwarz-ruimte $D(\Omega)$). $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ is de ruimte van functies van $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die onbepikt continu differentieerbaar zijn en compacte drager bevat in Ω hebben. Dit wil zeggen: $D(\Omega)$ bestaat uit de functies f van $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die samen met hun afgeleiden van om het even welke orde continu zijn en die nul zijn ‘in een omgeving van de grens $\partial\Omega$ ’, de afstand van $[f]$ tot $\partial\Omega$ is niet nul.

Stelling 2.1.48. *Stel Ω een begrensd domein in \mathbb{R}^d . De ruimte $D(\Omega)$ is dicht in $L_p(\Omega)$.*

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [5], pp. 73. □

Voor functies die geen gewone of partiële afgeleide van een bepaalde orde hebben, willen we een ‘veralgemeende’ of ‘zwakke’ afgeleide invoeren. Vertrekpunt is een eigenschap die een klassieke afgeleide, zo die bestaat, heeft. Die eigenschap volgt uit de klassieke formule van Green voor ‘brave’ functies, gedefinieerd in een begrensd domein met een ‘brave’ grens. In deze en in volgende paragrafen beschouwen we enkel domeinen met een zogenaamde ‘Lipschitzgrens’.

Definitie 2.1.49 (Lipschitzgrens). Stel $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ een begrensde domein. We zeggen dat Ω een Lipschitzcontinue grens $\partial\Omega$ heeft, als er constanten $\alpha, \beta > 0$ bestaan en $m \in \mathbb{N}$ continue functies $a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)})$ met $r = 1, \dots, m$ bestaan die gedefinieerd zijn in $(d-1)$ -dimensionale open kubussen

$$K^{(r)} = \left\{ \left(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)} \right) : \left| x_i^{(r)} \right| < \alpha, i = 1, \dots, d-1 \right\}$$

zodanig dat

- (i) elk punt van $\partial\Omega$ kan in tenminste één van de coördinaatsystemen uitgedrukt worden als

$$\mathbf{x} = \left(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)}, a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)}) \right);$$

- (ii) de punten $\mathbf{x} = \left(x_1^{(r)}, \dots, x_d^{(r)} \right)$, waarvoor $\left| x_i^{(r)} \right| < \alpha$ voor $i = 1, \dots, d-1$ en

$$a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)}) < x_d^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)}) + \beta,$$

respectievelijk,

$$a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)}) - \beta < x_d^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)}),$$

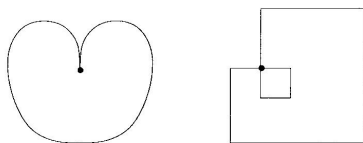
liggen in Ω , respectievelijk buiten $\bar{\Omega}$;

- (iii) alle functies $a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)})$ voor $r = 1, \dots, m$ zijn Lipschitzcontinu in de kubus $K^{(r)}$, i.e., er bestaat een $C > 0$ zodanig dat

$$\left| a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)}) - a_r(y_1^{(r)}, \dots, y_{d-1}^{(r)}) \right|^2 \leq C \sum_{i=1}^{d-1} \left| x_i^{(r)} - y_i^{(r)} \right|^2.$$

Opmerking 2.1.50.

- (i) In één dimensie is een domein een interval.
- (ii) In twee dimensies behoren de domeinen met gladde of stuksgewijze gladde rand zonder keerpunten tot de domeinen met Lipschitzgrens. Voorbeelden zijn cirkels en veelhoeken.
- (iii) In drie dimensies zijn bollen, cilindrs en veelvlakken (bijvoorbeeld balken en piramides) voorbeelden van domeinen met een Lipschitzgrens.
- (iv) Voorbeelden van tweedimensionale domeinen zonder Lipschitzgrens vinden we terug in Figuur 2.1(b) en in Figuur 2.2.



Figuur 2.2: Domein zonder Lipschitzgrens.

- (v) De klasse van begrensde domeinen met een Lipschitzgrens is voldoende algemeen voor de randwaardenproblemen die men in de praktijk ontmoet.

Stelling 2.1.51 (Stelling van Green). *Zij $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ een domein met een Lipschitzgrens. Zijn u en $v \in C^1(\bar{\Omega})$ (d.w.z. dat u en v , als ook $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ en $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, d$ continu zijn in Ω en continu extendeerbaar tot $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial\Omega$ grens). Dan geldt*

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i ds - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx, i = 1, \dots, d,$$

met ν_i de i -de coördinaat van de eenheidsvector $\boldsymbol{\nu}$ langs de uitwendige normaal op $\partial\Omega$.

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [6], pp. 712. □

Gevolg 2.1.52. $\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \forall u \in C^1(\bar{\Omega})$ en $\forall \varphi \in D(\Omega)$.

We hebben algemeen:

Gevolg 2.1.53.

$$\int_{\Omega} \varphi D^{\alpha} u dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx, \forall u \in C^m(\bar{\Omega}) \text{ en } \forall \varphi \in D(\Omega), \forall \alpha \text{ met } |\alpha| \leq m, m \in \mathbb{N}_0.$$

Dit suggereert nu de volgende definitie.

Definitie 2.1.54 (Veralgemeende of zwakke afgeleide). We noemen $v^{(\alpha)} \in L_p(\Omega)$ een veralgemeende afgeleide van de orde $|\alpha|$ van een functie $u \in L_p(\Omega)$ indien geldt

$$\int_{\Omega} v^{(\alpha)} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

We noteren dan $v^{(\alpha)} = D^{\alpha}u$, $D^0u = u$.

Opmerking 2.1.55. Merk op dat in deze definitie $u \in L_p(\Omega)$ verondersteld is en direct $v^{(\alpha)} \in L_p(\Omega)$ geeïst wordt.

Dat de bovenstaande definitie zinvol is, volgt uit de volgende twee stellingen.

Stelling 2.1.56 (Uniciteit). *Zijn $v^{(\alpha)}$ en $\tilde{v}^{(\alpha)} \in L_p(\Omega)$ veralgemeende afgeleiden van een zelfde $u \in L_p(\Omega)$, dan is $v^{(\alpha)} = \tilde{v}^{(\alpha)}$ in $L_p(\Omega)$.*

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [7], pp. 278. □

Stelling 2.1.57 (Een klassieke afgeleide is een veralgemeende). *Zij $u \in C^m(\bar{\Omega})$ dan bestaan alle veralgemeende afgeleiden van u tot en met de orde m en elke veralgemeende afgeleide $D^{\alpha}u$, $|\alpha| \leq m$, valt samen met de corresponderende klassieke afgeleide.*

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [8], pp. 54. □

Eigenschap 2.1.58.

- (i) Bestaan $D^{\alpha}u$ en $D^{\alpha}v$, dan bestaat ook $D^{\alpha}(u + v)$ en

$$D^{\alpha}(u + v) = D^{\alpha}u + D^{\alpha}v \text{ in } L_p(\Omega).$$

(ii) Bestaan $D^\beta u$ en $D^\alpha (D^\beta u)$, dan bestaat ook $D^{\alpha+\beta} u$ en geldt

$$D^\alpha (D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u \text{ in } L_p(\Omega),$$

met $\alpha + \beta$ de som van de d -tallen $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ en $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$.

(iii) Indien alle veralgemeende afgeleiden van de eerste orde $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^0(\Omega)$, $i = 1, \dots, d$, dan is $u \in C^1(\Omega)$.

Vermits het over functies uit $L_p(\Omega)$ gaat, betekent de eigenschap ‘ u continu in Ω ’, dat u equivalent is met een functie die continu is in Ω . Anders gezegd, een gepaste aanpassing van de waarden van de oorspronkelijke u in de punten uit een verwaarloosbare verzameling leidt tot een continue functie.

Nu kunnen we overgaan tot de definitie van Sobolevruimten $H^{k,p}(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ en $1 \leq p < \infty$.

Definitie 2.1.59. Stel $k \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$ en $1 \leq p < n$.

(i) $H^{k,p}(\Omega)$ is de verzameling van alle functies $u \in L_p(\Omega)$ waarvan de veralgemeende afgeleiden $D^\alpha u \in L_p(\Omega)$ bestaan voor alle α met $|\alpha| \leq k$. De norm in deze ruimte is

$$\|u\|_{H^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{(\alpha)} u\|_{p,\Omega}. \quad (2.1)$$

(ii) De seminorm van de i -de afgeleide van $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ is

$$|u|_{i,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=i} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De sommatie gaat over alle multi-indexen α met lengte i . De norm van $u \in C^k(\bar{\Omega})$ met $k \in \mathbb{N}$ is gedefinieerd in termen van de seminormen als volgt

$$\|u\|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{i=0}^k |u|_{i,p,\Omega}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2)$$

De ruimte $C^\infty(\Omega)$ met de norm (2.2) is een genormeerde ruimte, maar is niet dicht in $L_p(\Omega)$. $W^{k,p}(\Omega)$ is de afsluiting van $C^\infty(\bar{\Omega})$ met betrekking tot de norm (2.2).

(iii) De ruimte $H_0^{k,p}(\Omega)$ is de adherentie van $C_0^\infty(\bar{\Omega})^4$ in de norm (2.1).

(iv) De ruimte $W_0^{k,p}(\Omega)$ is de adherentie van $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ in de norm (2.2).

⁴Dit is de ruimte van functies die

- (i) onbeperkt continu differentieerbaar zijn in Ω ,
- (ii) compacte drager bevat in Ω hebben en
- (iii) die samen met hun afgeleiden van alle orden continu extendeerbaar zijn tot $\bar{\Omega}$.

Stelling 2.1.60. *Stel $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ en Ω een domein in \mathbb{R}^d . Dan geldt*

- (i) $W^{k,p}(\Omega)$ en $W_0^{k,p}(\Omega)$ zijn Banachruimten,
- (ii) $H_0^{k,p}(\Omega) = W_0^{k,p}(\Omega)$,
- (iii) als het domein Ω een Lipschitzgrens heeft, dan geldt $H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$.

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [5], pp. 256 en 271. □

Gevolg 2.1.61. *Stel $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ en Ω een domein in \mathbb{R}^d . Dan geldt*

- (i) $H_0^{k,p}(\Omega)$ is een Banachruimte,
- (ii) als het domein Ω een Lipschitzgrens heeft, dan is $H^{k,p}(\Omega)$ een Banachruimte en is $C^\infty(\bar{\Omega})$ dicht in $H^{k,p}(\Omega)$.

Zoals reeds eerder opgemerkt, beschouwen we enkel domeinen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ met een Lipschitzgrens. In het vervolg werken we verder met $p = 2$. We noteren de Banachruimten $H^{k,2}(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ als $H^k(\Omega)$ en $H_0^{k,2}(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$ als $H_0^k(\Omega)$.

Opmerking 2.1.62.

- (i) $H_0^k(\Omega)$ is niet dicht in $H^k(\Omega)$.
- (ii) $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Eigenschap 2.1.63.

- (i) Het inproduct in $H^k(\Omega)$ wordt gedefinieerd door

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle. \quad (2.3)$$

- (ii) De ruimte $H^k(\Omega)$ met inproduct (2.3) is compleet voor de geassocieerde natuurlijke norm

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^2}.$$

$H^k(\Omega)$ is bijgevolg een Hilbertruimte.

Eigenschap 2.1.64.

- (i) Is $l < k$ dan is $H^k(\Omega) \subset H^l(\Omega)$.
- (ii) Is $u \in H^k(\Omega)$ en is $|\alpha| + |\beta| \leq k$, dan is

$$D^\alpha (D^\beta u) = D^\beta (D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u.$$

Stelling 2.1.65. $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ is een separabele Hilbertruimte.

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [5], pp. 256 en 264. □

Ook voor veralgemeende afgeleiden noteert men de vector $(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d})$ als ∇u , de veralgemeende gradient. Aldus kan het inproduct in $H^1(\Omega)$ geschreven worden als

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle + \langle \nabla u, \nabla v \rangle$$

of

$$\|u\|_1^2 = \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2, \quad (2.4)$$

met $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ het inproduct en $\|\cdot\|_1$ de norm in de ruimte $H^1(\Omega)$. Is $u \in H^2(\Omega)$, dan noteert men, zoals voor klassieke afgeleiden

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

voor de veralgemeende Laplaciaan.

Nu gaan we het gedrag van een functie karakteriseren in de omgeving van de rand $\partial\Omega$. Was $u \in C^0(\Omega)$, dan was het probleem eenvoudig: het spoor van u op $\partial\Omega$ kan dan gedefinieerd worden door middel van de waarden van u op $\partial\Omega$, maar niet elke functie uit $H^k(\Omega)$ is zo 'braaf'. Om het spoor voor een willekeurige u te kunnen definiëren hebben we een nieuwe functieruimte nodig, namelijk de ruimte $L_2(\partial\Omega)$.

Definitie 2.1.66. Zij Ω een begrensde domein met Lipschitzgrens $\partial\Omega$, dan kan voor functies $u(S)$, $S \in \partial\Omega$, de notie Lebesguemeetbaarheid en Lebesgue-integreerbaarheid over $\partial\Omega$ worden ingevoerd. Zij dan

$$L_2(\partial\Omega) = \left\{ u(S) \mid u(S) \text{ is Lebesguemeetbaar over } \partial\Omega \text{ en } \int_{\partial\Omega} u^2(S) dS < +\infty \right\}.$$

Voorzien van de gewone optelling van functies en vermenigvuldiging met (reële) scalaren wordt $L_2(\partial\Omega)$ een lineaire ruimte. Door

$$\langle u, v \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} u(S)v(S) dS$$

$$\text{en } \|u\|_{\partial\Omega} = \sqrt{\int_{\partial\Omega} u^2(S) dS}$$

wordt in $L_2(\partial\Omega)$ een inproduct en geassocieerde norm gedefinieerd. Tenslotte is $L_2(\partial\Omega)$ compleet voor de ingevoerde norm en is dus een Hilbertruimte.

We kunnen nu het spoor van $u \in H^1(\Omega)$ en dus a fortiori van $u \in H^k(\Omega)$, $k > 1$, invoeren.

Stelling 2.1.67 (Spoorstelling). *Stel $u \in H^1(\Omega)$. Er bestaat een unieke lineaire afbeelding, genoteerd γ ,*

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$$

die voldoet aan

$$(i) \gamma(u) = u|_{\partial\Omega} = \text{restrictie van } u \text{ tot } \partial\Omega, \forall u \in H^1(\Omega) \cup C^0(\bar{\Omega});$$

(ii) $\exists C(\Omega) > 0$ zo dat

$$\|\gamma(u)\|_{\partial\Omega} \leq C \|u\|_1, \forall u \in H^1(\Omega).$$

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [9]. □

Opmerking 2.1.68.

- (i) γ wordt de spooroperator genoemd, $\gamma(u)$ wordt het spoor van u genoemd. De ongelijkheid in (ii) wordt de ongelijkheid van het spoor genoemd. Ze drukt uit dat de spooroperator een begrensde of continue operator is van $H^1(\Omega)$ in $L_2(\partial\Omega)$:

$$u_m \rightarrow u \text{ in } H^1(\Omega) \Rightarrow \gamma(u_m) \rightarrow \gamma(u) \text{ in } L_2(\partial\Omega).$$

Indien geen verwarring mogelijk is, wordt het spoor van u simpelweg als $u(S)$ genoemd.

- (ii) Legt men in een randwaardenprobleem (zie Hoofdstuk 2.2.1) de volgende randconditie op:

$$u = g(S), \quad g(S) \in L_2(\partial\Omega)$$

dan bedoelt men dat $u \in H^1(\Omega)$ en dat $g(S)$ het voorgeschreven spoor van u op $\partial\Omega$ is.

Gevolg 2.1.69.

$$H_0^1(\Omega) = \{u \mid u \in H^1(\Omega) \text{ en } \gamma(u) = 0 \text{ in } L_2(\partial\Omega)\}.$$

Stelling 2.1.70 (Friedrichs). *Zij Ω een begrensd domein met Lipschitzgrens $\partial\Omega$, dan bestaat een constante $C > 0$, enkel afhankelijk van Ω zodanig dat*

$$\|u\|_1^2 \leq C \left[\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\partial\Omega} u^2(S) dS \right], \forall u \in H^1(\Omega).$$

Hierin staan $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, d$, voor de eerste orde veralgemeende afgeleiden van u en is $u(S)$ het spoor van u op $\partial\Omega$.

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [10], pp. 188 voor $d = 1, 2$. □

Voor gemengde randwaardenproblemen (met bijvoorbeeld een Dirichlet-randconditie op één deel van $\partial\Omega$ en een Neumann-randconditie op een ander disjunct deel van $\partial\Omega$, zie Definitie (2.2.12) in sectie 2.2.1), is volgende uitbreiding interessant.

Stelling 2.1.71. *Zij Ω een begrensd domein met Lipschitzgrens $\partial\Omega$ en zij Γ_1 een open deel van $\partial\Omega$ waarvan de Lebesguemaat niet nul is ($|\Gamma_1| = \int_{\Gamma_1} 1 dS \neq 0$), dan bestaat er een constante $C > 0$ enkel afhankelijk van Ω en Γ_1 , zodanig dat*

$$\|u\|_1^2 \leq C \left[\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\Gamma_1} u^2(S) dS \right], \forall u \in H^1(\Omega). \quad (2.5)$$

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [11], pp. 53 voor $d = 2$. □

Opmerking 2.1.72.

- (i) Wegens de definitie van Sobolevnorm kan (2.5) gebruikmakend van de notatie van veralgemeende gradiënt geschreven worden als

$$\|u\|_1^2 \leq C \left[\|\nabla u\|^2 + \int_{\Gamma_1} u^2(S) dS \right], \forall u \in H^1(\Omega).$$

(ii) Als $u \in H^1(\Omega)$ spoor nul heeft op Γ_1 (of in het bijzonder op $\partial\Omega$) dan wordt het bovenstaande

$$\|u\|_1^2 \leq C \|\nabla u\|^2. \quad (2.6)$$

Gevolg 2.1.73. Voor $u \in H_0^1(\Omega)$ geldt dat

$$\|u\|_1^2 \leq C \|\nabla u\|^2.$$

Een cruciale ongelijkheid bij de afschattingen die we later gaan maken is de ongelijkheid van Nečas. Voor deze ongelijkheid hebben we de ruimte $L_2(\Gamma)$ nodig, die wordt gedefinieerd in de volgende stelling.

Definitie 2.1.74. Zij Ω een begrensde domein met Lipschitzgrens $\partial\Omega$, dan kan voor functies $u(S)$, $S \in \Gamma \subset \partial\Omega$, de notie Lebesguemeetbaarheid en Lebesgue-integreerbaarheid over Γ worden ingevoerd. Zij dan

$$L_2(\Gamma) = \left\{ u(S) \mid u(S) \text{ is Lebesguemeetbaar over } \Gamma \text{ en } \int_{\Gamma} u^2(S) dS < +\infty \right\}.$$

Voorzien van de gewone optelling van functies en vermenigvuldiging met (reële) scalaren wordt $L_2(\Gamma)$ een lineaire ruimte. Door

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{\Gamma} &= \int_{\Gamma} u(S)v(S) dS \\ \text{en } \|u\|_{\Gamma} &= \sqrt{\int_{\Gamma} u^2(S) dS} \end{aligned}$$

wordt in $L_2(\Gamma)$ een inproduct en geassocieerde norm gedefinieerd. Tenslotte is $L_2(\Gamma)$ compleet voor de ingevoerde norm en is dus een Hilbertruimte.

Opmerking 2.1.75. Uit de spoorongelijkheid volgt dat

$$\|u\|_{\Gamma} \leq C \|u\|_1, \forall u \in H^1(\Omega), \Gamma \subset \partial\Omega.$$

Stelling 2.1.76 (Nečas).

$$\|z\|_{\Gamma}^2 \leq \varepsilon \|\nabla z\|^2 + \frac{C}{\varepsilon} \|z\|^2, \forall z \in H^1(\Omega), \forall \varepsilon \in]0, 1[, \Gamma \subset \partial\Omega.$$

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [12], pp. 53. □

Indien $u \in H^2(\Omega)$ (en a fortiori indien $u \in H^k(\Omega)$, $k > 2$) dan geldt dat

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega), \quad i = 1, \dots, d.$$

Die eerste orde veralgemeende afgeleiden bezitten dan een spoor, genoteerd $\gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \in L_2(\partial\Omega)$, op de grens $\partial\Omega$. Daar de eenheidsvector ν langs de uitwendige normaal (bijna overal) bestaat op de Lipschitzgrens $\partial\Omega$, kan nu de veralgemeende afgeleide van $u \in H^2(\Omega)$ langs die normaal worden ingevoerd.

Definitie 2.1.77. Zij $u \in H^2(\Omega)$ dan definiëren we de veralgemeende normale afgeleide van u in $S \in \partial\Omega$ door

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \sum_{i=1}^d \nu_i(S) \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^d \nu_i(S) \frac{\partial u(S)}{\partial x_i}$$

met $\nu_i(S)$ de i -de coördinaat van de eenheidsvector $\boldsymbol{\nu}(S)$ langs de uitwendige normaal in S op $\partial\Omega$.

Eigenschap 2.1.78. $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} \in L_2(\partial\Omega)$

Het begrip van veralgemeende normale afgeleide laat ons toe de formule van Green (stelling 2.1.51) geldig voor $C^1(\overline{\Omega})$ -functies te veralgemenen tot functies uit $H^1(\Omega)$.

Stelling 2.1.79 (Green).

(i) Zijn u en v in $H^1(\Omega)$ en is $\partial\Omega$ de Lipschitzgrens van Ω , dan is

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, v \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle = \langle \nu_i \gamma(u), \gamma(v) \rangle_{\partial\Omega}, \quad i = 1, 2, \dots, d \quad (2.7)$$

(ii) Is $u \in H^2(\Omega)$ en is $v \in H^1(\Omega)$ dan geldt

$$\langle \Delta u, v \rangle + \langle \nabla u, \nabla v \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}, \gamma(v) \right\rangle_{\partial\Omega}, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [6], pp. 712. □

Gevolg 2.1.80. Sommatie van (2.7) over i geeft

$$\langle \nabla \cdot u, v \rangle + \langle u, \nabla \cdot v \rangle = \langle u \cdot \boldsymbol{\nu}, v \rangle_{\partial\Omega}.$$

We herhalen de belangrijkste ruimten die we verder in dit werk gaan beschouwen (met Ω een domein met Lipschitzgrens in \mathbb{R}^d , X een Banachruimte met $\|\cdot\|_X$, $1 \leq p < \infty$):

$$L_2(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |\varphi|^2 < \infty \right\},$$

$$L_p(\Omega, X) = \left\{ g : \Omega \rightarrow X \mid \left(\int_{\Omega} \|g\|_X^p \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

$$C(\Omega, X) = \left\{ u : \Omega \rightarrow X \mid \max_{\Omega} \|u\|_X < \infty \right\},$$

$$H^1(\Omega) = \{ \varphi \in L_2(\Omega) \mid \nabla \varphi \in L_2(\Omega) \},$$

$$H_0^1(\Omega) = \{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

en

$$H^2(\Omega) = \{ \varphi \in L_2(\Omega) \mid \Delta \varphi \in L_2(\Omega) \}.$$

2.2 Partiële differentiaalvergelijking

Wat is een partiële differentiaalvergelijking? Een differentiaalvergelijking (afk.: DE⁵) is een wiskundige vergelijking voor een functie of een vectorveld waarin, naast eventueel de functie zelf, ook één of meerdere afgeleiden van die functie voorkomen. Betreft het een functie van twee of meer veranderlijken, dan zijn het de partiële afgeleiden naar die veranderlijken die in de vergelijking voorkomen en spreken we van een partiële differentiaalvergelijking (afk.: PDE⁶). Betreft het een functie van één veranderlijke, dan spreken we over een gewone of ordinaire differentiaalvergelijking.

PDE'en verschijnen in alle gebieden van de exacte wetenschappen en worden gebruikt om problemen te formuleren en op te lossen die onbekende functies van meerdere variabelen met zich meebrengen. Voorbeelden van problemen zijn de voortplanting van geluid, warmtegeleiding, elektrostatica en elektrodynamica, vloeistofstromen en elasticiteit. Meer recentelijk is het modelleren met behulp van partiële differentiaalvergelijkingen van problemen uit de biologie, farmacie, beeldbewerking en economie sterk toegenomen. Omdat de oorsprong van dergelijke modellen zeer divers is, en de resultaten bij voorkeur praktijkgericht dienen te zijn, heeft de analyse van PDE'en vele facetten. De klassieke aanpak is gericht op het vinden van expliciete oplossingen, al is dat niet altijd mogelijk. Sinds er numerieke methoden en snelle computers beschikbaar zijn, is men meer geïnteresseerd op functionaalanalytische methoden die existentie en eenduidigheid van de oplossing garanderen. Als men ook nog kan laten zien dat de resultaten continu afhangen van de gegeven data, dan weet men dat men met een numerieke methode de gezochte oplossing inderdaad zou kunnen benaderen (Uit [13]). Indien de oplossing niet continu afhangt van de data kan een kleine fout in de data grote verschillen in de oplossing van de numerieke methode impliceren.

In het algemeen kan elk proces dat zich in de ruimte - of in de ruimte en tijd - afspeelt voorgesteld worden door een PDE. Volledig verschillende fysische problemen kunnen identieke of gelijkaardige wiskundige formuleringen hebben.

We beschouwen een domein $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ en een functie $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ in $C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$.

Definitie 2.2.1. Een uitdrukking van de vorm

$$F\left(\mathbf{x}, D^{(m,0,\dots,0)}u, \dots, D^\alpha u, \dots, D^{(0,0,\dots,0)}u\right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

met $|\alpha| \leq m$ wordt een PDE van de orde m genoemd.

Definitie 2.2.2.

(i) Een PDE is lineair als ze de volgende vorm heeft

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

(ii) Een PDE is semilineair als ze de volgende vorm heeft

$$F\left(\mathbf{x}, D^\beta u\right) + \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha D^\alpha u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

met $|\beta| \leq k - 1$.

⁵Differential Equation

⁶Partial Differential Equation

(iii) Een PDE is quasilineair als ze de volgende vorm heeft

$$F(\mathbf{x}, D^\beta u) + \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x}, D^\beta u) D^\alpha u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

met $|\beta| \leq k - 1$.

Een PDE is dus lineair als alle coëfficiënten a_α onafhankelijk zijn van de oplossing. Een PDE is semilineair als de hoogste orde coëfficiënten lineair zijn, maar niet alle andere termen lineair zijn. Als ook de hoogste orde coëfficiënten afhankelijk zijn van de oplossing wordt een PDE quasilineair genoemd.

Er is geen algemene theorie gekend over de oplosbaarheid van PDE'en. Zo een theorie kan mogelijks niet bestaan door de grote variatie van problemen afkomstig van de verschillende toepassingen. Daarom heeft men verschillende strategieën ontwikkeld voor het oplossen van specifieke soorten problemen. We geven enkele belangrijke voorbeelden van PDE'en.

Voorbeeld 2.2.3. Stel Ω een domein in \mathbb{R}^d , $u \in C^m(\Omega)$ en $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Enkele voorbeelden van PDE'en zijn:

(i) de Laplacevergelijking

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i x_i}^2 u = 0;$$

(ii) de warmtevergelijking

$$\partial_t u - \Delta u = f;$$

(iii) de golfvergelijking

$$\partial_{tt} u - \Delta u = f.$$

Definitie 2.2.4 (Hadamard). Een wiskundig probleem is goed gedefinieerd in de betekenis van Hadamard als

(i) er een oplossing bestaat,

(ii) deze uniek is,

(iii) de oplossing continu afhangt van de data.

Problemen die niet goed gedefinieerd zijn in de betekenis van Hadamard worden *slecht gesteld* genoemd. Inverse problemen zijn dikwijls slecht gedefinieerd. Bij inverse problemen moet men gewoonlijk een onbekende coëfficiënt in de PDE bepalen aan de hand van bijkomende informatie in het geobserveerde domein of op de rand van het domein.

Definitie 2.2.5 (Invers of achterwaarts probleem). Een invers probleem wordt gedefinieerd als zoek de modelparameters \mathbf{m} zodanig dat (op zijn minst benaderend)

$$\mathbf{d} = G(\mathbf{m}),$$

waarbij G een operator⁷ is die de expliciete relatie beschrijft tussen de data \mathbf{d} en de modelparameters \mathbf{m} . G is een representatie van een fysisch systeem.

⁷Een operator F is een afbeelding van een verzameling X naar een verzameling Y . Het domein van F noteren we met $D(F)$ en het bereik van F met $R(F)$. De operator F_2 wordt een verlenging van de operator F_1 genoemd (of F_1 is de restrictie van F_2) als $D(F_1) \subset D(F_2)$ en $F_1(x) = F_2(x)$ voor elke $x \in D(F_1)$.

Voorbeeld 2.2.6. Een geofysicus is geïnteresseerd in de coördinaten $\{r, \theta, \varphi\}$ van het punt waar een aardbeving start en in het begintijdstip T waarop een aardbeving start. Dan zijn de modelparameters $\mathbf{m} = \{r, \theta, \varphi, T\}$. De dataparameters $\mathbf{d} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ zijn de tijdstippen waarop de golven afkomstig van een aardbeving aankomen bij een seismisch meetstation. Het is mogelijk om gegeven de modelparameters $\mathbf{m} = \{r, \theta, \varphi, T\}$ de aankomsttijdstippen $\mathbf{d} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ te voorspellen (Uit [14], pp. 20). Er bestaat dus een operator G zodanig dat $\mathbf{d} = G(\mathbf{m})$. Het invers probleem is dan als volgt: bepaal de modelparameters r, θ, φ, T als in een seismisch meetstation golven binnenkomen op de tijdstippen t_1, \dots, t_n .

Opmerking 2.2.7. Een voorwaarts probleem oplossen betekent dat we de data \mathbf{d} gaan voorspellen.

Definitie 2.2.8. Een lineaire PDE van de tweede orde in $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ heeft de volgende vorm

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (2.8)$$

waarbij $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Deze vergelijking heet

- (i) homogeen als $f = 0$,
- (ii) inhomogeen als $f \neq 0$,
- (iii) met constante coëfficiënten als alle coëfficiënten constant zijn.

Het hoofddeel van deze vergelijking is het deel dat de hoogste afgeleiden van de onbekende functie u bevat, namelijk

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}.$$

In dit multidimensionaal geval wordt het karakter van de PDE bepaald door de eigenwaarden van de matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$.

Definitie 2.2.9. De PDE (2.8) heet

- (i) parabolisch als er minstens één eigenwaarde nul is,
- (ii) elliptisch als alle eigenwaarde verschillend zijn van nul en hetzelfde teken hebben,
- (iii) hyperbolisch als alle eigenwaarden verschillend zijn van nul en op één na hetzelfde teken hebben.

Voorbeeld 2.2.10.

- (i) De Laplacevergelijking is een lineaire elliptische PDE;
- (ii) De warmtevergelijking is een lineaire parabolische PDE;
- (iii) De golfvergelijking is een lineaire hyperbolische PDE.

2.2.1 Abstracte variationele randwaardenproblemen

We gaan de basis leggen voor het oplossen van elliptische randwaardenproblemen. Daartoe starten we met de definitie van een randwaardenprobleem.

Definitie 2.2.11 (Randwaardenprobleem). Een randwaardenprobleem is een differentiaalvergelijking samen met een verzameling van aanvullende beperkingen, de randcondities genoemd.

Definitie 2.2.12. De drie meest voorkomende randcondities zijn:

- (i) een Dirichlet-randconditie specificeert de waarde dat een oplossing van een PDE moet aannemen op (een deel van) de rand van het domein. Bijvoorbeeld

$$u = g \text{ op } \partial\Omega,$$

met u de onbekende oplossing gedefinieerd op het domein Ω en g een functie gedefinieerd op de rand $\partial\Omega$.

- (ii) een Neumann-randconditie specificeert de waarde dat de normale afgeleide van de oplossing van een PDE moet aannemen op (een deel van) de rand van het domein. Bijvoorbeeld

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ op } \partial\Omega,$$

met u de onbekende oplossing gedefinieerd op het domein Ω , ν de eenheidsvector langs de uitwendige normaal en g een functie gedefinieerd op de rand $\partial\Omega$.

- (iii) een Robin-randconditie specificeert de waarde dat een lineaire combinatie van de normale afgeleide van de oplossing van een PDE met de oplossing zelf moet aannemen op (een deel van) de rand van het domein. Het is dus een combinatie van een Dirichlet- en Neumann-randconditie. Bijvoorbeeld

$$au + b \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ op } \partial\Omega,$$

met $a, b \in \mathbb{R}_0$ (de verzameling van de reële getallen verschillend van nul), u de onbekende oplossing gedefinieerd op het domein Ω , ν de eenheidsvector langs de uitwendige normaal en g een functie gedefinieerd op de rand $\partial\Omega$. Het is ook mogelijk dat a en b functies zijn.

Alle soorten van randcondities kunnen gecombineerd worden. Bijvoorbeeld Dirichlet op Γ_D , Neumann op Γ_N en Robin op Γ_R , samen met de voorwaarde dat

$$\overline{\partial\Omega} = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N} \cup \overline{\Gamma_R}$$

en dat alle randdelen Γ_D, Γ_N en Γ_R disjunct zijn

$$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \Gamma_N \cap \Gamma_R = \Gamma_R \cap \Gamma_D = \emptyset.$$

Vervolgens definiëren we een functionaal en een bilineaire vorm op een Hilbertruimte V uitgerust met het inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, de geassocieerde norm is $\|u\|_V = \sqrt{\langle u, u \rangle_V}$.

Definitie 2.2.13 (Functionaal). Een afbeelding

$$f : V \rightarrow \mathbb{R} : u \rightarrow f(u)$$

is een functionaal op V , $f(u)$ is de waarde van f in het punt $u \in V$.

Definitie 2.2.14. Een functionaal f is lineair als en slecht als

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v), \quad \forall u, v \in D(f) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

waarbij $D(f)$ staat voor het domein (definitieverzameling) van de functionaal f .

Definitie 2.2.15. Een lineaire functionaal is begrensd als en slecht als

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{\|u\|_V \leq 1} |f(u)|$$

eindig is. De verzameling van alle lineaire begrensde functionalen op V noteren we met $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ en is een Banachruimte. Deze ruimte wordt ook de duale ruimte van V genoemd en genoteerd door V^* .

Opmerking 2.2.16. Er bestaat een $N > 0$ als f een begrensde functionaal is zodanig dat $|f(v)| \leq N \|v\|_V$ voor elke $v \in V$.

Definitie 2.2.17 (Bilineaire vorm). De afbeelding $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ is een bilineaire vorm op V , als

$$a(\alpha_1 u_1 + \beta_1 v_1, \alpha_2 u_2 + \beta_2 v_2) = \alpha_1 \alpha_2 a(u_1, u_2) + \beta_1 \beta_2 a(v_1, v_2) + \sum_{i,j=1}^2 \alpha_i \beta_j a(u_i, v_j)$$

geldt voor alle $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ en $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$.

De bilineaire vorm $a(\cdot, \cdot)$ is

(i) symmetrisch: als

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \forall u, v \in V,$$

(ii) begrensd of continu: als er een $C_M \in \mathbb{R}^+$ bestaat zodanig dat

$$|a(u, v)| \leq C_M \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V,$$

(iii) V -elliptisch of coërcief: als er een $C_m \in \mathbb{R}^+$ bestaat zodanig dat

$$C_m \|u\|_V^2 \leq a(u, u), \quad \forall u \in V.$$

We willen een partiële differentiaalvergelijking van de vorm

$$Au = f \tag{2.9}$$

met A een gegeven lineaire differentiaaloperator van de tweede orde en f een gegeven continue functie oplossen. In vele toepassingen bestaat de klassieke oplossing u niet. Deze klassieke oplossing heeft noodzakelijk continue afgeleiden tot op de tweede orde. Dan moeten we een oplossing zoeken met zwakkere eigenschappen. Het idee is als volgt. We kijken naar vergelijking (2.9) als een vergelijking in de duale ruimte V^* en beschouwen beide zijden van deze vergelijking als een functionaal. Wanneer we een functionaal toepassen op een element van V krijgen we een reëel getal. We vermenigvuldigen beide zijden van (2.9) met een willekeurige $\varphi \in V$ en integreren tenslotte de vergelijking over Ω . We krijgen

$$\int_{\Omega} Au\varphi = \int_{\Omega} f\varphi =: f(\varphi), \quad \forall \varphi \in V.$$

Deze formule bevat nog steeds afgeleiden tot de tweede orde van de onbekende u . Om deze voorwaarde te verzwakken kunnen we via de stelling van Green één afgeleide van de oplossing naar de testfunctie verschuiven. Op dit moment komen de randcondities, die gewoonlijk voorkomen bij een PDE, in het spel. De keuze van de testruimte V (ook de ruimte van testfuncties genoemd) hangt sterk af van deze randcondities. Na toepassing van de stelling van Green vinden we de variationele formulering van het probleem. Deze formulering is van de vorm

$$a(u, \varphi) = f(\varphi), \quad \forall \varphi \in V,$$

met a een bilineaire vorm geïnduceerd door de differentiaaloperator A .

Stelling 2.2.18 (Riesz representatiestelling). *Stel V een Hilbertruimte. Elke lineaire begrensde functionaal f op V kan geschreven worden als*

$$f(v) = \langle u, v \rangle_V, \quad \forall v \in V.$$

Het element $u \in V$ is uniek bepaald.

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [16], pp. 55. □

Definitie 2.2.19 (Probleem (V, a, f)). *Stel $a(\cdot, \cdot)$ een V -elliptische en continue bilineaire vorm in de Hilbertruimte V . Veronderstel $f \in V^*$. Het element $u \in V$ wordt de variationele zwakke oplossing genoemd van het probleem (V, a, f) als*

$$a(u, \varphi) = f(\varphi)$$

geldt voor alle $\varphi \in V$.

Het probleem is gegeven door de bilineaire vorm $a(\cdot, \cdot)$, de functionaal f en de Hilbertruimte V . Vandaar gebruiken we de notatie (V, a, f) .

Stelling 2.2.20 (Lax Milgramlemma). *Stel $a(\cdot, \cdot)$ een V -elliptische en continue bilineaire vorm in de Hilbertruimte V . Veronderstel $f \in V^*$. Dan bestaat er een unieke zwakke oplossing van het probleem (V, a, f) .*

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [16], pp. 62. □

Tot slot van dit hoofdstuk geven we nog enkele belangrijke definities en stellingen die later te pas komen.

Definitie 2.2.21. *Stel V een Hilbertruimte en V^* zijn duale. De rij $u_n \in V$ is zwak convergent als er een $u \in V$ bestaat zodanig dat*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(u), \quad \forall f \in V^*.$$

Het element u wordt de zwakke limiet van de rij u_n genoemd. We noteren dit door $u_n \rightharpoonup u$ in V .

Opmerking 2.2.22.

- (i) Uit de Riesz representatiestelling volgt dat $V^* \cong V$.
- (ii) De zwakke limiet is uniek als hij bestaat.
- (iii) De sterke convergentie impliceert zwakke convergentie.

- (iv) Als (u_n) zwak convergeert, dan is het begrensd, i.e. er bestaat een $C > 0$ zodanig dat $\|u_n\| \leq C$.

Definitie 2.2.23 (Zwak compact). Een verzameling M in een Banachruimte X is zwak compact als men voor elke begrensde rij $u_n \in M$ een zwak convergente deelrij kan vinden die convergeert naar een $u \in M$, i.e.,

$$f(u_{n_k}) \rightarrow f(u), \quad \forall f \in X^*.$$

Stelling 2.2.24. *Stel V een separabele Hilbertruimte. Dan is elke begrensde verzameling in V zwak compact.*

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [17], pp. 398. □

Gevolg 2.2.25. *Stel (u_n) een begrensde rij in een separabele Hilbertruimte V . Dan bestaat er een zwak convergente deelrij (u_{n_k}) met limiet u in V , i.e.*

$$f(u_{n_k}) \rightarrow f(u), \quad \forall f \in V^*.$$

2.2.2 Galerkin benadering

De oplossing van het probleem (V, a, f) gedefinieerd in Definitie 2.2.19 is een element van de Hilbertruimte V . Deze ruimte is oneindig dimensionaal. Nu proberen we het volgende. We nemen een eindig dimensionale deelruimte V_h van V en proberen het probleem (V, a, f) op te lossen in deze deelruimte. Op die manier hebben we het oorspronkelijke probleem gewijzigd naar het volgende probleem.

Definitie 2.2.26 (Probleem (V_h, a, f)). Stel $a(\cdot, \cdot)$ een V -elliptische en continue bilineaire vorm in de Hilbertruimte V . Veronderstel $f \in V^*$ en V_h een eindig dimensionale deelruimte van V . Een element $u_h \in V_h$ wordt de oplossing van het probleem (V_h, a, f) genoemd als en slechts als

$$a(u_h, \varphi_h) = f(\varphi_h)$$

geldt voor alle $\varphi_h \in V_h$. Het element u_h wordt de Galerkin benadering van de oplossing u van het probleem (V, a, f) genoemd.

Opmerking 2.2.27.

- (i) Het eindig dimensionaal probleem (V_h, a, f) heeft exact dezelfde vorm als het originele probleem (V, a, f) . Het enige verschil tussen beide problemen is het feit dat de testfuncties in (V_h, a, f) genomen zijn uit de eindig dimensionale deelruimte V_h in plaats van de volledige ruimte V .
- (ii) Alle eigenschappen van de bilineaire vorm a , die geldig zijn in V , zijn automatisch ook geldig in V_h . Bijgevolg volgt de existentie en uniekheid van de oplossing van het probleem (V_h, a, f) uit het Lax Milgram lemma.

Stel $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ een basis van de deelruimte V_h , i.e. $V_h = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$. We zoeken de oplossing u_h van de volgende vorm $u_h = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$. We substitueren deze vorm in het probleem (V_h, a, f) en stellen $\varphi_h = \varphi_j$ voor elke $j = 1, \dots, n$. We vinden

$$a\left(\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i, \varphi_j\right) = f(\varphi_j) \quad \text{of} \quad \sum_{i=1}^n c_i a(\varphi_i, \varphi_j) = f(\varphi_j),$$

voor elke $j = 1, \dots, n$. Bijgevolg is $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ de oplossing van het algebraïsch systeem (een stelsel van vergelijkingen)

$$M\mathbf{c} = \mathbf{f} \quad (2.10)$$

met $\mathbf{f} = (f(\varphi_1), \dots, f(\varphi_n))^T$ en

$$M = \begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_1) & \dots & a(\varphi_n, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_2) & a(\varphi_2, \varphi_2) & \dots & a(\varphi_n, \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_n) & a(\varphi_2, \varphi_n) & \dots & a(\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix}.$$

Dat deze matrix M positief definitief⁸ is volgt uit de V -ellipticiteit van a . Immers, er bestaat dan een constante $C_m > 0$ zodanig dat voor elke $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \neq (0, \dots, 0)^T$ geldt dat

$$0 < \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i \right\|^2 \leq \frac{1}{C_m} a \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \right) = \frac{1}{C_m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j a(\varphi_i, \varphi_j) = \frac{1}{C_m} \boldsymbol{\lambda}^T M \boldsymbol{\lambda}.$$

Bijgevolg is M regulier en bestaat er een unieke oplossing van het algebraïsch systeem (2.10).

We hebben dus het probleem (V_h, a, f) omgezet tot een algebraïsch systeem (2.10). Dit systeem kan opgelost worden door een algebraïsch solver zoals Matlab, Maple of FreeFem+++. Op deze manier krijgen we een uniek bepaalde u_h als de oplossing van (V_h, a, f) . Wat kunnen we zeggen over de benaderingsfout? Onder een benadering verstaan we het feit dat we het probleem (V, a, f) hebben opgelost in V_h , wat equivalent is met het probleem (V_h, a, f) oplossen. Het antwoord op deze vraag vinden we in het Cea lemma.

Lemma 2.2.28 (Cea lemma). *Stel u de oplossing van het probleem (V, a, f) en u_h de Galerkin benadering van u in de ruimte V_h . Dan bestaat er een positieve $C > 0$ zodanig dat*

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V.$$

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [16], pp. 64. □

Opmerking 2.2.29.

- (i) De constante C in het Cea lemma is onafhankelijk van de oplossing en de benaderingsparameter h .
- (ii) Uit het Cea lemma volgt dat de benaderingsfout kan geschat worden door de benadering van V door een deelruimte V_h . Bijgevolg is het aanvaardbaar om deelruimten V_h te beschouwen die V benaderen met een voldoende nauwkeurigheid. Het is niet voldoende om één deelruimte V_h te nemen.
- (iii) Zonder verlies van algemeenheid kunnen we veronderstellen dat $h \in (0, 1]$. De parameter h beschrijft de kwaliteit van de benadering. We kunnen h zien als $\frac{1}{n}$, met n de dimensie van de deelruimte V_h van V . Dus hoe dichter h bij nul, hoe beter de benadering.

⁸We noemen een matrix M positief definitief als $\boldsymbol{\beta}^T M \boldsymbol{\beta} > 0$ voor alle $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$. Een positief definitieve matrix is regulier (zie bijvoorbeeld [15], pp. 760). De determinant van M is dus verschillend van nul.

Definitie 2.2.30. Stel u de oplossing van het probleem (V, a, f) en u_h de Galerkin benadering van die oplossing in de deelruimte V_h . We zeggen dat de rij van Galerkin benaderingen convergeert naar de oplossing $u \in V$, als

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0.$$

Opmerking 2.2.31. Uit het Cea lemma volgt dat we een rij moeten construeren van eindig dimensionale deelruimten $V_h \subset V$, waarvoor geldt

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V \rightarrow 0 \text{ als } h \rightarrow 0, \forall u \in V.$$

Als dit geldt hebben we immers de convergentie van de Galerkin benaderingen u_h naar de exacte oplossing u .

2.2.3 Eindige elementenmethode

De eindige elementenmethode is een efficiënte methode voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen van het elliptisch type. Het is een methode voor het vinden van een benaderende oplossing. Een differentiaalvergelijking kan naar een stelsel van lineaire vergelijkingen worden getransformeerd via de Galerkin methode (zie Hoofdstuk 2.2.2). Overeenstemmend met het Cea lemma kan de convergentie van de Galerkin methode herleid worden tot het probleem rondom de benadering van de ruimte V van testfuncties door eindig dimensionale deelruimten V_h (zie Opmerking 2.2.31). We leggen de basisideeën van de eindige elementenmethode voor elliptische problemen in één en twee dimensies uit. We gaan geschikte eindig dimensionale deelruimten V_h construeren. De bijhorende basisfuncties en de studie van de convergentie van de benaderende oplossing naar de exacte oplossing laten we achterwege.

De eindige elementenmethode is gebaseerd op een variationele formulering van een probleem onder beschouwing. De ruimte van testfuncties is gewoonlijk een geschikte Sobolevruimte. Bovendien is de testruimte op zo'n manier geconstrueerd dat de ruimte $C^\infty(\bar{\Omega})$ er dicht in is (zie Hoofdstuk 2.1.5). Het is zo'n ruimte van testfuncties dat we willen benaderen door eindig dimensionale deelruimten.

Het basisidee van de eindige elementenmethode in één dimensie is om het domein $\Omega \subset \mathbb{R}$ te splitsen in een eindig aantal disjuncte open delen $\Omega_i, i = 1, \dots, n$ ($\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$), met $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n \bar{\Omega}_i$. De exacte oplossing u zal benaderd worden door voldoende gladde functies op elke Ω_i , die afhankelijk zijn van de kwaliteit van de benadering dat we willen. Daarna bekijken we de benadering van u op het volledige domein Ω . Zonder verlies van algemeenheid mogen we veronderstellen dat $\Omega = (a, b)$. We beschouwen de volgende partitie van Ω

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

We stellen $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$ voor $i = 1, \dots, n$ met $h_i = |\Omega_i| = x_i - x_{i-1}$. De grootste lengte van de deelintervallen wordt genoteerd door

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i.$$

Stel $P_k(\Omega_i)$ de verzameling van alle polynomen van een graad kleiner dan of gelijk aan k die gedefinieerd zijn op Ω_i . We introduceren de notatie

$$V_h^{m,k} = \left\{ \varphi \in C^m(\bar{\Omega}) : \varphi|_{\Omega_i} \in P_k(\Omega_i), i = 1, \dots, n \right\}.$$

De elementen van $V_h^{m,k}$ hebben continue afgeleiden tot de orde m in het volledige domein Ω , terwijl de restrictie van een element op Ω_i een polynoom is met graad kleiner dan of gelijk aan k . Het geval $m = 0$ correspondeert met de zogenaamde Lagrange eindige elementenmethode. Bijvoorbeeld $V_h^{0,1}$ is de ruimte van continue stuksgewijze lineaire functies en is eindig dimensionaal. De eindige dimensionale ruimte $V_h^{0,2}$ is de ruimte van de continue stuksgewijze kwadratische functies.

Stel Ω een polygonaal⁹ domein in \mathbb{R}^2 . We beschouwen een triangulatie τ_h van Ω door Ω te verdelen in een verzameling $\tau_h = \{D_1, \dots, D_E\}$ van niet overlappende driehoeken D_l ,

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{1 \leq l \leq E} \bar{D}_l \equiv \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \dots \cap \bar{D}_E,$$

zodat geen hoekpunt van een driehoek op een zijde van een andere driehoek ligt. Voor twee driehoeken in deze triangulatie kunnen er zich dus drie en slechts drie situaties voordoen:

- (i) de twee gesloten driehoeken hebben niets gemeen;
- (ii) de twee gesloten driehoeken hebben één hoekpunt gemeen;
- (iii) de twee gesloten driehoeken hebben een zijde gemeen.

We voeren de netparameter h in:

$$h = \max_{D_l \in \tau_h} h_{D_l}, \quad h_{D_l} = \text{diam}(D_l) = \text{de langste zijde van } D_l.$$

Verder stellen we ρ_{D_l} de diameter van de ingeschreven cirkel in de driehoek D_l . In feite zullen we niet één enkele triangulatie τ_h beschouwen, maar een familie $(\tau_h)_{h \rightarrow 0}$. We onderstellen dat deze familie regulier is, dit wil zeggen dat een constante $C > 0$ bestaat, onafhankelijk van de triangulatie τ_h , i.e. onafhankelijk van h , zo dat

$$\frac{h_{D_l}}{\rho_{D_l}} \leq C, \quad \forall D_l \in \tau_h \text{ en } \forall h \in (0, 1].$$

Deze voorwaarde betekent dat de driehoeken $D_l \in \tau_h$ niet willekeurig smal mogen worden, of, equivalent, dat de hoeken van de driehoeken D_l niet willekeurig klein mogen worden. Dit wil zeggen dat er een $\theta_0 > 0$ bestaat zodanig dat $\theta_{D_l} \geq \theta_0$ voor alle driehoeken $D_l \in \tau_h$ met θ_{D_l} de kleinste hoek van driehoek D_l . We definiëren de volgende ruimte

$$X_h^{m,k} = \left\{ \varphi \in C^m(\bar{\Omega}) : \varphi|_{D_l} \in P_k(D_l), \forall D_l \in \tau_h \right\},$$

met $P_k(D_l)$ de ruimte van veeltermen van graad kleiner dan of gelijk aan k gedefinieerd op D_l . Het geval $m = 0$ correspondeert opnieuw met de Lagrange eindige elementenmethode. De ruimte $X_h^{0,1}$ is de ruimte van continue stuksgewijze lineaire functies en is eindig dimensionaal.

⁹Om fouten in de benadering van het domein te vermijden.

De standaard eindige elementenmethode omvat dezelfde stappen in het één- en twee dimensionaal geval:

1. de herformulering van het randwaardenprobleem, gesteld voor een partiële differentiaalvergelijking, in variationele vorm;
2. de discretisering van dit variationeel probleem: door de ruimte van proef- en testfuncties te vervangen door een eindig dimensionale deelruimte, nl. een Lagrange eindige elementenruimte (voor tweede orde vraagstukken);
3. de constructie en het oplossen van het eindige elementenstelsel;
4. de foutenanalyse.

Tot slot van dit hoofdstuk kunnen we de volgende stelling formuleren.

Stelling 2.2.32. *Voor elke $k \geq 1$ en $h \in (0, 1]$ geldt*

(i) *indien Ω een interval is in \mathbb{R} dat*

$$V_h^{0,k} \subset H^1(\Omega),$$

$$V_h^{1,k} \subset H^2(\Omega).$$

(ii) *indien Ω een polygonaal domein is in \mathbb{R}^2 dat*

$$X_h^{0,k} \subset H^1(\Omega),$$

$$X_h^{1,k} \subset H^2(\Omega).$$

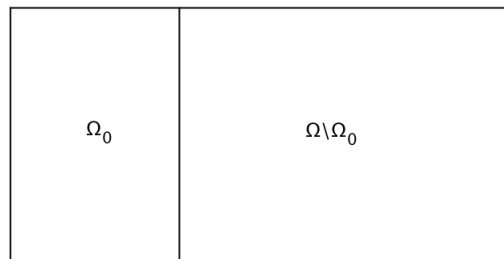
Bewijs. Zie bijvoorbeeld [18], pp. 1.125. □

We hebben nu de theoretisch basis gelegd voor het vervolg van dit werk. In het volgende hoofdstuk geven we de probleemstelling.

Hoofdstuk 3

Parabolisch begin- en randwaardenprobleem

Warmtetransport in een materiaal gebeurt via conductie¹. In dit hoofdstuk gaan we een invers conductieprobleem beschouwen op een rechthoekig begrensde domein $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ in het tijdsinterval $[0, T]$, met $T \in \mathbb{R}_0$ gefixeerd. Het domein Ω is opgesplitst in twee disjuncte deeldomeinen, genoteerd door Ω_0 en $\Omega \setminus \Omega_0$ (zie Figuur 3.1).



Figuur 3.1: Het rechthoekig domein Ω .

De warmtevergelijking is een parabolische partiële differentiaalvergelijking die de variatie van temperatuur in een gegeven domein in de tijd kan beschrijven. In twee dimensies is de warmtevergelijking:

$$\partial_t u - \nabla \cdot (K \nabla u) = f \text{ in } [0, T] \times \Omega,$$

met

$$u : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} : (t, x, y) \mapsto u(t, x, y)$$

de temperatuur als functie van de tijd en de ruimte,

$$K : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} : (t, x, y) \mapsto K(t, x, y)$$

de diffusiecoëfficiënt en

$$f : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} : (t, x, y) \mapsto f(t, x, y)$$

¹Geleiding, overdracht van warmte in een materiaal door het fysisch contact van twee lichamen met een verschillende temperatuur. Warmte stroomt van deeltjes met hogere kinetische energie (grotere bewegingssnelheid impliceert grotere temperatuur) naar minder energierijke (koudere) deeltjes.

de bronterm, deze modelleert alle externe bronnen die zorgen voor warmte winst of verlies (bijvoorbeeld radiator, airco of koelkast).

De warmtevergelijking is een tijdsafhankelijk probleem. Zonder verlies van algemeenheid mogen we veronderstellen dat het proces start op tijdstip $t = 0$. Voor de bepaling van $u(t, x, y)$ voor $t > 0$ en $(x, y) \in \Omega$ hebben we informatie nodig over de temperatuur aan het begin van het proces. De begintoestand $u(0, x, y)$ voor alle $(x, y) \in \Omega$ noemen we de beginvoorwaarde en noteren we met u_0 .

De diffusiecoëfficiënt geeft de thermische geleiding van een materiaal weer. Materialen met een hoge diffusiecoëfficiënt geleiden warmte goed. Materialen met een lage diffusiecoëfficiënt geleiden de warmte niet goed tot helemaal niet (we spreken dan over een thermische isolator).

In het probleem dat we gaan beschouwen veronderstellen we K onbekend op Ω_0 en K bekend op $\Omega \setminus \Omega_0$. We maken de volgende bijkomende veronderstellingen op de diffusiecoëfficiënt K :

- (i) K is enkel een functie van de tijd in Ω_0 , dit wil zeggen K is op elk tijdstip een constante in de ruimte Ω_0 ;
- (ii) $K(t, x, y) \geq C_0 > 0$, $\forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Omega$;
- (iii) $K \in L_\infty((0, T) \times \Omega)$, dit wil zeggen K is b.o. Lebesgue-meetbaar in $[0, T] \times \Omega$ en er bestaat een constante $C_1 > 0$ zodanig dat

$$K(t, x, y) \leq C_1, \quad \text{b.o. in } [0, T] \times \Omega;$$

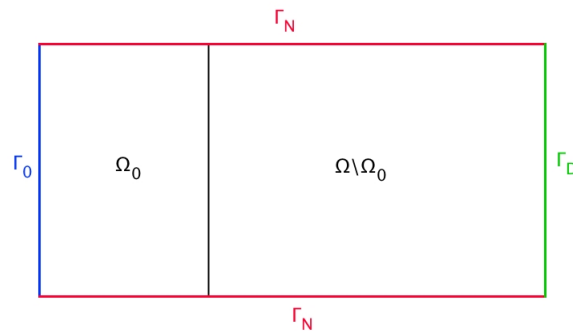
- (iv) K is Lipschitzcontinu met betrekking tot het eerste argument, dit wil zeggen er bestaat een constante $L_K > 0$ zodanig dat

$$|K(t_1, x, y) - K(t_2, x, y)| \leq L_K |t_1 - t_2|, \quad \forall (t_1, x, y), (t_2, x, y) \in [0, T] \times \Omega.$$

We nemen aan dat de rand van Ω , genoteerd door Γ , opgesplitst is in drie onderling disjuncte delen (zie Figuur 3.2):

$$\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_D.$$

Deze delen corresponderen respectievelijk met een niet-lokaal² of lokaal, Neumann en Dirichlet-deel van de rand.



Figuur 3.2: Het rechthoekig domein Ω met de randcondities.

²Randvoorwaarde in integraalvorm.

Het doel van dit werk is om het onderstaande lineaire parabolische begin- en randwaardeproblemen (afk.: IBVP³) van de tweede orde te bestuderen. In dit invers probleem zoeken we $(K(t, x, y), u(t, x, y))$ zodanig dat

$$\partial_t u(t, x, y) - \nabla \cdot (K(t, x, y) \nabla u(t, x, y)) = f(t, x, y) \quad \text{in } (0, T) \times \Omega; \quad (3.1)$$

$$u(t, x, y) = g^D(t, x, y) \quad \text{op } (0, T) \times \Gamma_D; \quad (3.2)$$

$$-K(t, x, y) \nabla u(t, x, y) \cdot \boldsymbol{\nu} = g^N(t, x, y) \quad \text{op } (0, T) \times \Gamma_N; \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_0} -K(t, x, y) \nabla u(t, x, y) \cdot \boldsymbol{\nu} = h(t) & \text{in } (0, T); \\ u(t, x, y) = U(t) & \text{op } (0, T) \times \Gamma_0; \end{cases} \quad (3.4)$$

$$u(0, x, y) = u_0 \quad \text{in } \Omega; \quad (3.5)$$

voor gegeven f, g^D, g^N, h, U en u_0 . Op basis van de gevonden K kan men dan een uitspraak doen over uit welk materiaal Ω_0 bestaat.

We gaan dieper in op de verschillende randcondities die in het invers probleem voorkomen. Op het randdeel Γ_D hebben we de Dirichlet-randconditie (3.2). De temperatuur is op elk tijdstip gekend in elke punt van Γ_D . Meer bepaald

$$u = g^D \quad \text{op } (0, T) \times \Gamma_D,$$

met

$$g^D : [0, T] \times \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R} : (t, x, y) \mapsto g^D(t, x, y)$$

een bekende functie.

Op het randdeel Γ_N hebben we de Neumann-randconditie (3.3). Deze randconditie geeft informatie over de normale afgeleide van u . De lokale flux of stroom van energie (warmte die per seconde wordt doorgeleid per eenheidsoppervlak) op elk tijdstip door elk punt van Γ_N is bekend, dit wil zeggen

$$-K \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = g^N \quad \text{op } (0, T) \times \Gamma_N, \quad (3.6)$$

met K de diffusiecoëfficiënt, $\boldsymbol{\nu}$ de eenheidsvector langs de uitwendige normaal op Γ_N en

$$g^N : [0, T] \times \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R} : (t, x, y) \mapsto g^N(t, x, y),$$

een gegeven functie. Het minteken in (3.6) geeft weer dat warmte zich verplaatst van een warmer naar een kouder lichaam. Immers, de lokale flux door de rand is positief als er warmte wegloopt uit Ω via Γ_N ($\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} < 0$) en negatief als er warmte binnenkomt in Ω via Γ_N ($\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} > 0$).

Op het randdeel Γ_0 beschouwen we twee voorwaarden (zie (3.4)). De niet-lokale voorwaarde is dat de totale flux door de rand Γ_0 op elk tijdstip gekend is, dit wil zeggen

$$\int_{\Gamma_0} -K \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = h,$$

³Initial Boundary Value Problem

met

$$h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto h(t)$$

een bekende functie. De lokale voorwaarde stelt dat de oplossing op Γ_0 enkel een functie is van de tijd:

$$u = U \text{ op } (0, T) \times \Gamma_0,$$

met

$$U : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto U(t)$$

een gegeven functie.

In klassieke inverse problemen is er extra bijkomende informatie nodig om een onbekende coëfficiënt te bepalen. In het invers probleem (3.1)-(3.5) is er één vrijheidsgraad⁴ op elk tijdstip. Immers, K is onbekend en enkel tijdsafhankelijk in Ω_0 . Hieruit volgt dat we op elk tijdstip één bijkomende vergelijking nodig hebben om een oplossing van het invers probleem (3.1)-(3.5) te bepalen. Deze vergelijking bekomen we door de niet-lokale, respectievelijk de lokale randvoorwaarde op Γ_0 als bijkomende informatie te beschouwen. Deze werkwijze geeft ons twee methoden om het invers probleem (3.1)-(3.5) op te lossen.

Beide oplossingsmethoden bestaan uit een hulpvraagstuk. Deze hulpvraagstukken bekomen we door de niet-lokale en lokale voorwaarde op Γ_0 apart te beschouwen. In het eerste hulpvraagstuk (IBVP1) zoeken we u voor gegeven K zodanig dat

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x, y) - \nabla \cdot (K(t, x, y) \nabla u(t, x, y)) = f(t, x, y) & \text{in } (0, T) \times \Omega; \\ u(t, x, y) = g^D(t, x, y) & \text{op } (0, T) \times \Gamma_D; \\ -K(t, x, y) \nabla u(t, x, y) \cdot \nu = g^N(t, x, y) & \text{op } (0, T) \times \Gamma_N; \\ \int_{\Gamma_0} -K(t, x, y) \nabla u(t, x, y) \cdot \nu = h(t) & \text{in } (0, T); \\ u(0, x, y) = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

In het tweede hulpvraagstuk (IBVP2) zoeken we u voor gegeven K zodanig dat

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x, y) - \nabla \cdot (K(t, x, y) \nabla u(t, x, y)) = f(t, x, y) & \text{in } (0, T) \times \Omega; \\ u(t, x, y) = g^D(t, x, y) & \text{op } (0, T) \times \Gamma_D; \\ -K(t, x, y) \nabla u(t, x, y) \cdot \nu = g^N(t, x, y) & \text{op } (0, T) \times \Gamma_N; \\ u(t, x, y) = U(t) & \text{op } (0, T) \times \Gamma_0; \\ u(0, x, y) = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (3.8)$$

Dit hulpvraagstuk IBVP2 geven we de benaming ‘duaal’ probleem.

In hoofdstuk 4 en 5 gaan we aantonen dat onder bepaalde voorwaarden op de gegeven data beide voorwaartse problemen IBVP1 en IBVP2 een unieke zwakke oplossing u_K hebben in geschikte functieruimten. Dit wil zeggen dat er met elke gegeven K een andere unieke zwakke oplossing u_K correspondeert in beide voorwaartse problemen. Uit de oplossingenverzameling $\{u_K \mid K \in L_\infty((0, T) \times \Omega)\}$ van het probleem IBVP1 zoeken we dan de oplossing die voldoet aan de bijkomende voorwaarde

$$u|_{\Gamma_0} = U, \quad \text{in } [0, T]. \quad (3.9)$$

⁴Eén onafhankelijke parameter waarmee het aspect van een fysisch systeem wordt vastgelegd. Onafhankelijk wil zeggen dat de waarde van een parameter kan gekozen worden zonder dat een andere parameter wordt vastgelegd.

Uit de oplossingenverzameling $\{u_K \mid K \in L_\infty((0, T) \times \Omega)\}$ van het ‘dual’ probleem IBVP2 (3.8) zoeken we de oplossing die voldoet aan de bijkomende voorwaarde

$$\int_{\Gamma_0} -K \nabla u \cdot \nu = h \quad \text{in } (0, T). \quad (3.10)$$

Via deze twee oplossingsmethoden kunnen we de zwakke oplossing (K, u) van het invers probleem (3.1)-(3.5) vinden.

Door gebruik te maken van de twee hulpvraagstukken kunnen we het invers probleem (3.1)-(3.5) op de volgende twee wijzen formuleren:

- (i) Voor elke gegeven U , vind $K > 0$, de diffusiecoëfficiënt van het beoogde materiaal, zodanig dat het spoor op de rand Γ_0 van de oplossing u_K van het voorwaarts hulpvraagstuk IBVP1 gelijk is aan U , dit wil zeggen $u_K|_{\Gamma_0} = U$;
- (ii) Voor elke gegeven h , vind $K > 0$, de diffusiecoëfficiënt van het beoogde materiaal, zodanig dat de totale flux door de rand Γ_0 gelijk is aan h , dit wil zeggen $\int_{\Gamma_0} -K \nabla u_K \cdot \nu = h$, met u_K de oplossing van het voorwaarts hulpvraagstuk IBVP2.

In hoofdstuk 4 tonen we aan dat het hulpvraagstuk IBVP1 voor gegeven K onder bepaalde voorwaarden goed gedefinieerd is in de betekenis van Hadamard (zie Definitie 2.2.4). Daarnaast bewijzen we dat het invers probleem (3.1)-(3.5) bestaande uit het voorwaarts vraagstuk IBVP1 en de bijkomende voorwaarde (3.9) onder bepaalde voorwaarden tenminste één zwakke oplossing heeft. Hetzelfde onderzoeken we voor het ‘dual’ hulpvraagstuk IBVP2 in combinatie met de bijkomende voorwaarde (3.10) in hoofdstuk 5.

Hoofdstuk 4

Analyse van het probleem

In dit hoofdstuk onderzoeken we of het hulpvraagstuk IBVP1 (3.7) voor gegeven K onder bepaalde voorwaarden op de datafuncties goed gedefinieerd is in de betekenis van Hadamard (zie Definitie 2.2.4). Daarna onderzoeken we of het invers probleem (3.1)-(3.5) bestaande uit het voorwaarts vraagstuk IBVP1 en de bijkomende voorwaarde (3.9) onder bepaalde voorwaarden tenminste één oplossing heeft.

We herhalen het hulpvraagstuk IBVP1 voor gegeven K :

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot (K \nabla u) = f & \text{in } (0, T) \times \Omega; \\ u = g^D & \text{op } (0, T) \times \Gamma_D; \\ -K \nabla u \cdot \nu = g^N & \text{op } (0, T) \times \Gamma_N; \\ \int_{\Gamma_0} -K \nabla u \cdot \nu = h & \text{in } (0, T); \\ u(0, x, y) = u_0 & \text{in } \Omega; \end{cases} \quad (4.1)$$

in een rechthoekig domein $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en een eindig tijdsinterval $[0, T]$. We nemen dus voor even aan dat K gekend is op Ω_0 . Merk op dat K enkel op dit deel van het domein varieert. Alle datafuncties zijn gedefinieerd in Hoofdstuk 3.

Om aan te tonen dat dit voorwaarts probleem goed gedefinieerd is in de betekenis van Hadamard beginnen we met de variationele formulering van het hulpvraagstuk IBVP1 (4.1) op te stellen. Maar eerst maken we nog volgende belangrijke opmerking.

Opmerking 4.0.33. In het vervolg stellen we C (en andere constanten) een generieke constante die van plaats tot plaats mag verschillen. Met ε stellen we een generieke positieve kleine constante voor, met C_ε een positieve grote constante afhankelijk van ε .

4.1 Opstellen variationeel vraagstuk

Het opstellen van een variationeel vraagstuk verloopt in drie stappen. In de eerste stap worden beide leden van de differentiaalvergelijking (zie (4.1)) vermenigvuldigd met een testfunctie $\varphi \in H^1(\Omega)$ en geïntegreerd over Ω . We vinden

$$(\partial_t u, \varphi) - (\nabla \cdot (K \nabla u), \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Eliminatie van de tweede orde afgeleiden via Green (zie Gevolg 2.1.80) in de tweede stap geeft

$$(\partial_t u, \varphi) + (K \nabla u, \nabla \varphi) + (-K \nabla u \cdot \nu, \varphi)_\Gamma = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (4.2)$$

In stap 3 komen de randcondities in het spel. We beperken de testfuncties tot de ruimte

$$V_1 = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi|_{\Gamma_D} = 0 \text{ en } \varphi|_{\Gamma_0} \text{ is constant} \right\}.$$

V_1 is een gesloten deelruimte van $H^1(\Omega)$ en is dus een Hilbertruimte met inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ en norm $\|\cdot\|_1$ (Eigenschap 2.1.27). De zwakke oplossing van het voorwaarts probleem (4.1) moet op de rand Γ_D gelijk zijn aan de Dirichlet datafunctie g^D . Een element uit de testruimte V_1 heeft spoor nul op Γ_D en voldoet dus niet aan het voorwaarts probleem (4.1). Zonder de algemeenheid te schaden kunnen we echter stellen dat $g^D = 0$. Als we g^D niet nul stellen, mogen we aannemen (gegarandeerd door Friedman omdat $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_D = \emptyset$, uit [24], Lemma 5.1) dat de Dirichlet datafunctie g^D kan verlengd worden in het volledige domein Ω tot een functie \tilde{g}^D op zo'n manier dat

$$\tilde{g}^D \in C([0, T], H^1(\Omega)), \quad \tilde{g}^D = \begin{cases} g^D & \text{op } [0, T] \times \Gamma_D; \\ 0 & \text{op } [0, T] \times \Gamma_0. \end{cases}$$

Dan kunnen we ook aantonen dat er een unieke zwakke oplossing $u \in H^1(\Omega)$ van het voorwaarts probleem (4.1) bestaat zodanig dat $u - \tilde{g}^D \in V_1$. Maar, om het aantal termen in de variationele formulering te minimaliseren stellen we in het vervolg

$$g^D = 0.$$

We gaan nu de variationele formulering (4.2) verder vereenvoudigen. Voor alle $\varphi \in V_1$ vinden we

$$\begin{aligned} (-K\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}, \varphi)_\Gamma &= (-K\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}, \varphi)_{\Gamma_D} + (-K\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}, \varphi)_{\Gamma_N} + (-K\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}, \varphi)_{\Gamma_0} \\ &= 0 + (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} + \varphi|_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} -K\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} \\ &= (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} + \varphi|_{\Gamma_0} h. \end{aligned}$$

Aldus blijkt de klassieke oplossing u van het voorwaarts probleem (4.1) te voldoen aan het variationeel randwaardenprobleem

$$u \in V_1 : a(u, \varphi) = f(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_1.$$

met

$$a(u, \varphi) = (\partial_t u, \varphi) + (K\nabla u, \nabla \varphi)$$

en

$$f(\varphi) = (f, \varphi) - (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} h.$$

Op bovenstaande variationele formulering kunnen we Lax-Milgram niet rechtstreeks toepassen om tot een unieke zwakke variationele oplossing in de testruimte V_1 te komen omdat we te maken hebben met een tijdsafhankelijk probleem. We kunnen niet aantonen dat a begrensd en V_1 -elliptisch is. Bijvoorbeeld voor de V_1 -ellipticiteit vinden we ($K \geq C_0$)

$$\begin{aligned} a(u, u) &= (\partial_t u, u) + (K\nabla u, \nabla u) \\ &\geq \underbrace{(\partial_t u, u)}_{\geq 0} + C_0 \|\nabla u\|^2, \end{aligned}$$

wat we niet verder naar beneden kunnen afschatten.

We veronderstellen dat de beginconditie voldoet aan

$$u_0 \in L_2(\Omega).$$

De variationele formulering van het voorwaarts probleem (4.1) is als volgt: vind $u \in V_1$ zodanig dat

$$\begin{cases} (\partial_t u(t), \varphi) + (K(t) \nabla u(t), \nabla \varphi) = (f(t), \varphi) - (g^N(t), \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} h(t) & t \in (0, T); \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega; \end{cases} \quad (4.3)$$

voor elke $\varphi \in V_1$. In deze formulering hebben we de afhankelijk van $\mathbf{x} \in \Omega$ voor even achterwege gelaten.

De strategie die we gaan volgen om aan te tonen dat het voorwaarts probleem (4.1) goed gedefinieerd is, steunt op tijdsdiscretisatie en een bewijs dat benaderingen van de zwakke oplossing convergeren naar de zwakke oplossing van het voorwaarts probleem (4.1).

4.2 Tijdsdiscretisatie

We passen de Rothemethode (zie bijvoorbeeld [25] en [26]) toe voor de tijdsdiscretisatie. Neem $n \in \mathbb{N}$. We splitsen het tijdsinterval $[0, T]$ op in n gelijke deelintervallen $[t_{i-1}, t_i]$ (equidistante partitie) met $i = 1, \dots, n$ en $t_i = i\tau$ met $\tau = \frac{T}{n} < 1$.

Eerst introduceren we volgende notatie voor elke functie $z(t)$, nl.

$$z_i = z(t_i), \quad \delta z_i = \frac{z_i - z_{i-1}}{\tau}, \quad i = 1, \dots, n.$$

De tijdsafgeleide $\partial_t u(t_i)$ gaan we benaderen door het achterwaarts verschil

$$\partial_t u(t_i) \approx \delta u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau}.$$

Uit (4.3) volgt dat we voor $i = 1, \dots, n$ en $\varphi \in V_1$ volgend recurrent systeem van lineaire elliptische BVP's hebben

$$(\delta u_i, \varphi) + (K_i \nabla u_i, \nabla \varphi) = (f_i, \varphi) - (g_i^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} h_i. \quad (4.4)$$

De functie u_i is de benadering van u op de i -de tijdstap. Als we (4.4) oplossen voor $i = j$, dan kennen we reeds de functies u_0, \dots, u_{j-1} met u_0 de beginconditie.

De relatie (4.4) kan herschreven worden als

$$\underbrace{\left(\frac{u_i}{\tau}, \varphi \right) + (K_i \nabla u_i, \nabla \varphi)}_{=:\tilde{a}(u_i, \varphi)} = \underbrace{(f_i, \varphi) - (g_i^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} h_i + \left(\frac{u_{i-1}}{\tau}, \varphi \right)}_{=:\tilde{f}_i(\varphi)}. \quad (4.5)$$

We willen Lax-Milgram (zie Stelling 2.2.20) toepassen om het bestaan en uniek zijn van $u_i \in V_1$ te garanderen. Daarvoor is nodig dat $\tilde{a}(u_i, \varphi)$ een V_1 -elliptische en continue bilineaire vorm is en $\tilde{f}_i(\varphi)$ een lineaire begrensde functionaal. Uit $K \geq C_0$ volgt

$$\begin{aligned} \tilde{a}(u_i, u_i) &= \left(\frac{u_i}{\tau}, u_i \right) + (K_i \nabla u_i, \nabla u_i) \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{\tau} \|u_i\|^2}_{\geq 0} + C_0 \|\nabla u_i\|^2 \\ &\geq C_0 \|\nabla u_i\|^2, \end{aligned}$$

voor elke $u_i \in V_1$. Uit $u_i|_{\Gamma_D} = 0$ en Friedrichs (zie (2.6)) volgt dat er een constante $k > 0$ bestaat zodanig dat $\|u_i\|_1^2 \leq k \|\nabla u_i\|^2$. Bijgevolg is voor elke $u_i \in V_1$:

$$\tilde{a}(u_i, u_i) \geq \frac{C_0}{k} \|u_i\|_1^2,$$

dus \tilde{a} is V_1 -elliptisch. Uit de driehoeksongelijkheid, $K \leq C_1$, Cauchy-Schwarz en (2.4) volgt dat \tilde{a} continu is, immers

$$\begin{aligned} |\tilde{a}(u_i, \varphi)| &\leq \left| \left(\frac{u_i}{\tau}, \varphi \right) \right| + |(K_i \nabla u_i, \nabla \varphi)| \\ &\leq \frac{1}{\tau} \|u_i\| \|\varphi\| + C_1 \|\nabla u_i\| \|\nabla \varphi\| \\ &\leq \frac{1}{\tau} \|u_i\|_1 \|\varphi\|_1 + C_1 \|u_i\|_1 \|\varphi\|_1 \\ &\leq C \|u_i\|_1 \|\varphi\|_1, \end{aligned}$$

voor alle $u_i, \varphi \in V_1$. De functionaal $\tilde{f}_i(\varphi)$ is begrensd als $u_{i-1}, f \in L_2(\Omega)$, $g^N \in L_2(\Gamma_N)$ en $h \in C([0, T])$. Gebruikmakend van de driehoeksongelijkheid, Cauchy-Schwarz, de spoorongelijkheid, hulpstelling A.1.2 en (2.4) krijgen we voor alle $\varphi \in V_1$

$$\begin{aligned} &\left| (f_i, \varphi) - (g_i^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} h_i + \left(\frac{u_{i-1}}{\tau}, \varphi \right) \right| \\ &\leq \|f_i\| \|\varphi\| + \|g_i^N\|_{\Gamma_N} \|\varphi\|_{\Gamma_N} + |\varphi|_{\Gamma_0} |h_i| + \frac{1}{\tau} \|u_{i-1}\| \|\varphi\| \\ &\leq \|f_i\| \|\varphi\| + C \|g_i^N\|_{\Gamma_N} \|\varphi\|_1 + \frac{\|\varphi\|_{\Gamma_0}}{\sqrt{|\Gamma_0|}} |h_i| + \frac{1}{\tau} \|u_{i-1}\| \|\varphi\| \\ &\leq \|f_i\| \|\varphi\|_1 + C \|g_i^N\|_{\Gamma_N} \|\varphi\|_1 + C \|\varphi\|_1 |h_i| + \frac{1}{\tau} \|u_{i-1}\| \|\varphi\|_1 \\ &\leq C \left(\tau, \|u_{i-1}\|, \|h\|_{C([0, T])}, \|g^N\|_{\Gamma_N}, \|f\| \right) \|\varphi\|_1. \end{aligned}$$

Uit Lax-Milgram volgt nu dat $u_i \in V_1$ bestaat en uniek is. We kunnen volgende stelling formuleren.

Stelling 4.2.1. *Stel u_0 en $f \in L_2(\Omega)$, $g^N \in L_2(\Gamma_N)$, $h \in C([0, T])$, $K > 0$ en $K \in L_\infty((0, T) \times \Omega)$. Dan heeft het recurrent systeem van lineaire elliptische BVP's (4.4) voor elke $i = 1, \dots, n$ een unieke zwakke oplossing u_i in de ruimte van testfuncties V_1 .*

De volgende stap is een studie te maken van de stabiliteit van u_i .

4.3 A priori afschattingen

We berekenen enkele stabiliteitsresultaten voor $u_i, i = 1, \dots, n$ de unieke zwakke oplossingen van het recurrent systeem van lineaire elliptische BVP's (4.4). Daarbij maken we gebruik van enkele hulpstellingen (Young, Gronwall en Partiële sommatie) die terug te vinden zijn in de Appendix.

Lemma 4.3.1. *Stel $u_i, i = 1, \dots, n$ de unieke zwakke oplossingen van het recurrent systeem van lineaire elliptische BVP's (4.4). Stel $j \in \mathbb{N}$ en $1 \leq j \leq n$. Veronderstel $K \in L_\infty((0, T) \times \Omega)$ Lipschitzcontinu. Dan bestaat er een positieve constante C zodanig dat*

(i) indien $u_0 \in L_2(\Omega)$, $h \in C([0, T])$, $g^N \in L_2((0, T), L_2(\Gamma_N))$ en $f \in L_2((0, T), L_2(\Omega))$ dan

$$\|u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \leq C,$$

met $C = C\left(\|u_0\|, \|h\|_{C([0, T])}, \|g^N\|_{L_2((0, T), L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0, T), L_2(\Omega))}\right)$.

(ii) indien $u_0 \in H^1(\Omega)$, $h \in C([0, T])$, $g^N \in L_2((0, T), L_2(\Gamma_N))$ en $f \in L_2((0, T), L_2(\Omega))$ dan

$$\|\nabla u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \leq C,$$

met $C = C\left(\|u_0\|, \|\nabla u_0\|, \|h\|_{C([0, T])}, \|g^N\|_{L_2((0, T), L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0, T), L_2(\Omega))}\right)$.

Bewijs. We beginnen met het bewijs van (i). Stel $\varphi = u_i \tau$ in (4.4). Sommatie over $i = 1, \dots, j$ geeft:

$$\sum_{i=1}^j (u_i - u_{i-1}, u_i) + \sum_{i=1}^j (K_i \nabla u_i, \nabla u_i) \tau = \sum_{i=1}^j (f_i, u_i) \tau - \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i)_{\Gamma_N} \tau - \sum_{i=1}^j u_i|_{\Gamma_0} \tau h_i.$$

Uit hulpstelling A.1.3 en $K \geq C_0$ volgt

$$\begin{aligned} \frac{\|u_j\|^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + C_0 \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \\ \leq \sum_{i=1}^j (f_i, u_i) \tau - \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i)_{\Gamma_N} \tau - \sum_{i=1}^j u_i|_{\Gamma_0} \tau h_i + \frac{\|u_0\|^2}{2}. \end{aligned}$$

We nemen de absolute waarde van beide leden. Rekening houdend met het feit dat het linkerlid niet-negatief is en de driehoeksongelijkheid vinden we

$$\begin{aligned} \frac{\|u_j\|^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + C_0 \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \\ \leq \sum_{i=1}^j |(f_i, u_i)| \tau + \sum_{i=1}^j |(g_i^N, u_i)_{\Gamma_N}| \tau + \sum_{i=1}^j |u_i|_{\Gamma_0} h_i \tau + \frac{\|u_0\|^2}{2}. \quad (4.6) \end{aligned}$$

We bekijken de termen in het rechterlid apart. Uit Cauchy-Schwarz en Young volgt dat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j |(f_i, u_i)| \tau &\leq \sum_{i=1}^j \|f_i\| \|u_i\| \tau \\ &\leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Achtereenvolgens toepassen van Cauchy-Schwarz, Young, de spoorongelijkheid en (2.4) geeft

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^j \left| (g_i^N, u_i)_{\Gamma_N} \right| \tau &\leq \sum_{i=1}^j \|g_i^N\|_{\Gamma_N} \|u_i\|_{\Gamma_N} \tau \\
&\leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|_{\Gamma_N}^2 \tau \\
&\leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|_1^2 \tau \\
&\leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Uit u_i constant op Γ_0 , hulpstelling A.1.2, de spoorongelijkheid, Young en (2.4) volgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^j \left| u_i|_{\Gamma_0} h_i \right| \tau &\leq \sum_{i=1}^j \frac{\|u_i\|_{\Gamma_0}}{\sqrt{|\Gamma_0|}} |h_i| \tau \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{|\Gamma_0|}} \sum_{i=1}^j \|u_i\|_1 |h_i| \tau \\
&\leq C \sum_{i=1}^j \left(\varepsilon \|u_i\|_1^2 + C_\varepsilon |h_i|^2 \right) \tau \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j |h_i|^2 \tau. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Combinatie van (4.6), (4.7), (4.8) en (4.9) levert

$$\begin{aligned}
\frac{\|u_j\|^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + C_0 \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \\
\leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j |h_i|^2 \tau \\
+ \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau + \frac{\|u_0\|^2}{2}
\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}
\frac{\|u_j\|^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + (C_0 - \varepsilon) \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \\
\leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j |h_i|^2 \tau + \frac{\|u_0\|^2}{2} + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Kies $\varepsilon > 0$ zodanig dat $C_0 - \varepsilon > 0$. Als we in (4.10) het linkerlid verkleinen door de factor

$\min(\frac{1}{2}, C_0 - \varepsilon)$ voorop te zetten en deze positieve term weg te delen vinden we

$$\begin{aligned} & \|u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \\ & \leq C \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + C \sum_{i=1}^j \|g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + C \sum_{i=1}^j |h_i|^2 \tau + C \|u_0\|^2 + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau \end{aligned}$$

of

$$\|u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \leq D + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau, \quad (4.11)$$

met $D = D\left(\|u_0\|, \|h\|_{C([0,T])}, \|g^N\|_{L_2((0,T),L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))}\right)$. Stel

$$y_j = \|u_j\|^2 + \sum_{k=1}^j \|u_k - u_{k-1}\|^2 + \sum_{k=1}^j \|\nabla u_k\|^2 \tau.$$

Vergroten van het rechterlid van (4.11) geeft

$$y_j \leq D + C \sum_{i=1}^j \left[\|u_i\|^2 \tau + \sum_{k=1}^i \|u_k - u_{k-1}\|^2 \tau + \sum_{k=1}^i \|\nabla u_k\|^2 \tau^2 \right]$$

of

$$y_j \leq D + C \sum_{i=1}^j y_i \tau.$$

Uit Gronwall volgt het gestelde: $y_j \leq D e^{CT}$.

Vervolgens gaan we (ii) bewijzen. Stel $\varphi = u_i - u_{i-1} = \tau \delta u_i$ in (4.4). Sommatie over $i = 1, \dots, j$ geeft:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^j (\delta u_i, \delta u_i) \tau + \sum_{i=1}^j (K_i \nabla u_i, \nabla [u_i - u_{i-1}]) \\ & = \sum_{i=1}^j (f_i, \delta u_i) \tau - \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i - u_{i-1})_{\Gamma_N} - \sum_{i=1}^j (u_i - u_{i-1})_{\Gamma_0} h_i. \end{aligned}$$

Uit hulpstelling A.1.6 volgt

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \frac{1}{2} (K_j \nabla u_j, \nabla u_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j (K_i \nabla [u_i - u_{i-1}], \nabla [u_i - u_{i-1}]) \\ & \leq \sum_{i=1}^j (f_i, \delta u_i) \tau + \frac{1}{2} (K_0 \nabla u_0, \nabla u_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j (\delta K_i \nabla u_{i-1}, \nabla u_{i-1}) \tau \\ & \quad - \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i - u_{i-1})_{\Gamma_N} - \sum_{i=1}^j (u_i - u_{i-1})_{\Gamma_0} h_i. \end{aligned}$$

Omdat $K \geq C_0$ geldt

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \frac{C_0}{2} \|\nabla u_j\|^2 + \frac{C_0}{2} \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \\ & \leq \sum_{i=1}^j (f_i, \delta u_i) \tau + \frac{1}{2} (K_0 \nabla u_0, \nabla u_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j (\delta K_i \nabla u_{i-1}, \nabla u_{i-1}) \tau \\ & \quad - \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i - u_{i-1})_{\Gamma_N} - \sum_{i=1}^j (u_i - u_{i-1})_{\Gamma_0} h_i. \end{aligned}$$

Het linkerlid is niet-negatief, als we de absolute waarde nemen van beide leden vinden we

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \frac{C_0}{2} \|\nabla u_j\|^2 + \frac{C_0}{2} \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \\ & \leq \sum_{i=1}^j |(f_i, \delta u_i)| \tau + \frac{1}{2} |(K_0 \nabla u_0, \nabla u_0)| + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j |(\delta K_i \nabla u_{i-1}, \nabla u_{i-1})| \tau \\ & \quad + \left| \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i - u_{i-1})_{\Gamma_N} \right| + \left| \sum_{i=1}^j (u_i - u_{i-1})_{\Gamma_0} h_i \right|. \quad (4.12) \end{aligned}$$

We gaan alle termen uit het rechterlid apart afschatten. Uit Cauchy-Schwarz en Young volgt dat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j |(f_i, \delta u_i)| \tau & \leq \sum_{i=1}^j \|f_i\| \|\delta u_i\| \tau \\ & \leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau. \quad (4.13) \end{aligned}$$

Door gebruik te maken van $|\delta K_i| = \frac{|K_i - K_{i-1}|}{\tau} \leq \frac{L_K(t_i - t_{i-1})}{\tau} = L_K$ (K Lipschitzcontinu) vinden we dat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j |(\delta K_i \nabla u_{i-1}, \nabla u_{i-1})| \tau & \leq L_K \sum_{i=1}^j \|\nabla u_{i-1}\|^2 \tau \\ & \leq L_K \|\nabla u_0\|^2 \tau + L_K \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau. \quad (4.14) \end{aligned}$$

Uit $K \leq C_1$ volgt

$$|(K_0 \nabla u_0, \nabla u_0)| \leq C_1 \|\nabla u_0\|^2. \quad (4.15)$$

Toepassen van stelling A.1.7 en de driehoeksongelijkheid geeft

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i - u_{i-1})_{\Gamma_N} \right| \\ & = \left| (g_j^N, u_j)_{\Gamma_N} - (g_0^N, u_0)_{\Gamma_N} - \sum_{i=1}^j (\delta g_i^N, u_{i-1})_{\Gamma_N} \tau \right| \\ & \leq \left| (g_j^N, u_j)_{\Gamma_N} \right| + \left| (g_0^N, u_0)_{\Gamma_N} \right| + \sum_{i=1}^j \left| (\delta g_i^N, u_{i-1})_{\Gamma_N} \right| \tau. \quad (4.16) \end{aligned}$$

Ook deze termen in het rechterlid schatten we apart af. Uit Cauchy-Schwarz, Young en Nečas volgt

$$\begin{aligned}
\left| (g_j^N, u_j)_{\Gamma_N} \right| &\leq \|g_j^N\|_{\Gamma_N} \|u_j\|_{\Gamma_N} \\
&\leq \frac{\|g_j^N\|_{\Gamma_N}^2}{2} + \frac{\|u_j\|_{\Gamma_N}^2}{2} \\
&\leq \frac{\|g_j^N\|_{\Gamma_N}^2}{2} + \varepsilon \|\nabla u_j\|^2 + C_\varepsilon \|u_j\|^2.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Omdat g_0^N en u_0 bekend zijn is

$$\left| (g_0^N, u_0)_{\Gamma_N} \right| \leq C. \tag{4.18}$$

Door gebruik te maken van Cauchy-Schwarz, Young en Nečas vinden we dat

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^j \left| (\delta g_i^N, u_{i-1})_{\Gamma_N} \right| \tau &\leq \sum_{i=1}^j \|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N} \|u_{i-1}\|_{\Gamma_N} \tau \\
&\leq \sum_{i=1}^j \frac{\|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N}^2}{2} \tau + \sum_{i=1}^j \frac{\|u_{i-1}\|_{\Gamma_N}^2}{2} \tau \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\nabla u_{i-1}\|^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_{i-1}\|^2 \tau \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + \varepsilon \|\nabla u_0\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \\
&\quad + C_\varepsilon \|u_0\|^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Dan volgt uit (4.16), (4.17), (4.18), (4.19) en $\tau < 1$ dat

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i - u_{i-1})_{\Gamma_N} \right| \\
&\leq C + \frac{\|g_j^N\|_{\Gamma_N}^2}{2} + \varepsilon \|\nabla u_j\|^2 + C_\varepsilon \|u_j\|^2 + \varepsilon \|\nabla u_0\|^2 \\
&\quad + C_\varepsilon \|u_0\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Stelling A.1.7 levert

$$\sum_{i=1}^j (u_i - u_{i-1})|_{\Gamma_0} h_i = u_j|_{\Gamma_0} h_j - u_0|_{\Gamma_0} h_0 - \sum_{i=1}^j \delta h_i u_{i-1}|_{\Gamma_0} \tau.$$

We nemen de absolute waarde van beide leden en vinden

$$\left| \sum_{i=1}^j (u_i - u_{i-1})|_{\Gamma_0} h_i \right| \leq |u_j|_{\Gamma_0} h_j + |u_0|_{\Gamma_0} h_0 + \sum_{i=1}^j \left| \delta h_i u_{i-1}|_{\Gamma_0} \right| \tau. \tag{4.21}$$

Opnieuw schatten we de termen in het rechterlid apart af. Uit u_j constant op Γ_0 , hulpstelling A.1.2, de spoorongelijkheid, Young en (2.4) volgt dat

$$\begin{aligned}
|u_j|_{\Gamma_0} h_j &\leq \frac{\|u_j\|_{\Gamma_0}}{\sqrt{|\Gamma_0|}} |h_j| \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{|\Gamma_0|}} \|u_j\|_1 |h_j| \\
&\leq \varepsilon \|u_j\|_1^2 + C_\varepsilon |h_j|^2 \\
&\leq \varepsilon \|u_j\|^2 + \varepsilon \|\nabla u_j\|^2 + C_\varepsilon |h_j|^2.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Omdat u_0 en h_0 bekend zijn is

$$|u_0|_{\Gamma_0} h_0 \leq C. \tag{4.23}$$

Door gebruik te maken van u_{i-1} constant op Γ_0 , hulpstelling A.1.2, de spoorongelijkheid, Young en (2.4) vinden we

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^j |\delta h_i u_{i-1}|_{\Gamma_0} \tau &\leq \sum_{i=1}^j |\delta h_i| \frac{\|u_{i-1}\|_{\Gamma_0}}{\sqrt{|\Gamma_0|}} \tau \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{|\Gamma_0|}} \sum_{i=1}^j |\delta h_i| \|u_{i-1}\|_1 \tau \\
&\leq C \sum_{i=1}^j \left(C_\varepsilon |\delta h_i|^2 + \varepsilon \|u_{i-1}\|_1^2 \right) \tau \\
&\leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j |\delta h_i|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_{i-1}\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\nabla u_{i-1}\|^2 \tau \\
&\leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j |\delta h_i|^2 \tau + \varepsilon \|u_0\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau \\
&\quad + \varepsilon \|\nabla u_0\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Combinatie van (4.21), (4.22), (4.23) en (4.24) levert dat ($\tau < 1$)

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^j (u_i - u_{i-1})|_{\Gamma_0} h_i \right| &\leq C + \varepsilon \|u_j\|^2 + \varepsilon \|\nabla u_j\|^2 + C_\varepsilon |h_j|^2 + \varepsilon \|u_0\|^2 + \varepsilon \|\nabla u_0\|^2 \\
&\quad + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j |\delta h_i|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Nu volgt uit (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), (4.20) en (4.25) dat

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \frac{C_0}{2} \|\nabla u_j\|^2 + \frac{C_0}{2} \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \\
& \leq C + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + C \|\nabla u_0\|^2 + C \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau + C_\varepsilon \|u_0\|^2 \\
& \quad + \frac{\|g_j^N\|_{\Gamma_N}^2}{2} + \varepsilon \|\nabla u_j\|^2 + C_\varepsilon \|u_j\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau \\
& \hspace{25em} + C_\varepsilon |h_j|^2 + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j |\delta h_i|^2 \tau
\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}
& (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \left(\frac{C_0}{2} - \varepsilon\right) \|\nabla u_j\|^2 + \frac{C_0}{2} \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \\
& \leq C + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + C \|\nabla u_0\|^2 + C \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau + C_\varepsilon \|u_0\|^2 + \frac{\|g_j^N\|_{\Gamma_N}^2}{2} \\
& \quad + C_\varepsilon \|u_j\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau + C_\varepsilon |h_j|^2 + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j |\delta h_i|^2 \tau.
\end{aligned}$$

We kiezen ε klein genoeg, maar positief, zodanig dat $(1 - \varepsilon) > 0$ en $(\frac{C_0}{2} - \varepsilon) > 0$. Eerst verkleinen we het linkerlid door de factor $\min(1 - \varepsilon, \frac{C_0}{2} - \varepsilon, \frac{C_0}{2}) > 0$ voorop te zetten en daarna delen we deze term weg naar het rechterlid. We krijgen

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \|\nabla u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \\
& \leq C + C \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + C \|\nabla u_0\|^2 + C \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau + C \|u_0\|^2 + C \|g_j^N\|_{\Gamma_N}^2 \\
& \quad + C \|u_j\|^2 + C \sum_{i=1}^j \|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau + C |h_j|^2 + C \sum_{i=1}^j |\delta h_i|^2 \tau
\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \|\nabla u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \\
& \leq E + C \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau + C \|u_j\|^2 + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau,
\end{aligned}$$

met $E = E\left(\|u_0\|, \|\nabla u_0\|, \|h\|_{C([0,T])}, \|g^N\|_{L_2((0,T), L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0,T), L_2(\Omega))}\right)$. Tenslotte vergroten we het rechterlid door gebruik te maken van de eerste a priori afchatting (i) en

bekomen we

$$\sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \|\nabla u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \leq E.$$

□

4.4 Goed gedefinieerdheid voorwaarts probleem

Tot nu toe hebben we enkel het bestaan van $u_i, i = 1, \dots, n$ bewezen (zie Stelling 4.2.1). Lemma 4.3.1 geeft informatie over de stabiliteit van u_i . Nu verlengen we de functies u_i in het volledige tijdsinterval $[0, T]$. Dit kan op twee manieren. We definiëren een stuksgewijze constante functie in de tijd

$$\bar{u}_n(t) = \begin{cases} u_0 & \text{voor } t = 0; \\ u_i & \text{voor } t \in]t_{i-1}, t_i]; \end{cases} \quad (4.26)$$

en een stuksgewijze lineaire continue functie in de tijd

$$u_n(t) = \begin{cases} u_0 & \text{voor } t = 0; \\ u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i & \text{voor } t \in]t_{i-1}, t_i]. \end{cases} \quad (4.27)$$

Beide functies worden de Rothefuncties genoemd.

Stelling 4.4.1. *Lemma 4.3.1(ii) kan herschreven worden voor $t \in [0, T]$ als*

$$\|\nabla \bar{u}_n(t)\|^2 + \int_0^t \|\partial_t u_n(s)\|^2 ds + \sum_{i=1}^n \left\| \nabla \int_{t_{i-1}}^{t_i} \partial_t u_n(s) \right\|^2 \leq C.$$

met $C = C \left(\|u_0\|, \|\nabla u_0\|, \|h\|_{C([0, T])}, \|g^N\|_{L_2((0, T), L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0, T), L_2(\Omega))} \right)$ en \bar{u}_n , respectievelijk u_n gedefinieerd zoals in (4.26), respectievelijk (4.27).

Bewijs. Uit lemma 4.3.1(ii) volgt dat voor $j = 1, \dots, n$ geldt dat

$$\|\nabla u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \leq C,$$

met $C = C \left(\|u_0\|, \|\nabla u_0\|, \|h\|_{C([0, T])}, \|g^N\|_{L_2((0, T), L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0, T), L_2(\Omega))} \right)$.

Uit $\|\nabla u_j\|^2 \leq C$ en $\bar{u}_n(t) = u_j$ voor elke $t \in]t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$ volgt dat $\|\nabla \bar{u}_n(t)\|^2 \leq C$. Als $t \in]t_{i-1}, t_i]$ is $\delta u_i = \partial_t u_n(t)$. Uit $\sum_{i=1}^n \|\delta u_i\|^2 \tau \leq C$ (deze sommatie kunnen we beschouwen als de oppervlakte onder een trapfunctie) volgt dat $\int_0^T \|\partial_t u_n(s)\|^2 ds \leq C$. A fortiori is $\int_0^t \|\partial_t u_n(s)\|^2 ds \leq C$. Bovendien is (als $t \in]t_{i-1}, t_i]$)

$$u_i - u_{i-1} = \tau \delta u_i = \tau \partial_t u_n(t) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \partial_t u_n(s) ds,$$

$$\text{en dus } \sum_{i=1}^n \left\| \nabla \int_{t_{i-1}}^{t_i} \partial_t u_n(s) \right\|^2 \leq C. \quad \square$$

Stelling 4.4.2. *Er geldt*

$$\int_0^T \|\nabla [u_n(t) - \bar{u}_n(t)]\|^2 dt + \int_0^T \|u_n(t) - \bar{u}_n(t)\|^2 dt \leq C\tau.$$

met $C = C \left(\|u_0\|, \|\nabla u_0\|, \|h\|_{C([0,T])}, \|g^N\|_{L_2((0,T),L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))} \right)$ en \bar{u}_n , respectievelijk u_n gedefinieerd zoals in (4.26), respectievelijk (4.27).

Bewijs. Als $t = 0$ is $u_n(t) - \bar{u}_n(t) = 0$. Indien $t \in]t_{i-1}, t_i]$, dan is

$$\begin{aligned} |u_n(t) - \bar{u}_n(t)| &= \left| u_{i-1} + \frac{t - t_{i-1}}{\tau} (u_i - u_{i-1}) - u_i \right| \\ &\leq |u_{i-1} - u_i| + \underbrace{\left| \frac{t - t_{i-1}}{\tau} \right|}_{\leq 1} |u_i - u_{i-1}| \\ &\leq 2|u_i - u_{i-1}|. \end{aligned}$$

Dan is $|u_n(t) - \bar{u}_n(t)|^2 \leq 4|u_i - u_{i-1}|^2$. Integratie van deze ongelijkheid over Ω geeft

$$\|u_n(t) - \bar{u}_n(t)\|^2 \leq 4 \|u_i - u_{i-1}\|^2. \quad (4.28)$$

Als we (4.28) integreren over het tijdsinterval $[0, T]$ vinden we ($\|u_i - u_{i-1}\|$ is een trapfunctie)

$$\int_0^T \|u_n(s) - \bar{u}_n(s)\|^2 ds \leq 4 \sum_{i=1}^n \|u_i - u_{i-1}\|^2 \tau \leq C\tau, \quad (4.29)$$

met $C = C \left(\|u_0\|, \|h\|_{C([0,T])}, \|g^N\|_{L_2((0,T),L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))} \right)$. De laatste ongelijkheid volgt uit lemma 4.3.1(i).

Analoog als voordien vinden we voor $t \in]t_{i-1}, t_i]$ dat

$$\begin{aligned} |\nabla [u_n(t) - \bar{u}_n(t)]| &= \left| \nabla [u_{i-1} - u_i] + \frac{t - t_{i-1}}{\tau} \nabla [u_i - u_{i-1}] \right| \\ &\leq 2|\nabla [u_i - u_{i-1}]|. \end{aligned}$$

Bijgevolg is $|\nabla [u_n(t) - \bar{u}_n(t)]|^2 \leq 4|\nabla [u_i - u_{i-1}]|^2$. Integratie van deze ongelijkheid over Ω en het tijdsinterval $[0, T]$ geeft wegens lemma 4.3.1(ii) ($\|u_i - u_{i-1}\|$ is een trapfunctie)

$$\int_0^T \|\nabla [u_n(s) - \bar{u}_n(s)]\|^2 ds \leq 4 \sum_{i=1}^n \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \tau \leq C\tau, \quad (4.30)$$

met $C = C \left(\|u_0\|, \|\nabla u_0\|, \|h\|_{C([0,T])}, \|g^N\|_{L_2((0,T),L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))} \right)$. Uit (4.29) en (4.30) volgt

$$\int_0^T \|\nabla [u_n(s) - \bar{u}_n(s)]\|^2 ds + \int_0^T \|u_n(s) - \bar{u}_n(s)\|^2 ds \leq C\tau,$$

met $C = C \left(\|u_0\|, \|\nabla u_0\|, \|h\|_{C([0,T])}, \|g^N\|_{L_2((0,T),L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))} \right)$. \square

Zoals de Rothefuncties definiëren we de volgende stuksgewijze constante functies in de tijd:

$$\bar{K}_n(t) = \begin{cases} K_0 & \text{voor } t = 0; \\ K_i & \text{voor } t \in]t_{i-1}, t_i]; \end{cases}$$

$$\bar{g}_n^N(t) = \begin{cases} g_0^N & \text{voor } t = 0; \\ g_i^N & \text{voor } t \in]t_{i-1}, t_i]; \end{cases}$$

$$\bar{h}_n(t) = \begin{cases} h_0 & \text{voor } t = 0; \\ h_i & \text{voor } t \in]t_{i-1}, t_i]; \end{cases}$$

$$\bar{f}_n(t) = \begin{cases} f_0 & \text{voor } t = 0; \\ f_i & \text{voor } t \in]t_{i-1}, t_i]. \end{cases}$$

De variationele formulering

$$(\delta u_i, \varphi) + (K_i \nabla u_i, \nabla \varphi) = (f_i, \varphi) - (g_i^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} h_i$$

is enkel geldig op de tijdstippen t_1, \dots, t_n . We kunnen deze variationele formulering herschrijven als (voor $t \in [0, T]$)

$$(\partial_t u_n(t), \varphi) + (\bar{K}_n(t) \nabla \bar{u}_n(t), \nabla \varphi) = (\bar{f}_n(t), \varphi) - (\bar{g}_n^N(t), \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} \bar{h}_n(t). \quad (4.31)$$

In deze relatie willen we de limiet voor $n \rightarrow \infty$ toepassen. Om dit te doen, tonen we de convergentie van u_n en \bar{u}_n aan in geschikte ruimten.

We hebben reeds verondersteld dat K Lipschitzcontinu is, dit wil zeggen dat er een $L_K > 0$ bestaat zodanig dat

$$|K(t_1) - K(t_2)| \leq L_K |t_1 - t_2|, \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T].$$

Voor het vervolg hebben we nodig dat ook g^N, h en f Lipschitzcontinu zijn. We nemen aan dat er constanten $L_{g^N}, L_h, L_f > 0$ bestaan zodanig dat $\forall t_1, t_2 \in [0, T]$ geldt dat

$$|g^N(t_1) - g^N(t_2)| \leq L_{g^N} |t_1 - t_2|,$$

$$|h(t_1) - h(t_2)| \leq L_h |t_1 - t_2|$$

en

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq L_f |t_1 - t_2|.$$

Opmerking 4.4.3. Uit K Lipschitzcontinu volgt dat voor elke $t \in]t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n$ geldt

$$\begin{aligned} |K(t) - \bar{K}_n(t)| &= |K(t) - K(t_i)| \\ &\leq L_K |t - t_i| \\ &\leq L_K \tau \\ &\leq L_K \frac{T}{n} \\ &\leq \frac{L_K}{n}. \end{aligned}$$

Hetzelfde geldt analoog voor g^N, h en f .

Lemma 4.4.4. *Stel $u_0 \in H^1(\Omega)$ en K, g^N, h en f Lipschitzcontinu. Dan bestaat er een $u \in C([0, T], L_2(\Omega)) \cap L_2((0, T), H^1(\Omega))$ zodanig dat*

$$u_n \rightarrow u \text{ voor } n \rightarrow \infty$$

in deze ruimten.

Bewijs. De ruimten $C([0, T], L_2(\Omega))$ en $L_2((0, T), H^1(\Omega))$ zijn Banachruimten. De rij $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ behoort tot beide ruimten. Immers uit lemma 4.3.1 volgt

$$\int_0^T \|u_n(s)\|_1^2 ds = \int_0^T \|u_n(s)\|^2 ds + \int_0^T \|\nabla u_n(s)\|^2 ds \leq C$$

en

$$\max_{t \in [0, T]} \|u_n(t)\| \leq C.$$

We gaan bewijzen dat $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een Cauchyrij is in beide ruimten, dit wil zeggen dat

$$\max_{t \in [0, T]} \|u_p(t) - u_q(t)\| \rightarrow 0 \text{ en } \int_0^T \|u_p(s) - u_q(s)\|_1^2 ds \rightarrow 0$$

als $\min(p, q) \rightarrow \infty$. De rij $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is dan convergent in beide Banachruimten. Aangezien de limiet van een rij uniek is, convergeert de rij $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naar een element in beide ruimten. Aantonen dat $\int_0^T \|u_p(s) - u_q(s)\|_1^2 ds \rightarrow 0$ als $\min(p, q) \rightarrow \infty$, is equivalent met bewijzen dat (wegens Friedrichs (2.6) omdat $u_i|_{\Gamma_D} = 0$)

$$\int_0^T \|\nabla [u_p(s) - u_q(s)]\|^2 ds \rightarrow 0$$

als $\min(p, q) \rightarrow \infty$. Om te beginnen herschrijven we (4.31) in de volgende vorm

$$\begin{aligned} (\partial_t u_n, \varphi) + (K \nabla u_n, \nabla \varphi) &= (\bar{f}_n, \varphi) + (K \nabla u_n, \nabla \varphi) + (K \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) \\ &\quad - (K \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) - (\bar{K}_n \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) - (\bar{g}_n^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} \bar{h}_n \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned} (\partial_t u_n, \varphi) + (K \nabla u_n, \nabla \varphi) &= (\bar{f}_n, \varphi) + ([K - \bar{K}_n] \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) \\ &\quad + (K \nabla [u_n - \bar{u}_n], \nabla \varphi) - (\bar{g}_n^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} \bar{h}_n. \end{aligned} \quad (4.32)$$

We maken het verschil tussen (4.32) voor $n = r$ en voor $n = s$. Bovendien stellen we $\varphi = u_r - u_s$. We vinden na integratie over het tijdsinterval $]0, \eta[$ voor willekeurige $\eta \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} &\int_0^\eta (\partial_t (u_r - u_s), u_r - u_s) + \int_0^\eta (K \nabla [u_r - u_s], \nabla [u_r - u_s]) \\ &= \int_0^\eta (\bar{f}_r - \bar{f}_s, u_r - u_s) + \int_0^\eta ([K - \bar{K}_r] \nabla \bar{u}_r, \nabla [u_r - u_s]) \\ &\quad - \int_0^\eta ([K - \bar{K}_s] \nabla \bar{u}_s, \nabla [u_r - u_s]) + \int_0^\eta (K \nabla [u_r - \bar{u}_r], \nabla [u_r - u_s]) \\ &\quad - \int_0^\eta (K \nabla [u_s - \bar{u}_s], \nabla [u_r - u_s]) - \int_0^\eta (\bar{g}_r^N - \bar{g}_s^N, u_r - u_s)_{\Gamma_N} \\ &\quad - \int_0^\eta (u_r - u_s)|_{\Gamma_0} (\bar{h}_r - \bar{h}_s). \end{aligned}$$

Uit hulpstelling A.1.8 en $K \geq C_0$ volgt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|(u_r - u_s)(\eta)\|^2 - \frac{1}{2} \|(u_r - u_s)(0)\|^2 + C_0 \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\
& \leq \int_0^\eta (\bar{f}_r - \bar{f}_s, u_r - u_s) + \int_0^\eta ([K - \bar{K}_r] \nabla \bar{u}_r, \nabla [u_r - u_s]) \\
& \quad - \int_0^\eta ([K - \bar{K}_s] \nabla \bar{u}_s, \nabla [u_r - u_s]) + \int_0^\eta (K \nabla [u_r - \bar{u}_r], \nabla [u_r - u_s]) \\
& \quad - \int_0^\eta (K \nabla [u_s - \bar{u}_s], \nabla [u_r - u_s]) - \int_0^\eta (\bar{g}_r^N - \bar{g}_s^N, u_r - u_s)_{\Gamma_N} \\
& \quad - \int_0^\eta (u_r - u_s)_{|\Gamma_0} (\bar{h}_r - \bar{h}_s).
\end{aligned}$$

Aangezien $(u_r - u_s)(0) = u_r(0) - u_s(0) = u_0 - u_0 = 0$ is het linkerlid niet-negatief. We nemen de absolute waarde van beide leden. Uit de driehoeksongelijkheid volgt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|(u_r - u_s)(\eta)\|^2 + C_0 \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\
& \leq \int_0^\eta |(\bar{f}_r - \bar{f}_s, u_r - u_s)| + \int_0^\eta |([K - \bar{K}_r] \nabla \bar{u}_r, \nabla [u_r - u_s])| \\
& \quad + \int_0^\eta |([K - \bar{K}_s] \nabla \bar{u}_s, \nabla [u_r - u_s])| + \int_0^\eta |(K \nabla [u_r - \bar{u}_r], \nabla [u_r - u_s])| \\
& \quad + \int_0^\eta |(K \nabla [u_s - \bar{u}_s], \nabla [u_r - u_s])| + \int_0^\eta |(\bar{g}_r^N - \bar{g}_s^N, u_r - u_s)_{\Gamma_N}| \\
& \quad + \int_0^\eta |(u_r - u_s)_{|\Gamma_0} (\bar{h}_r - \bar{h}_s)|. \tag{4.33}
\end{aligned}$$

We bekijken alle leden van het rechterlid apart. Uit Cauchy-Schwarz, de driehoeksongelijkheid, f Lipschitzcontinu, Young en $\eta \leq T$ volgt

$$\begin{aligned}
\int_0^\eta |(\bar{f}_r - \bar{f}_s, u_r - u_s)| & \leq \int_0^\eta \|\bar{f}_r - \bar{f}_s\| \|u_r - u_s\| \\
& \leq \int_0^\eta \|\bar{f}_r - f + f - \bar{f}_s\| \|u_r - u_s\| \\
& \leq \int_0^\eta (\|\bar{f}_r - f\| + \|f - \bar{f}_s\|) \|u_r - u_s\| \\
& \leq \int_0^\eta \left(\sqrt{\int_\Omega (\bar{f}_r - f)^2} + \sqrt{\int_\Omega (f - \bar{f}_s)^2} \right) \|u_r - u_s\| \\
& \leq \int_0^\eta \left(\sqrt{\int_\Omega \left(\frac{L_f}{r}\right)^2} + \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{L_f}{s}\right)^2} \right) \|u_r - u_s\| \\
& \leq \int_0^\eta \left(\frac{L_f}{r} + \frac{L_f}{s} \right) \sqrt{|\Omega|} \|u_r - u_s\| \\
& \leq C_\varepsilon \int_0^\eta \left(\frac{L_f}{r} + \frac{L_f}{s} \right)^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2 \\
& \leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} \right) + \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

Merk op dat we in de laatste overgang gebruik maakten van de volgende ongelijkheid: $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Achtereenvolgens toepassen van Cauchy-Schwarz, Young,

f Lipschitzcontinu, stelling 4.4.1 en $\eta \leq T$ geeft dat

$$\begin{aligned}
\int_0^\eta |([K - \bar{K}_r] \nabla \bar{u}_r, \nabla [u_r - u_s])| &\leq \int_0^\eta \|[K - \bar{K}_r] \nabla \bar{u}_r\| \|\nabla [u_r - u_s]\| \\
&\leq C_\varepsilon \int_0^\eta \|[K - \bar{K}_r] \nabla \bar{u}_r\|^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\
&\leq C_\varepsilon \int_0^\eta \int_\Omega (K - \bar{K}_r)^2 (\nabla \bar{u}_r)^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\
&\leq C_\varepsilon \int_0^\eta \left(\frac{1}{r}\right)^2 \|\nabla \bar{u}_r\|^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\
&\leq \frac{C_\varepsilon}{r^2} + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2. \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Analoog is

$$\int_0^\eta |([K - \bar{K}_s] \nabla \bar{u}_s, \nabla [u_r - u_s])| \leq \frac{C_\varepsilon}{s^2} + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2. \tag{4.36}$$

Door toepassen van $K \leq C_1$, Cauchy-Schwarz, Young en stelling 4.4.2 krijgen we

$$\begin{aligned}
\int_0^\eta |(K \nabla [u_r - \bar{u}_r], \nabla [u_r - u_s])| &\leq C_1 \int_0^\eta \|\nabla [u_r - \bar{u}_r]\| \|\nabla [u_r - u_s]\| \\
&\leq C_\varepsilon \underbrace{\int_0^\eta \|\nabla [u_r - \bar{u}_r]\|^2}_{\leq C\tau_r \leq \frac{C}{r}} + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\
&\leq \frac{C_\varepsilon}{r} + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Analoog is

$$\int_0^\eta |(K \nabla [u_s - \bar{u}_s], \nabla [u_r - u_s])| \leq \frac{C_\varepsilon}{s} + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2. \tag{4.38}$$

Uit Cauchy-Schwarz, de driehoeksongelijkheid, g^N Lipschitzcontinu, Young, de spoorongelijkheid en (2.4) volgt

$$\begin{aligned}
&\int_0^\eta |(\bar{g}_r^N - \bar{g}_s^N, u_r - u_s)_{\Gamma_N}| \\
&\leq \int_0^\eta \|\bar{g}_r^N - g + g - \bar{g}_s^N\|_{\Gamma_N} \|u_r - u_s\|_{\Gamma_N} \\
&\leq \int_0^\eta \left(\frac{Lg^N}{r} + \frac{Lg^N}{s}\right) \sqrt{|\Gamma_N|} \|u_r - u_s\|_{\Gamma_N} \\
&\leq C_\varepsilon \int_0^\eta \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|_{\Gamma_N}^2 \\
&\leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|_1^2 \\
&\leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right) + \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2. \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Achtereenvolgens toepassen van $(u_r - u_s)$ constant op Γ_0 , hulpstelling A.1.2, de driehoeksongelijkheid, de spoorongelijkheid, h Lipschitzcontinu, Young en (2.4) geeft dat

$$\begin{aligned}
& \int_0^\eta \left| (u_r - u_s)|_{\Gamma_0} (\bar{h}_r - \bar{h}_s) \right| \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{|\Gamma_0|}} \int_0^\eta \|u_r - u_s\|_{\Gamma_0} |\bar{h}_r - h + h - \bar{h}_s| \\
& \leq C \int_0^\eta \|u_r - u_s\|_1 (|\bar{h}_r - h| + |h - \bar{h}_s|) \\
& \leq C \int_0^\eta \|u_r - u_s\|_1 \left(\frac{Lh}{r} + \frac{Lh}{s} \right) \\
& \leq \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|_1^2 + C_\varepsilon \int_0^\eta \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right)^2 \\
& \leq \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 + C_\varepsilon \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} \right). \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Combinatie van (4.33), (4.34), (4.35), (4.36), (4.37), (4.38), (4.39) en (4.40) geeft

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|(u_r - u_s)(\eta)\|^2 + C_0 \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\
& \leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} \right) + C_\varepsilon \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) + \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2
\end{aligned}$$

of

$$\frac{1}{2} \|(u_r - u_s)(\eta)\|^2 + (C_0 - \varepsilon) \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) + \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2.$$

We kiezen $\varepsilon > 0$ zodanig dat $C_0 - \varepsilon > 0$. We verkleinen het linkerlid en delen de positieve factor $\min(\frac{1}{2}, C_0 - \varepsilon)$ weg:

$$\|(u_r - u_s)(\eta)\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \leq C \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) + C \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2.$$

Na vergroten van het rechterlid bekomen we

$$\begin{aligned}
& \|(u_r - u_s)(\eta)\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\
& \leq C \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) + C \int_0^\eta \left[\|(u_r - u_s)(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \right] dt.
\end{aligned}$$

Uit Gronwall volgt dat voor elke $\eta \in [0, T]$ geldt

$$\|(u_r - u_s)(\eta)\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \leq C \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right).$$

Bijgevolg geldt er

$$\max_{\eta \in [0, T]} \|u_r(\eta) - u_s(\eta)\|^2 + \int_0^T \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \leq C \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right).$$

Nu nemen we in het vorige de limiet $\min(r, s) \rightarrow \infty$. We bekomen

$$\max_{\eta \in [0, T]} \|u_r(\eta) - u_s(\eta)\|^2 \rightarrow 0 \text{ en } \int_0^T \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \rightarrow 0,$$

dus de Rothefuncties $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vormen een Cauchyrij in de de ruimtes $C([0, T], L_2(\Omega))$ en $L_2((0, T), H^1(\Omega))$. \square

Lemma 4.4.5. *Stel u de limiet van de rij (u_n) . Dan is $\partial_t u \in L_2((0, T), L_2(\Omega))$ en $\partial_t u_n \rightarrow \partial_t u$ in $L_2((0, T), L_2(\Omega))$.*

Bewijs. Uit stelling 4.4.1 volgt $\int_0^T \|\partial_t u_n(s)\|^2 ds \leq C$. Bijgevolg is de rij $(\partial_t u_n)$ begrensd in de separabele Hilbertruimte $L_2((0, T), L_2(\Omega))$. Dan is de rij $(\partial_t u_n)$ zwak convergent, dit wil zeggen dat er een zwak convergente deelrij in de ruimte $L_2((0, T), L_2(\Omega))$ bestaat. Deze deelrij noteren we om de notatie niet te belasten met dezelfde index als de oorspronkelijke rij $(\partial_t u_n)$. Uit Gevolg 2.2.25 volgt, dat er een $z \in L_2((0, T), L_2(\Omega))$ bestaat zodanig dat $\partial_t u_n \rightarrow z$ in $L_2((0, T), L_2(\Omega))$. Dit wil zeggen dat voor elke $f \in L_2((0, T), L_2(\Omega))^*$ geldt dat $f(\partial_t u_n) \rightarrow f(z)$. We willen aantonen dat $z = \partial_t u$. Neem $\varphi \in L_2(\Omega)$ en $t \in [0, T]$ willekeurig, dan is

$$\begin{aligned} \int_0^t (\partial_t u_n, \varphi) &= \int_0^t \int_{\Omega} \varphi \partial_t u_n \\ &= \int_{\Omega} \varphi \int_0^t \partial_t u_n \\ &= \int_{\Omega} \varphi (u_n(t) - u_0) \\ &= (u_n(t) - u_0, \varphi). \end{aligned}$$

We nemen de limiet voor $n \rightarrow \infty$ in de identiteit

$$(u_n(t) - u_0, \varphi) = \int_0^t (\partial_t u_n, \varphi) \quad \forall \varphi \in L_2(\Omega), \forall t \in [0, T]$$

en krijgen

$$(u(t) - u_0, \varphi) = \int_0^t (z, \varphi) \quad \forall \varphi \in L_2(\Omega), \forall t \in [0, T]$$

omdat het inproduct in $L_2(\Omega)$ continu is en $\int_0^t (\cdot, \varphi)$ een functionaal is op $L_2((0, T), L_2(\Omega))$. Hieruit volgt op tijdstip t

$$\frac{1}{h} (u(t) - u_0, \varphi) = \frac{1}{h} \int_0^t (z, \varphi) \tag{4.41}$$

en op tijdstip $t + h$ met $h \neq 0$ en $t + h \leq T$

$$\frac{1}{h} (u(t + h) - u_0, \varphi) = \frac{1}{h} \int_0^{t+h} (z, \varphi). \tag{4.42}$$

Het verschil van (4.42) en (4.41) geeft

$$\left(\frac{u(t + h) - u(t)}{h}, \varphi \right) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (z, \varphi). \tag{4.43}$$

Merk op dat $\partial_t u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t + h) - u(t)}{h}$. Uit (4.43), Cauchy-Schwarz en de ongelijkheid van Schwarz voor integralen volgt

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u(t + h) - u(t)}{h} - z(t) \right\| &= \sup_{\|\varphi\|=1} \left(\frac{u(t + h) - u(t)}{h} - z(t), \varphi \right) \\ &= \sup_{\|\varphi\|=1} \left[\left(\frac{u(t + h) - u(t)}{h}, \varphi \right) - (z(t), \varphi) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\|\varphi\|=1} \frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} (z(s), \varphi) ds - (z(t), \varphi) \int_t^{t+h} ds \right] \\
&= \sup_{\|\varphi\|=1} \frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} (z(s) - z(t), \varphi) ds \right] \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|=1} \frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} \|z(s) - z(t)\| \|\varphi\| ds \right] \\
&\leq \frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} \|z(s) - z(t)\| 1 ds \right] \\
&\leq \frac{1}{h} \sqrt{\int_t^{t+h} \|z(s) - z(t)\|^2 ds} \int_t^{t+h} 1 ds \\
&\leq \sqrt{\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|z(s) - z(t)\|^2 ds}. \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Omdat z Lebesguemeetbaar is in $[t, t+h]$, volgt uit de stelling van Lusin (zie Hulpstelling A.1.11) dat er voor willekeurige $\delta > 0$ een Lebesguemeetbare verzameling E bestaat met $\text{maat}(E) < \delta$ zodanig dat de beperking van z tot $[t, t+h] \setminus E$ continu is (a fortiori is dan $\|z(s) - z(t)\|^2$ continu). Dit gecombineerd met de stelling omtrent de absolute continuïteit van de integraal (kies $\varepsilon = h^2$ in Hulpstelling A.1.12) levert dat er een verzameling E bestaat met $\text{maat}(E) < \delta$ zodanig dat

$$\int_E \|z(s) - z(t)\|^2 ds < h^2.$$

Ongelijkheid (4.44) kunnen we dan schrijven als

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - z(t) \right\| &\leq \sqrt{\frac{1}{h} \int_E \|z(s) - z(t)\|^2 ds + \frac{1}{h} \int_{[t, t+h] \setminus E} \|z(s) - z(t)\|^2 ds} \\
&\leq \sqrt{h + \frac{1}{h} \int_{[t, t+h] \setminus E} \|z(s) - z(t)\|^2 ds}.
\end{aligned}$$

Uit z continu in $[t, t+h] \setminus E$ en de middelwaardstelling (zie Hulpstelling A.1.9) volgt dat er een $c \in [t, t+h] \setminus E$ bestaat zodat

$$\frac{1}{h} \int_{[t, t+h] \setminus E} \|z(s) - z(t)\|^2 ds = \|z(c) - z(t)\|^2.$$

Bijgevolg vinden we dat

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - z(t) \right\| \leq \sqrt{h + \|z(c) - z(t)\|^2}.$$

Als $h \rightarrow 0$ gaat $c \rightarrow t$ en uit z continu in $[t, t+h] \setminus E$ volgt $z(c) \rightarrow z(t)$ zodat

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - z(t) \right\| \rightarrow 0$$

als $h \rightarrow 0$. □

Stelling 4.4.6. *Er bestaat een unieke zwakke oplossing in V_1 voor (4.3).*

Bewijs. We moeten de limiet nemen voor $n \rightarrow \infty$ in (4.31). Deze identiteit is equivalent met (4.32), wat we ook als volgt kunnen schrijven

$$\begin{aligned} & (\partial_t u_n, \varphi) + (K \nabla u_n, \nabla \varphi) \\ &= (f, \varphi) + (\bar{f}_n - f, \varphi) + ([K - \bar{K}_n] \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) + (K \nabla [u_n - \bar{u}_n], \nabla \varphi) \\ & \quad + (g^N - \bar{g}_n^N, \varphi)_{\Gamma_N} + \varphi|_{\Gamma_0} (h - \bar{h}_n) - (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} h. \end{aligned}$$

We integreren het voorgaande over het tijdsinterval $]0, \eta[\subset [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta (\partial_t u_n, \varphi) + \int_0^\eta (K \nabla u_n, \nabla \varphi) \\ &= \int_0^\eta (f, \varphi) + \int_0^\eta (\bar{f}_n - f, \varphi) + \int_0^\eta ([K - \bar{K}_n] \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) \\ & \quad + \int_0^\eta (K \nabla [u_n - \bar{u}_n], \nabla \varphi) + \int_0^\eta (g^N - \bar{g}_n^N, \varphi)_{\Gamma_N} + \int_0^\eta \varphi|_{\Gamma_0} (h - \bar{h}_n) \\ & \quad - \int_0^\eta (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \int_0^\eta \varphi|_{\Gamma_0} h. \end{aligned} \tag{4.45}$$

We tonen nu aan dat

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta (\bar{f}_n - f, \varphi) \rightarrow 0, \\ & \int_0^\eta ([K - \bar{K}_n] \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) \rightarrow 0, \\ & \int_0^\eta (K \nabla [u_n - \bar{u}_n], \nabla \varphi) \rightarrow 0, \\ & \int_0^\eta (g^N - \bar{g}_n^N, \varphi)_{\Gamma_N} \rightarrow 0, \\ & \int_0^\eta \varphi|_{\Gamma_0} (h - \bar{h}_n) \rightarrow 0, \\ & \int_0^\eta (\partial_t u_n, \varphi) \rightarrow \int_0^\eta (\partial_t u, \varphi) \end{aligned}$$

en

$$\int_0^\eta (K \nabla u_n, \nabla \varphi) \rightarrow \int_0^\eta (K \nabla u, \nabla \varphi)$$

als $n \rightarrow \infty$. Uit Cauchy-Schwarz, f Lipschitzcontinu, $\eta \leq T$ en $\varphi \in L_2(\Omega)$ volgt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\eta (\bar{f}_n - f, \varphi) \right| &\leq \int_0^\eta \|\bar{f}_n - f\| \|\varphi\| \\ &\leq \|\varphi\| \int_0^\eta \int_\Omega (\bar{f}_n - f)^2 \\ &\leq \|\varphi\| \int_0^\eta \int_\Omega \left(\frac{L_f}{n} \right)^2 \\ &\leq \frac{C}{n^2} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

als $n \rightarrow \infty$. Analoog geldt wegens g^N Lipschitzcontinu

$$\left| \int_0^\eta (g^N - \bar{g}_n^N, \varphi)_{\Gamma_N} \right| \rightarrow 0$$

als $n \rightarrow \infty$. Toepassen van hulpstelling A.1.2 en h Lipschitzcontinu levert

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\eta \varphi|_{\Gamma_0} (h - \bar{h}_n) \right| &\leq \int_0^\eta |\varphi|_{\Gamma_0}|h - \bar{h}_n| \\ &\leq \int_0^\eta \frac{\|\varphi\|_{\Gamma_0} Lh}{\sqrt{|\Gamma_0|} n} \\ &\leq \frac{C}{n} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

als $n \rightarrow \infty$. Gebruik makend van Cauchy-Schwarz, K Lipschitzcontinu, stelling 4.4.1 en $\varphi \in H^1(\Omega)$ vinden we

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\eta ([K - \bar{K}_n] \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) \right| &\leq \int_0^\eta \|[K - \bar{K}_n] \nabla \bar{u}_n\| \|\nabla \varphi\| \\ &\leq \|\nabla \varphi\| \int_0^\eta \int_\Omega (K - \bar{K}_n)^2 (\nabla \bar{u}_n)^2 \\ &\leq \|\varphi\| \int_0^\eta \left(\frac{LK}{n}\right)^2 \underbrace{\|\nabla \bar{u}_n\|^2}_{\leq C} \\ &\leq \frac{C}{n^2} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

als $n \rightarrow \infty$. Uit $K \leq C_1$, Cauchy-Schwarz, stelling 4.4.2 en $\tau_n = \frac{T}{n}$ volgt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\eta (K \nabla [u_n - \bar{u}_n], \nabla \varphi) \right| &\leq C_1 \|\nabla \varphi\| \underbrace{\int_0^\eta \|\nabla [u_n - \bar{u}_n]\|}_{\leq C \tau_n \leq \frac{C}{n}} \\ &\leq \frac{C}{n} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

als $n \rightarrow \infty$. Uit lemma 4.4.4 volgt dat $u_n \rightarrow u$ in $L_2((0, T), H^1(\Omega))$, dit wil zeggen dat $\int_0^T \|u_n - u\|_1^2 \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. Achtereenvolgens toepassen van $K \leq C_1$, Cauchy-Schwarz, (2.4) en $\eta \leq T$ geeft dat

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\eta (K \nabla u_n, \nabla \varphi) - \int_0^\eta (K \nabla u, \nabla \varphi) \right| &= \int_0^\eta (K \nabla [u_n - u], \nabla \varphi) \\ &\leq C_1 \|\nabla \varphi\| \int_0^\eta \|\nabla [u_n - u]\|^2 \\ &\leq C \int_0^\eta \|u_n - u\|_1^2 \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

als $n \rightarrow \infty$. Uit lemma 4.4.5 volgt voor $n \rightarrow \infty$ dat

$$\int_0^\eta (\partial_t u_n, \varphi) \rightarrow \int_0^\eta (\partial_t u, \varphi),$$

want $\int_0^\eta (\cdot, \varphi)$ is een functionaal op $L_2((0, T), L_2(\Omega))$. We hebben bewezen dat als we de limiet nemen voor $n \rightarrow \infty$ in (4.45), er voor elke $\eta \in [0, T]$ geldt dat

$$\int_0^\eta (\partial_t u, \varphi) + \int_0^\eta (K \nabla u, \nabla \varphi) = \int_0^\eta (f, \varphi) - \int_0^\eta (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \int_0^\eta \varphi|_{\Gamma_0} h.$$

We leiden beide leden af naar η . Uit de hoofdstelling van de integraalrekening (zie Stelling A.1.10) volgt dat

$$(\partial_t u(\eta), \varphi) + (K \nabla u(\eta), \nabla \varphi) = (f(\eta), \varphi) - (g^N(\eta), \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} h(\eta),$$

voor alle $\eta \in [0, T]$. Bijgevolg geldt (4.3). Rest nog aan te tonen dat de oplossing uniek is. Veronderstel dat er twee oplossingen u en v zijn voor (4.3), er geldt

$$(\partial_t u, \varphi) + (K \nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi) - (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} h$$

en

$$(\partial_t v, \varphi) + (K \nabla v, \nabla \varphi) = (f, \varphi) - (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} h$$

met $u(0) = u_0$ en $v(0) = u_0$. Stel $w = u - v$. Het verschil tussen bovenstaande twee identiteiten wordt dan

$$(\partial_t w, \varphi) + (K \nabla w, \nabla \varphi) = 0 \text{ b.o. in } [0, T],$$

met $w(0) = u(0) - v(0) = u_0 - u_0 = 0$. Neem $\eta \in [0, T]$. We stellen $\varphi = w$ en integreren de bovenstaande relatie over over het tijdsinterval $]0, \eta[$. We krijgen

$$\int_0^\eta (\partial_t w, w) + \int_0^\eta (K \nabla w, \nabla w) = 0.$$

Uit $K \geq C_0$, stelling A.1.8 en $w(0) = 0$ volgt

$$\frac{1}{2} \|w(\eta)\|^2 - \frac{1}{2} \|w(0)\|^2 + C_0 \int_0^\eta \|\nabla w\|^2 = 0$$

of

$$\underbrace{\frac{1}{2} \|w(\eta)\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{C_0 \int_0^\eta \|\nabla w\|^2}_{\geq 0} = 0$$

voor alle $\eta \in [0, T]$. Hieruit volgt dat $\|w(\eta)\| = 0$ voor alle $\eta \in [0, T]$. Bijgevolg is $w = 0$ of $u = v$. \square

Vorige stelling laat toe om een functie ψ te definiëren op $L_\infty((0, T) \times \Omega)$, namelijk

$$\psi : L_\infty([0, T] \times \Omega) \rightarrow C([0, T], L_2(\Omega)) \cap L_2([0, T], H^1(\Omega)) : K \mapsto \psi(K) = u_K, \quad (4.46)$$

die elke $K \in L_\infty((0, T) \times \Omega)$ afbeeldt op de unieke zwakke oplossing u_K in V_1 van (4.3). De variatie van K op Ω_0 is van de vorm

$$K(x, y) + K(t),$$

waarbij enkel het $K(t)$ gedeelte wordt gevarieerd.

Stelling 4.4.7. *De functie ψ gedefinieerd in (4.46) is continu op $L_\infty((0, T) \times \Omega)$.*

Bewijs. Stel dat met K_1 , respectievelijk K_2 de zwakke oplossing u^1 , respectievelijk $u^2 \in V_1$ correspondeert. Dan volgt uit (4.3) dat

$$(\partial_t u^1, \varphi) + (K_1 \nabla u^1, \nabla \varphi) = (f, \varphi) - (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} h$$

en

$$(\partial_t u^2, \varphi) + (K_2 \nabla u^2, \nabla \varphi) = (f, \varphi) - (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} h.$$

Aftrekken van de tweede van de eerste gelijkheid geeft

$$(\partial_t(u^1 - u^2), \varphi) + (K_1 \nabla u^1 - K_2 \nabla u^2, \nabla \varphi) = 0$$

of

$$(\partial_t(u^1 - u^2), \varphi) + (K_1 \nabla [u^1 - u^2], \nabla \varphi) = ((K_2 - K_1) \nabla u^2, \nabla \varphi).$$

Stel $\varphi = u^1 - u^2$ in het bovenstaande. Integratie over tijdsinterval $]0, \eta[$ voor willekeurige $\eta \in [0, T]$ geeft

$$\begin{aligned} \int_0^\eta (\partial_t(u^1 - u^2), u^1 - u^2) + \int_0^\eta (K_1 \nabla [u^1 - u^2], \nabla [u^1 - u^2]) \\ = \int_0^\eta ((K_2 - K_1) \nabla u^2, \nabla [u^1 - u^2]). \end{aligned}$$

Uit hulpstelling A.1.3 en $K_1 \geq 0$ volgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|(u^1 - u^2)(\eta)\|^2 - \frac{1}{2} \|(u^1 - u^2)(0)\|^2 + C_0 \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \\ \leq \int_0^\eta ((K_2 - K_1) \nabla u^2, \nabla [u^1 - u^2]). \end{aligned}$$

Nu is $u^1(0) = u^2(0) = u_0$. Bovenstaande wordt (we nemen de absolute waarde van beide leden, het linkerlid is niet negatief)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|(u^1 - u^2)(\eta)\|^2 + C_0 \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \\ \leq \int_0^\eta |((K_2 - K_1) \nabla u^2, \nabla [u^1 - u^2])|. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Vervolgens schatten we het rechterlid van (4.47) af. Door gebruik te maken van Cauchy-Schwarz, Young, $K_2 - K_1$ constant in Ω ($K_2 - K_1$ is nul in $\Omega \setminus \Omega_0$ en $K_2 - K_1$ is enkel een functie van de tijd in Ω_0) en Lemma 4.3.1(ii) vinden we dat

$$\begin{aligned} \int_0^\eta |((K_2 - K_1) \nabla u^2, \nabla [u^1 - u^2])| \\ \leq \int_0^\eta \|(K_2 - K_1) \nabla u^2\| \|\nabla [u^1 - u^2]\| \\ \leq C_\varepsilon \int_0^\eta \|(K_2 - K_1) \nabla u^2\|^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \\ \leq C_\varepsilon \int_0^\eta \int_\Omega (K_2 - K_1)^2 (\nabla u^2)^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \\ \leq C_\varepsilon \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2 \int_\Omega (\nabla u^2)^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_\varepsilon \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2 \underbrace{\|\nabla u^2\|^2}_{\leq C} + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \\
&\leq C_\varepsilon \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2.
\end{aligned}$$

We kunnen dan (4.47) schrijven als

$$\frac{1}{2} \|(u^1 - u^2)(\eta)\|^2 + (C_0 - \varepsilon) \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \leq C_\varepsilon \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2.$$

Kies ε zodanig dat $C_0 - \varepsilon > 0$. Wegdelen van de factor $\min(\frac{1}{2}, C_0 - \varepsilon)$ geeft

$$\|(u^1 - u^2)(\eta)\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \leq C \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2. \quad (4.48)$$

Dus

$$\|(u^1 - u^2)(\eta)\|^2 \leq C \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2.$$

of

$$\|(u^1 - u^2)(\eta)\| \leq C \sqrt{\int_0^\eta (K_2 - K_1)^2}.$$

Nemen van het maximum over $\eta \in [0, T]$ geeft

$$\max_{\eta \in [0, T]} \|(u^1 - u^2)(\eta)\| \leq C \max_{\eta \in [0, T]} \sqrt{\int_0^\eta (K_2 - K_1)^2}$$

of

$$\|u^1 - u^2\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} \leq C \sqrt{\int_0^T (K_2 - K_1)^2}$$

of

$$\|u^1 - u^2\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} \leq C \|K_2 - K_1\|_{L_2((0, T))}. \quad (4.49)$$

Achtereenvolgens toepassen van (2.4), de definitie van de norm in $C([0, T], L_2(\Omega))$, (4.48) en (4.49) levert

$$\begin{aligned}
\int_0^\eta \|u^1 - u^2\|_1^2 &= \int_0^\eta \|u^1 - u^2\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \\
&\leq \eta \|u^1 - u^2\|_{C([0, T], L_2(\Omega))}^2 + C \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2 \\
&\leq \eta C \|K_2 - K_1\|_{L_2((0, T))}^2 + C \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2.
\end{aligned}$$

Deze laatste ongelijkheid maximaliseren we over $\eta \in [0, T]$. We bekommen

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u^1 - u^2\|_1^2 &\leq C \|K_2 - K_1\|_{L_2([0, T])}^2 + C \int_0^T (K_2 - K_1)^2 \\
&\leq C \|K_2 - K_1\|_{L_2((0, T))}^2
\end{aligned} \quad (4.50)$$

of

$$\|u^1 - u^2\|_{L_2((0,T),H^1(\Omega))}^2 \leq C \|K_2 - K_1\|_{L_2((0,T))}^2. \quad (4.51)$$

Uit (4.49) en (4.51) volgt dat ψ Lipschitzcontinu, i.e. continu, is op $L_\infty((0,T) \times \Omega)$, immers $\psi(K_1) \rightarrow \psi(K_2)$ als $K_1 \rightarrow K_2$. Merk op dat er geen bijhorende voorwaarden op K nodig zijn opdat $K_2 - K_1$ tot $L_2((0,T))$ zou behoren. Immers uit $K_1, K_2 \leq C_1$ volgt

$$\int_0^T (K_2 - K_1)^2 \leq \int_0^T (2C_1)^2 < \infty.$$

□

Uit de vorige stelling volgt dat de zwakke oplossing van (4.3) continu afhangt van K .

Gevolg 4.4.8. *Het voorwaarts probleem (4.1) is goed gedefinieerd in de betekenis van Hadamard.*

4.5 Invers probleem

Het hulpvraagstuk IBVP1 geeft voor elke vooraf gegeven K een unieke oplossing u_K . We definiëren de functie $\tilde{\psi}$ op $L_\infty((0,T) \times \Omega)$ als

$$\tilde{\psi} : L_\infty((0,T) \times \Omega) \rightarrow C([0,T]) : K \mapsto \tilde{\psi}(K) = u_{K|_{\Gamma_0}}, \quad (4.52)$$

met $u_{K|_{\Gamma_0}}$ het spoor op Γ_0 van de oplossing u_K . Impliciet veronderstellen we hier dat

$$\boxed{U \in C([0,T])}.$$

Door de definitie van $\tilde{\psi}$ kan het invers probleem (3.1)-(3.5) omgezet worden tot:

$$\text{vind } K \in L_\infty((0,T) \times \Omega) \text{ zodanig dat } \tilde{\psi}(K) = U.$$

Stelling 4.5.1. *De functie $\tilde{\psi}$ gedefinieerd in (4.52) is continu op $L_\infty((0,T) \times \Omega)$.*

Bewijs. Als we het linkerlid van de ongelijkheid (4.50) verkleinen door de spoorongelijkheid toe te passen vinden we

$$\int_0^T \|u^1 - u^2\|_{\Gamma_0}^2 \leq C \|K_2 - K_1\|_{L_2((0,T))}^2. \quad (4.53)$$

Omdat $u^1 - u^2$ constant is op Γ_0 geldt

$$\int_0^T \|u^1 - u^2\|_{\Gamma_0}^2 = \int_0^T \int_{\Gamma_0} (u^1 - u^2)^2 = \int_0^T (u^1|_{\Gamma_0} - u^2|_{\Gamma_0})^2 |\Gamma_0|.$$

Ongelijkheid (4.53) wordt bijgevolg

$$\int_0^T (u^1|_{\Gamma_0} - u^2|_{\Gamma_0})^2 \leq C \|K_2 - K_1\|_{L_2((0,T))}^2.$$

of

$$\|u^1|_{\Gamma_0} - u^2|_{\Gamma_0}\|_{C([0,T])}^2 \leq C \|K_2 - K_1\|_{L_2((0,T))}^2.$$

Bijgevolg is de functie $\tilde{\psi}$ Lipschitzcontinu. We hebben dat $\tilde{\psi}(K_1) \rightarrow \tilde{\psi}(K_2)$ als $K_1 \rightarrow K_2$. Dit bewijst de continuïteit van $\tilde{\psi}$ op $L_\infty((0,T) \times \Omega)$. □

Om minstens één oplossing van het invers probleem (3.1)-(3.5) te garanderen is er een bijkomende voorwaarde nodig op U . Deze voorwaarde vinden we terug in de volgende stelling die volgt uit de continuïteit van $\tilde{\psi}$.

Gevolg 4.5.2. *Het invers probleem (3.1)-(3.5) bestaande uit het hulpvraagstuk IBVP1 en de bijkomende voorwaarde (3.9) heeft minstens één oplossing $K \in L_\infty((0, T) \times \Omega)$ als $U \in \tilde{\psi}[C_0, C_1]$, met $\tilde{\psi}$ gedefinieerd in (4.52).*

Uit al het voorgaande kunnen we volgende hoofdstelling afleiden.

Stelling 4.5.3. *Het volgende invers begin- en randwaardenprobleem heeft tenminste één zwakke oplossing: vind een koppel (K, u) zodanig dat*

- (i) $u \in C([0, T], L_2(\Omega)) \cap L_2((0, T), H^1(\Omega))$,
- (ii) $\partial_t u \in L_2((0, T), L_2(\Omega))$,
- (iii) $K \in L_\infty((0, T) \times \Omega)$, dit wil zeggen dat $K \leq C_1$,
- (iv) $K \geq C_0 > 0$,

en zodanig dat voldaan is aan

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot (K \nabla u) = f & \text{in } (0, T) \times \Omega; \\ u = g^D & \text{op } (0, T) \times \Gamma_D; \\ -K \nabla u \cdot \nu = g^N & \text{op } (0, T) \times \Gamma_N; \\ \int_{\Gamma_0} -K \nabla u \cdot \nu = h & \text{in } (0, T); \end{cases} \quad (4.54)$$

met bijkomende voorwaarde

$$u|_{\Gamma_0} = U, \quad \text{in } [0, T];$$

voor gegeven

- (i) $u_0 \in H^1(\Omega)$,
- (ii) $h \in C([0, T])$,
- (iii) $g^N \in L_2((0, T), L_2(\Gamma_N))$,
- (iv) $g^D \in L_2((0, T), L_2(\Gamma_D))$,
- (v) $f \in L_2((0, T), L_2(\Omega))$,
- (vi) $U \in C([0, T])$ en U in het bereik van $\tilde{\psi}[C_0, C_1]$ met

$$\tilde{\psi} : L_\infty((0, T) \times \Omega) \rightarrow C([0, T]) : K \mapsto \tilde{\psi}(K) = u_K|_{\Gamma_0}$$

een afbeelding die met elke gegeven $K \in L_\infty((0, T) \times \Omega)$ het spoor op de rand Γ_0 van de unieke zwakke oplossing u_K van het voorwaarts probleem (4.54) doet corresponderen,

- (vi) K, g^N, g^D, h en f Lipschitzcontinu.

Hoofdstuk 5

Analyse van het ‘duaal’ probleem

We gaan analoog te werk als voor het voorwaarts vraagstuk IBVP1 om te onderzoeken of het ‘duaal’ probleem IBVP2 (3.8) voor gegeven K goed gedefinieerd is in de betekenis van Hadamard (zie Definitie 2.2.4). Deze theoretische analyse volgt daardoor dezelfde structuur als in Hoofdstuk 4 en is geregeld een nagenoeg woordelijke herhaling. Daarna onderzoeken we of het invers probleem (3.1)-(3.5) bestaande uit het voorwaarts vraagstuk IBVP2 en de bijkomende voorwaarde (3.10) onder bepaalde voorwaarden tenminste één oplossing heeft.

In sectie 5.2 geven we een numeriek voorbeeld van het invers probleem (3.1)-(3.5).

5.1 Theoretische analyse

We beschouwen het ‘duaal’ probleem IBVP2 voor gegeven K :

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot (K \nabla u) = f & \text{in } (0, T) \times \Omega; \\ u = g^D & \text{op } (0, T) \times \Gamma_D; \\ -K \nabla u \cdot \nu = g^N & \text{op } (0, T) \times \Gamma_N; \\ u = U & \text{op } (0, T) \times \Gamma_0; \\ u(0, x, y) = u_0 & \text{in } \Omega; \end{cases} \quad (5.1)$$

in een rechthoekig domein $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en een eindig tijdsinterval $[0, T]$. We nemen dus voor even aan dat K bekend is op Ω_0 . Merk op dat K enkel op dit deel van het domein varieert. Alle datafuncties zijn gedefinieerd in Hoofdstuk 3.

Om aan te tonen dat dit voorwaarts probleem goed gedefinieerd is in de betekenis van Hadamard beginnen we met de variationele formulering van het hulpvraagstuk IBVP2 (5.1) op te stellen.

5.1.1 Opstellen variationeel vraagstuk

We vermenigvuldigen beide leden van de differentiaalvergelijking (zie (5.1)) met een testfunctie $\varphi \in H^1(\Omega)$ en integreren over Ω . Eliminatie van de tweede orde afgeleiden via Green (zie Gevolg 2.1.80) geeft

$$(u_t, \varphi) + (K \nabla u, \nabla \varphi) + (-K \nabla u \cdot \nu, \varphi)_\Gamma = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (5.2)$$

We beperken de testfuncties tot de ruimte

$$V_2 = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi|_{\Gamma_D} = 0 \text{ en } \varphi|_{\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

V_2 is een gesloten deelruimte van $H^1(\Omega)$ en is dus een Hilbertruimte met inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ en norm $\|\cdot\|_1$ (Eigenschap 2.1.27). De zwakke oplossing van het voorwaarts probleem (5.1) moet op de rand Γ_D gelijk zijn aan de Dirichlet datafunctie g^D en op de rand Γ_0 gelijk zijn aan de Dirichlet datafunctie U . Een element uit de testruimte V_2 heeft spoor nul op Γ_D en Γ_0 en voldoet dus niet aan het voorwaarts probleem (5.1). Zonder de algemeenheid te schaden kunnen we echter stellen dat $g^D = 0$ en $U = 0$. Als we g^D en U niet nul stellen, mogen we aannemen (gegarandeerd door Friedman omdat $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_D = \emptyset$, uit [24], Lemma 5.1) dat de Dirichlet datafuncties g^D en U kunnen verlengd worden in het volledige domein Ω tot een functie \tilde{g}^D en \tilde{U} op zo'n manier dat

$$\tilde{g}^D \in C([0, T], H^1(\Omega)), \quad \tilde{g}^D = \begin{cases} g^D & \text{op } [0, T] \times \Gamma_D; \\ 0 & \text{op } [0, T] \times \Gamma_0; \end{cases}$$

en

$$\partial_t \tilde{U} \in L_2((0, T)), \quad \tilde{U} = \begin{cases} U & \text{op } [0, T] \times \Gamma_0; \\ 0 & \text{op } [0, T] \times \Gamma_D. \end{cases}$$

Dan kunnen we ook aantonen dat er een unieke zwakke oplossing $u \in H^1(\Omega)$ van het voorwaarts probleem (5.1) bestaat zodanig dat $u - \tilde{g}^D \in V_2$ en $u - \tilde{U} \in V_2$. Maar, om het aantal termen in de variationele formulering te minimaliseren stellen we in het vervolg

$$g^D = 0 \text{ en } U = 0.$$

We gaan nu de variationele formulering (5.2) verder vereenvoudigen. Voor alle $\varphi \in V_2$ vinden we

$$\begin{aligned} (-K \nabla u \cdot \nu, \varphi)_\Gamma &= (-K \nabla u \cdot \nu, \varphi)_{\Gamma_D} + (-K \nabla u \cdot \nu, \varphi)_{\Gamma_N} + (-K \nabla u \cdot \nu, \varphi)_{\Gamma_0} \\ &= 0 + (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} + 0 \\ &= (g^N, \varphi)_{\Gamma_N}. \end{aligned}$$

Aldus blijkt de klassieke oplossing u van het voorwaarts probleem (5.1) te voldoen aan het variationeel randwaardenprobleem

$$u \in V_2 : a(u, \varphi) = f(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_2.$$

met

$$a(u, \varphi) = (\partial_t u, \varphi) + (K \nabla u, \nabla \varphi)$$

en

$$f(\varphi) = (f, \varphi) - (g^N, \varphi)_{\Gamma_N}.$$

Op bovenstaande variationele formulering kunnen we Lax-Milgram niet rechtstreeks toepassen om tot een unieke zwakke variationele oplossing in de testruimte V_2 te komen omdat

we te maken hebben met een tijdsafhankelijk probleem. We kunnen niet aantonen dat a begrensd en V_2 -elliptisch is. Bijvoorbeeld voor de V_2 -ellipticiteit vinden we ($K \geq C_0$)

$$\begin{aligned} a(u, u) &= (\partial_t u, u) + (K \nabla u, \nabla u) \\ &\geq \underbrace{(\partial_t u, u)}_{\geq 0} + C_0 \|\nabla u\|^2, \end{aligned}$$

wat we niet verder naar beneden kunnen afschatten.

We veronderstellen dat de beginconditie voldoet aan

$$u_0 \in L_2(\Omega).$$

De variationele formulering van het voorwaarts probleem (5.1) is als volgt: vind $u \in V_2$ zodanig dat

$$\begin{cases} (\partial_t u(t), \varphi) + (K(t) \nabla u(t), \nabla \varphi) = (f(t), \varphi) - (g^N(t), \varphi)_{\Gamma_N} & t \in (0, T); \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega; \end{cases} \quad (5.3)$$

voor elke $\varphi \in V_2$. In deze formulering hebben we de afhankelijk van $\mathbf{x} \in \Omega$ voor even achterwege gelaten.

De strategie die we gaan volgen om aan te tonen dat het voorwaarts probleem (5.1) goed gedefinieerd is, steunt op tijdsdiscretisatie en een bewijs dat benaderingen van de oplossing convergeren naar de oplossing van het voorwaarts probleem (5.1).

5.1.2 Tijdsdiscretisatie

We verdelen het tijdsinterval $[0, T]$ in n deelintervallen $[t_{i-1}, t_i]$ met $i = 1, \dots, n$ en $t_i = i\tau$ met $\tau = \frac{T}{n} < 1$ (Rothemethode, zie bijvoorbeeld [25] en [26]).

Eerst introduceren we volgende notatie voor elke functie $z(t)$, nl.

$$z_i = z(t_i), \quad \delta z_i = \frac{z_i - z_{i-1}}{\tau}, \quad i = 1, \dots, n.$$

De tijdsafgeleide $\partial_t u(t_i)$ gaan we benaderen door het achterwaarts verschil

$$\partial_t u(t_i) \approx \delta u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau}.$$

Uit (5.3) volgt dat we voor $i = 1, \dots, n$ en $\varphi \in V_2$ volgend recurrent systeem van lineaire elliptische BVP's hebben

$$(\delta u_i, \varphi) + (K_i \nabla u_i, \nabla \varphi) = (f_i, \varphi) - (g_i^N, \varphi)_{\Gamma_N}. \quad (5.4)$$

De functie u_i is de benadering van u op de i -de tijdstap. Als we (5.4) oplossen voor $i = j$, dan kennen we reeds de functies u_0, \dots, u_{j-1} met u_0 de beginconditie.

De relatie (5.4) kan herschreven worden als

$$\underbrace{\left(\frac{u_i}{\tau}, \varphi\right) + (K_i \nabla u_i, \nabla \varphi)}_{=: \tilde{a}(u_i, \varphi)} = \underbrace{(f_i, \varphi) - (g_i^N, \varphi)_{\Gamma_N}}_{=: \tilde{f}_i(\varphi)} + \left(\frac{u_{i-1}}{\tau}, \varphi\right). \quad (5.5)$$

We willen Lax-Milgram (zie Stelling 2.2.20) toepassen om het bestaan en uniek zijn van $u_i \in V_2$ te garanderen. Daarvoor is nodig dat $\tilde{a}(u_i, \varphi)$ een V_2 -elliptische en continue bilineaire vorm is en $\tilde{f}_i(\varphi)$ een lineaire begrensde functionaal. Uit $K \geq C_0$ volgt

$$\begin{aligned} \tilde{a}(u_i, u_i) &= \left(\frac{u_i}{\tau}, u_i \right) + (K_i \nabla u_i, \nabla u_i) \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{\tau} \|u_i\|^2}_{\geq 0} + C_0 \|\nabla u_i\|^2 \\ &\geq C_0 \|\nabla u_i\|^2, \end{aligned}$$

voor elke $u_i \in V_2$. Uit $u_i|_{\Gamma_D} = 0$ of $u_i|_{\Gamma_0} = 0$ en Friedrichs (zie (2.6)) volgt dat er een constante $k > 0$ bestaat zodanig dat $\|u_i\|_1^2 \leq k \|\nabla u_i\|^2$. Bijgevolg is voor elke $u_i \in V_2$:

$$\tilde{a}(u_i, u_i) \geq \frac{C_0}{k} \|u_i\|_1^2,$$

dus \tilde{a} is V_2 -elliptisch. Uit de driehoeksongelijkheid, $K \leq C_1$, Cauchy-Schwarz en (2.4) volgt dat \tilde{a} continu is, immers

$$\begin{aligned} |\tilde{a}(u_i, \varphi)| &\leq \left| \left(\frac{u_i}{\tau}, \varphi \right) \right| + |(K_i \nabla u_i, \nabla \varphi)| \\ &\leq \frac{1}{\tau} \|u_i\| \|\varphi\| + C_1 \|\nabla u_i\| \|\nabla \varphi\| \\ &\leq \frac{1}{\tau} \|u_i\|_1 \|\varphi\|_1 + C_1 \|u_i\|_1 \|\varphi\|_1 \\ &\leq C \|u_i\|_1 \|\varphi\|_1, \end{aligned}$$

voor alle $u_i, \varphi \in V_2$. De functionaal $\tilde{f}_i(\varphi)$ is begrensd als $u_{i-1}, f \in L_2(\Omega)$ en $g^N \in L_2(\Gamma_N)$. Gebruikmakend van de driehoeksongelijkheid, Cauchy-Schwarz, de spoorongelijkheid, hulpstelling A.1.2 en (2.4) vinden we immers voor alle $\varphi \in V_2$

$$\begin{aligned} &\left| (f_i, \varphi) - (g_i^N, \varphi)_{\Gamma_N} + \left(\frac{u_{i-1}}{\tau}, \varphi \right) \right| \\ &\leq \|f_i\| \|\varphi\| + \|g_i^N\|_{\Gamma_N} \|\varphi\|_{\Gamma_N} + \frac{1}{\tau} \|u_{i-1}\| \|\varphi\| \\ &\leq \|f_i\| \|\varphi\| + C \|g_i^N\|_{\Gamma_N} \|\varphi\|_1 + \frac{1}{\tau} \|u_{i-1}\| \|\varphi\| \\ &\leq \|f_i\| \|\varphi\|_1 + C \|g_i^N\|_{\Gamma_N} \|\varphi\|_1 + \frac{1}{\tau} \|u_{i-1}\| \|\varphi\|_1 \\ &\leq C \left(\tau, \|u_{i-1}\|, \|g^N\|_{\Gamma_N}, \|f\| \right) \|\varphi\|_1. \end{aligned}$$

Uit Lax-Milgram volgt nu dat $u_i \in V_2$ bestaat en uniek is. We kunnen volgende stelling formuleren.

Stelling 5.1.1. *Stel u_0 en $f \in L_2(\Omega)$, $g^N \in L_2(\Gamma_N)$, $K > 0$ en $K \in L_\infty((0, T) \times \Omega)$. Dan heeft het recurrent systeem van lineaire elliptische BVP's (5.4) voor elke $i = 1, \dots, n$ een unieke zwakke oplossing u_i in de ruimte van testfuncties V_2 .*

De volgende stap is een studie te maken van de stabiliteit van u_i .

5.1.3 A priori afschattingen

We berekenen enkele stabiliteitsresultaten voor $u_i, i = 1, \dots, n$ de unieke zwakke oplossingen van het recurrent systeem van lineaire elliptische BVP's (5.4). Daarbij maken we gebruik van enkele hulpstellingen (Young, Gronwall en Partiële sommatie) die terug te vinden zijn in de Appendix.

Lemma 5.1.2. *Stel $u_i, i = 1, \dots, n$ de unieke zwakke oplossingen van het recurrent systeem van lineaire elliptische BVP's (5.4). Stel $j \in \mathbb{N}$ en $1 \leq j \leq n$. Veronderstel $K \in L_\infty((0, T) \times \Omega)$ Lipschitzcontinu. Dan bestaat er een positieve constante C zodanig dat*

(i) *indien $u_0 \in L_2(\Omega)$, $g^N \in L_2((0, T), L_2(\Gamma_N))$ en $f \in L_2((0, T), L_2(\Omega))$ dan*

$$\|u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \leq C,$$

met $C = C\left(\|u_0\|, \|g^N\|_{L_2((0, T), L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0, T), L_2(\Omega))}\right)$.

(ii) *indien $u_0 \in H^1(\Omega)$, $g^N \in L_2((0, T), L_2(\Gamma_N))$ en $f \in L_2((0, T), L_2(\Omega))$ dan*

$$\|\nabla u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \leq C,$$

met $C = C\left(\|u_0\|, \|\nabla u_0\|, \|g^N\|_{L_2((0, T), L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0, T), L_2(\Omega))}\right)$.

Bewijs. We beginnen met het bewijs van (i). Stel $\varphi = u_i \tau$ in (5.4). Sommatie over $i = 1, \dots, j$ geeft:

$$\sum_{i=1}^j (u_i - u_{i-1}, u_i) + \sum_{i=1}^j (K_i \nabla u_i, \nabla u_i) \tau = \sum_{i=1}^j (f_i, u_i) \tau - \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i)_{\Gamma_N} \tau.$$

Uit hulpstelling A.1.3 en $K \geq C_0$ volgt

$$\begin{aligned} & \frac{\|u_j\|^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + C_0 \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \\ & \leq \sum_{i=1}^j (f_i, u_i) \tau - \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i)_{\Gamma_N} \tau + \frac{\|u_0\|^2}{2}. \end{aligned}$$

We nemen de absolute waarde van beide leden. Rekening houdend met het feit dat het linkerlid niet-negatief is en de driehoeksongelijkheid vinden we

$$\begin{aligned} & \frac{\|u_j\|^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + C_0 \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \\ & \leq \sum_{i=1}^j |(f_i, u_i)| \tau + \sum_{i=1}^j |(g_i^N, u_i)_{\Gamma_N}| \tau + \frac{\|u_0\|^2}{2}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

We bekijken de termen in het rechterlid apart. Uit Cauchy-Schwarz en Young volgt dat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j |(f_i, u_i)| \tau &\leq \sum_{i=1}^j \|f_i\| \|u_i\| \tau \\ &\leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Achtereenvolgens toepassen van Cauchy-Schwarz, Young, de spoorongelijkheid en (2.4) geeft

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j |(g_i^N, u_i)_{\Gamma_N}| \tau &\leq \sum_{i=1}^j \|g_i^N\|_{\Gamma_N} \|u_i\|_{\Gamma_N} \tau \\ &\leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|_{\Gamma_N}^2 \tau \\ &\leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|_1^2 \tau \\ &\leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Combinatie van (5.6), (5.7) en (5.8) levert

$$\begin{aligned} \frac{\|u_j\|^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + C_0 \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \\ \leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau + \frac{\|u_0\|^2}{2} \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned} \frac{\|u_j\|^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + (C_0 - \varepsilon) \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \\ \leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + \frac{\|u_0\|^2}{2} + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Kies $\varepsilon > 0$ zodanig dat $C_0 - \varepsilon > 0$. Als we in (5.9) het linkerlid verkleinen door de factor $\min(\frac{1}{2}, C_0 - \varepsilon)$ voorop te zetten en deze positieve term weg te delen vinden we

$$\begin{aligned} \|u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \\ \leq C \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + C \sum_{i=1}^j \|g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + C \|u_0\|^2 + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau \end{aligned}$$

of

$$\|u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \leq D + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau, \quad (5.10)$$

met $D = D \left(\|u_0\|, \|g^N\|_{L_2((0,T),L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))} \right)$. Stel

$$y_j = \|u_j\|^2 + \sum_{k=1}^j \|u_k - u_{k-1}\|^2 + \sum_{k=1}^j \|\nabla u_k\|^2 \tau.$$

Vergroten van het rechterlid van (5.10) geeft

$$y_j \leq D + C \sum_{i=1}^j \left[\|u_i\|^2 \tau + \sum_{k=1}^i \|u_k - u_{k-1}\|^2 \tau + \sum_{k=1}^i \|\nabla u_k\|^2 \tau^2 \right]$$

of

$$y_j \leq D + C \sum_{i=1}^j y_i \tau.$$

Uit Gronwall volgt het gestelde: $y_j \leq D e^{CT}$.

Vervolgens gaan we (ii) bewijzen. Stel $\varphi = u_i - u_{i-1} = \tau \delta u_i$ in (5.4). Sommatie over $i = 1, \dots, j$ geeft:

$$\sum_{i=1}^j (\delta u_i, \delta u_i) \tau + \sum_{i=1}^j (K_i \nabla u_i, \nabla [u_i - u_{i-1}]) = \sum_{i=1}^j (f_i, \delta u_i) \tau - \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i - u_{i-1})_{\Gamma_N}.$$

Uit hulpstelling A.1.6 volgt

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \frac{1}{2} (K_j \nabla u_j, \nabla u_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j (K_i \nabla [u_i - u_{i-1}], \nabla [u_i - u_{i-1}]) \\ & \leq \sum_{i=1}^j (f_i, \delta u_i) \tau + \frac{1}{2} (K_0 \nabla u_0, \nabla u_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j (\delta K_i \nabla u_{i-1}, \nabla u_{i-1}) \tau \\ & \quad - \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i - u_{i-1})_{\Gamma_N}. \end{aligned}$$

Omdat $K \geq C_0$ geldt

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \frac{C_0}{2} \|\nabla u_j\|^2 + \frac{C_0}{2} \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \\ & \leq \sum_{i=1}^j (f_i, \delta u_i) \tau + \frac{1}{2} (K_0 \nabla u_0, \nabla u_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j (\delta K_i \nabla u_{i-1}, \nabla u_{i-1}) \tau \\ & \quad - \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i - u_{i-1})_{\Gamma_N}. \end{aligned}$$

Het linkerlid is niet-negatief, als we de absolute waarde nemen van beide leden vinden we

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \frac{C_0}{2} \|\nabla u_j\|^2 + \frac{C_0}{2} \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \\
& \leq \sum_{i=1}^j |(f_i, \delta u_i)| \tau + \frac{1}{2} |(K_0 \nabla u_0, \nabla u_0)| + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j |(\delta K_i \nabla u_{i-1}, \nabla u_{i-1})| \tau \\
& \quad + \left| \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i - u_{i-1})_{\Gamma_N} \right|. \quad (5.11)
\end{aligned}$$

We gaan alle termen uit het rechterlid apart afschatten. Uit Cauchy-Schwarz en Young volgt dat

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^j |(f_i, \delta u_i)| \tau & \leq \sum_{i=1}^j \|f_i\| \|\delta u_i\| \tau \\
& \leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Door gebruik te maken van $|\delta K_i| = \frac{|K_i - K_{i-1}|}{\tau} \leq \frac{L_K(t_i - t_{i-1})}{\tau} = L_K$ (K Lipschitzcontinu) vinden we dat

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^j |(\delta K_i \nabla u_{i-1}, \nabla u_{i-1})| \tau & \leq L_K \sum_{i=1}^j \|\nabla u_{i-1}\|^2 \tau \\
& \leq L_K \|\nabla u_0\|^2 \tau + L_K \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau. \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Uit $K \leq C_1$ volgt

$$|(K_0 \nabla u_0, \nabla u_0)| \leq C_1 \|\nabla u_0\|^2. \quad (5.14)$$

Toepassen van stelling A.1.7 en de driehoeksongelijkheid geeft

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i - u_{i-1})_{\Gamma_N} \right| \\
& = \left| (g_j^N, u_j)_{\Gamma_N} - (g_0^N, u_0)_{\Gamma_N} - \sum_{i=1}^j (\delta g_i^N, u_{i-1})_{\Gamma_N} \tau \right| \\
& \leq \left| (g_j^N, u_j)_{\Gamma_N} \right| + \left| (g_0^N, u_0)_{\Gamma_N} \right| + \sum_{i=1}^j \left| (\delta g_i^N, u_{i-1})_{\Gamma_N} \right| \tau. \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Ook deze termen in het rechterlid schatten we apart af. Uit Cauchy-Schwarz, Young en Nečas volgt

$$\begin{aligned}
\left| (g_j^N, u_j)_{\Gamma_N} \right| & \leq \|g_j^N\|_{\Gamma_N} \|u_j\|_{\Gamma_N} \\
& \leq \frac{\|g_j^N\|_{\Gamma_N}^2}{2} + \frac{\|u_j\|_{\Gamma_N}^2}{2} \\
& \leq \frac{\|g_j^N\|_{\Gamma_N}^2}{2} + \varepsilon \|\nabla u_j\|^2 + C_\varepsilon \|u_j\|^2. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Omdat u_0 en g_0^N bekend zijn is

$$\left| (g_0^N, u_0)_{\Gamma_N} \right| \leq C. \quad (5.17)$$

Door gebruik te maken van Cauchy-Schwarz, Young en Nečas vinden we dat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j \left| (\delta g_i^N, u_{i-1})_{\Gamma_N} \right| \tau &\leq \sum_{i=1}^j \|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N} \|u_{i-1}\|_{\Gamma_N} \tau \\ &\leq \sum_{i=1}^j \frac{\|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N}^2}{2} \tau + \sum_{i=1}^j \frac{\|u_{i-1}\|_{\Gamma_N}^2}{2} \tau \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\nabla u_{i-1}\|^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_{i-1}\|^2 \tau \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + \varepsilon \|\nabla u_0\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \\ &\quad + C_\varepsilon \|u_0\|^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Dan volgt uit (5.15), (5.16), (5.17), (5.18) en $\tau < 1$ dat

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^j (g_i^N, u_i - u_{i-1})_{\Gamma_N} \right| \\ &\leq C + \frac{\|g_j^N\|_{\Gamma_N}^2}{2} + \varepsilon \|\nabla u_j\|^2 + C_\varepsilon \|u_j\|^2 + \varepsilon \|\nabla u_0\|^2 \\ &\quad + C_\varepsilon \|u_0\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Nu volgt uit (5.11), (5.12), (5.13), (5.14) en (5.19) dat

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \frac{C_0}{2} \|\nabla u_j\|^2 + \frac{C_0}{2} \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \\ &\leq C + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + C \|\nabla u_0\|^2 + C \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau + C_\varepsilon \|u_0\|^2 \\ &\quad + \frac{\|g_j^N\|_{\Gamma_N}^2}{2} + \varepsilon \|\nabla u_j\|^2 + C_\varepsilon \|u_j\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}
& (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \left(\frac{C_0}{2} - \varepsilon \right) \|\nabla u_j\|^2 + \frac{C_0}{2} \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \\
& \leq C + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + C \|\nabla u_0\|^2 + C \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau + C_\varepsilon \|u_0\|^2 + \frac{\|g_j^N\|_{\Gamma_N}^2}{2} \\
& \quad + C_\varepsilon \|u_j\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau.
\end{aligned}$$

We kiezen ε klein genoeg, maar positief, zodanig dat $(1 - \varepsilon) > 0$ en $(\frac{C_0}{2} - \varepsilon) > 0$. Eerst verkleinen we het linkerlid door de factor $\min(1 - \varepsilon, \frac{C_0}{2} - \varepsilon, \frac{C_0}{2}) > 0$ voorop te zetten en daarna delen we deze term weg naar het rechterlid. We krijgen

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \|\nabla u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \\
& \leq C + C \sum_{i=1}^j \|f_i\|^2 \tau + C \|\nabla u_0\|^2 + C \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau + C \|u_0\|^2 \\
& \quad + C \|g_j^N\|_{\Gamma_N}^2 + C \|u_j\|^2 + C \sum_{i=1}^j \|\delta g_i^N\|_{\Gamma_N}^2 \tau + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau
\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \|\nabla u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \\
& \leq E + C \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau + C \|u_j\|^2 + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau,
\end{aligned}$$

met $E = E \left(\|u_0\|, \|\nabla u_0\|, \|g^N\|_{L_2((0,T),L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))} \right)$. Tenslotte vergroten we het rechterlid door gebruik te maken van de eerste a priori afschatting (i) en bekomen we

$$\sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \|\nabla u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \leq E.$$

□

5.1.4 Goed gedefinieerdheid voorwaarts ‘dual’ probleem

Tot nu toe hebben we enkel het bestaan van $u_i, i = 1, \dots, n$ bewezen (zie Stelling 5.1.1). Lemma 5.1.2 geeft informatie over de stabiliteit van u_i . Nu verlengen we de functies u_i in het volledige tijdsinterval $[0, T]$. Dit kan op twee manieren. We definiëren een stuksgewijze constante functie in de tijd

$$\bar{u}_n(t) = \begin{cases} u_0 & \text{voor } t = 0; \\ u_i & \text{voor } t \in]t_{i-1}, t_i]; \end{cases} \quad (5.20)$$

en een stuksgewijze lineaire continue functie in de tijd

$$u_n(t) = \begin{cases} u_0 & \text{voor } t = 0; \\ u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i & \text{voor } t \in]t_{i-1}, t_i]. \end{cases} \quad (5.21)$$

Beide functies worden de Rothefuncties genoemd.

Stelling 5.1.3. *Lemma 5.1.2(ii) kan herschreven worden voor $t \in [0, T]$ als*

$$\|\nabla \bar{u}_n(t)\|^2 + \int_0^t \|\partial_t u_n(s)\|^2 ds + \sum_{i=1}^n \left\| \nabla \int_{t_{i-1}}^{t_i} \partial_t u_n(s) \right\|^2 \leq C.$$

met $C = C\left(\|u_0\|, \|\nabla u_0\|, \|g^N\|_{L_2((0,T),L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))}\right)$ en \bar{u}_n , respectievelijk u_n gedefinieerd zoals in (5.20), respectievelijk (5.21).

Bewijs. Uit lemma 5.1.2(ii) volgt dat voor $j = 1, \dots, n$ geldt dat

$$\|\nabla u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau + \sum_{i=1}^j \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \leq C,$$

met $C = C\left(\|u_0\|, \|\nabla u_0\|, \|g^N\|_{L_2((0,T),L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))}\right)$.

Uit $\|\nabla u_j\|^2 \leq C$ en $\bar{u}_n(t) = u_j$ voor elke $t \in]t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$ volgt dat $\|\nabla \bar{u}_n(t)\|^2 \leq C$. Als $t \in]t_{i-1}, t_i]$ is $\delta u_i = \partial_t u_n(t)$. Uit $\sum_{i=1}^n \|\delta u_i\|^2 \tau \leq C$ (deze sommatie kunnen we beschouwen als de oppervlakte onder een trapfunctie) volgt dat $\int_0^T \|\partial_t u_n(s)\|^2 ds \leq C$. A fortiori is $\int_0^t \|\partial_t u_n(s)\|^2 ds \leq C$. Bovendien is (als $t \in]t_{i-1}, t_i]$)

$$u_i - u_{i-1} = \tau \delta u_i = \tau \partial_t u_n(t) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \partial_t u_n(s),$$

$$\text{en dus } \sum_{i=1}^n \left\| \nabla \int_{t_{i-1}}^{t_i} \partial_t u_n(s) \right\|^2 \leq C. \quad \square$$

Stelling 5.1.4. *Er geldt*

$$\int_0^T \|\nabla [u_n(t) - \bar{u}_n(t)]\|^2 dt + \int_0^T \|u_n(t) - \bar{u}_n(t)\|^2 dt \leq C\tau.$$

met $C = C\left(\|u_0\|, \|\nabla u_0\|, \|g^N\|_{L_2((0,T),L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0,T),L_2(\Omega))}\right)$ en \bar{u}_n , respectievelijk u_n gedefinieerd zoals in (5.20), respectievelijk (5.21).

Bewijs. Als $t = 0$ is $u_n(t) - \bar{u}_n(t) = 0$. Indien $t \in]t_{i-1}, t_i]$, dan is

$$\begin{aligned} |u_n(t) - \bar{u}_n(t)| &= \left| u_{i-1} + \frac{t - t_{i-1}}{\tau} (u_i - u_{i-1}) - u_i \right| \\ &\leq |u_{i-1} - u_i| + \underbrace{\left| \frac{t - t_{i-1}}{\tau} \right|}_{\leq 1} |u_i - u_{i-1}| \\ &\leq 2|u_i - u_{i-1}|. \end{aligned}$$

Dan is $|u_n(t) - \bar{u}_n(t)|^2 \leq 4|u_i - u_{i-1}|^2$. Integratie van deze ongelijkheid over Ω geeft

$$\|u_n(t) - \bar{u}_n(t)\|^2 \leq 4 \|u_i - u_{i-1}\|^2. \quad (5.22)$$

Als we (5.22) integreren over het tijdsinterval $[0, T]$ vinden we ($\|u_i - u_{i-1}\|$ is een trapfunctie)

$$\int_0^T \|u_n(s) - \bar{u}_n(s)\|^2 ds \leq 4 \sum_{i=1}^n \|u_i - u_{i-1}\|^2 \tau \leq C\tau, \quad (5.23)$$

met $C = C \left(\|u_0\|, \|h\|_{C([0, T])}, \|g^N\|_{L_2((0, T), L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0, T), L_2(\Omega))} \right)$. De laatste ongelijkheid volgt uit lemma 5.1.2(i).

Analoog als voordien vinden we voor $t \in]t_{i-1}, t_i]$ dat

$$\begin{aligned} |\nabla [u_n(t) - \bar{u}_n(t)]| &= \left| \nabla [u_{i-1} - u_i] + \frac{t - t_{i-1}}{\tau} \nabla [u_i - u_{i-1}] \right| \\ &\leq 2 |\nabla [u_i - u_{i-1}]|. \end{aligned}$$

Bijgevolg is $|\nabla [u_n(t) - \bar{u}_n(t)]|^2 \leq 4 |\nabla [u_i - u_{i-1}]|^2$. Integratie van deze ongelijkheid over Ω en het tijdsinterval $[0, T]$ geeft wegens lemma 5.1.2(ii) ($\|u_i - u_{i-1}\|$ is een trapfunctie)

$$\int_0^T \|\nabla [u_n(s) - \bar{u}_n(s)]\|^2 ds \leq 4 \sum_{i=1}^n \|\nabla [u_i - u_{i-1}]\|^2 \tau \leq C\tau, \quad (5.24)$$

met $C = C \left(\|u_0\|, \|\nabla u_0\|, \|g^N\|_{L_2((0, T), L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0, T), L_2(\Omega))} \right)$. Uit (5.23) en (5.24) volgt

$$\int_0^T \|\nabla [u_n(s) - \bar{u}_n(s)]\|^2 ds + \int_0^T \|u_n(s) - \bar{u}_n(s)\|^2 ds \leq C\tau,$$

met $C = C \left(\|u_0\|, \|\nabla u_0\|, \|g^N\|_{L_2((0, T), L_2(\Gamma_N))}, \|f\|_{L_2((0, T), L_2(\Omega))} \right)$. \square

Zoals de Rothe functies definiëren we de volgende stuksgewijze constante functies in de tijd:

$$\bar{K}_n(t) = \begin{cases} K_0 & \text{voor } t = 0; \\ K_i & \text{voor } t \in]t_{i-1}, t_i]; \end{cases}$$

$$\bar{g}_n^N(t) = \begin{cases} g_0^N & \text{voor } t = 0; \\ g_i^N & \text{voor } t \in]t_{i-1}, t_i]; \end{cases}$$

$$\bar{f}_n(t) = \begin{cases} f_0 & \text{voor } t = 0; \\ f_i & \text{voor } t \in]t_{i-1}, t_i]. \end{cases}$$

De variationele formulering

$$(\delta u_i, \varphi) + (K_i \nabla u_i, \nabla \varphi) = (f_i, \varphi) - (g_i^N, \varphi)_{\Gamma_N}$$

is enkel geldig op de tijdstippen t_1, \dots, t_n . We kunnen deze variationele formulering herschrijven als (voor $t \in [0, T]$)

$$(\partial_t u_n(t), \varphi) + (\overline{K}_n(t) \nabla \bar{u}_n(t), \nabla \varphi) = (\bar{f}_n(t), \varphi) - (\bar{g}_n^N(t), \varphi)_{\Gamma_N}. \quad (5.25)$$

In deze relatie willen we de limiet voor $n \rightarrow \infty$ toepassen. Om dit te doen, tonen we de convergentie van u_n en \bar{u}_n aan in geschikte ruimten.

We hebben reeds verondersteld dat K Lipschitzcontinu is, dit wil zeggen dat er een $L_K > 0$ bestaat zodanig dat

$$|K(t_1) - K(t_2)| \leq L_K |t_1 - t_2|, \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T].$$

Voor het vervolg hebben we nodig dat ook g^N en f Lipschitzcontinu zijn. We nemen aan dat er constanten $L_{g^N}, L_f > 0$ bestaan zodanig dat $\forall t_1, t_2 \in [0, T]$ geldt dat

$$|g^N(t_1) - g^N(t_2)| \leq L_{g^N} |t_1 - t_2|,$$

en

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq L_f |t_1 - t_2|.$$

Opmerking 5.1.5. Uit K Lipschitzcontinu volgt dat voor elke $t \in]t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n$ geldt

$$\begin{aligned} |K(t) - \overline{K}_n(t)| &= |K(t) - K(t_i)| \\ &\leq L_K |t - t_i| \\ &\leq L_K \tau \\ &\leq L_K \frac{T}{n} \\ &\leq \frac{L_K}{n}. \end{aligned}$$

Hetzelfde geldt analoog voor g^N en f .

Lemma 5.1.6. *Stel $u_0 \in H^1(\Omega)$ en K, g^N en f Lipschitzcontinu. Dan bestaat er een $u \in C([0, T], L_2(\Omega)) \cap L_2((0, T), H^1(\Omega))$ zodanig dat*

$$u_n \rightarrow u \text{ voor } n \rightarrow \infty.$$

Bewijs. De ruimten $C([0, T], L_2(\Omega))$ en $L_2((0, T), H^1(\Omega))$ zijn Banachruimten. De rij $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ behoort tot beide ruimten. Immers uit lemma 5.1.2 volgt

$$\int_0^T \|u_n(s)\|_1^2 ds = \int_0^T \|u_n(s)\|^2 ds + \int_0^T \|\nabla u_n(s)\|^2 ds \leq C$$

en

$$\max_{t \in [0, T]} \|u_n(t)\| \leq C.$$

We gaan bewijzen dat $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een Cauchyrij is in beide ruimten, dit wil zeggen dat

$$\max_{t \in [0, T]} \|u_p(t) - u_q(t)\| \rightarrow 0 \text{ en } \int_0^T \|u_p(s) - u_q(s)\|_1^2 ds \rightarrow 0$$

als $\min(p, q) \rightarrow \infty$. De rij $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is dan convergent in beide Banachruimten. Aangezien de limiet van een rij uniek is, convergeert de rij $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naar een element in beide ruimten.

Aantonen dat $\int_0^T \|u_p(s) - u_q(s)\|_1^2 ds \rightarrow 0$ als $\min(p, q) \rightarrow \infty$, is equivalent met bewijzen dat (wegens Friedrichs (2.6) omdat $u_i|_{\Gamma_D} = 0$)

$$\int_0^T \|\nabla [u_p(s) - u_q(s)]\|^2 ds \rightarrow 0$$

als $\min(p, q) \rightarrow \infty$. Om te beginnen herschrijven we (5.25) in de volgende vorm

$$\begin{aligned} (\partial_t u_n, \varphi) + (K \nabla u_n, \nabla \varphi) &= (\bar{f}_n, \varphi) + (K \nabla u_n, \nabla \varphi) + (K \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) \\ &\quad - (K \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) - (\bar{K}_n \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) - (\bar{g}_n^N, \varphi)_{\Gamma_N} \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned} (\partial_t u_n, \varphi) + (K \nabla u_n, \nabla \varphi) &= (\bar{f}_n, \varphi) + ([K - \bar{K}_n] \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) + (K \nabla [u_n - \bar{u}_n], \nabla \varphi) - (\bar{g}_n^N, \varphi)_{\Gamma_N}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

We maken het verschil tussen (5.26) voor $n = r$ en voor $n = s$. Bovendien stellen we $\varphi = u_r - u_s$. We vinden na integratie over het tijdsinterval $]0, \eta[$ voor willekeurige $\eta \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} &\int_0^\eta (\partial_t (u_r - u_s), u_r - u_s) + \int_0^\eta (K \nabla [u_r - u_s], \nabla [u_r - u_s]) \\ &= \int_0^\eta (\bar{f}_r - \bar{f}_s, u_r - u_s) + \int_0^\eta ([K - \bar{K}_r] \nabla \bar{u}_r, \nabla [u_r - u_s]) \\ &\quad - \int_0^\eta ([K - \bar{K}_s] \nabla \bar{u}_s, \nabla [u_r - u_s]) + \int_0^\eta (K \nabla [u_r - \bar{u}_r], \nabla [u_r - u_s]) \\ &\quad - \int_0^\eta (K \nabla [u_s - \bar{u}_s], \nabla [u_r - u_s]) - \int_0^\eta (\bar{g}_r^N - \bar{g}_s^N, u_r - u_s)_{\Gamma_N}. \end{aligned}$$

Uit hulpstelling A.1.8 en $K \geq C_0$ volgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|(u_r - u_s)(\eta)\|^2 - \frac{1}{2} \|(u_r - u_s)(0)\|^2 + C_0 \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\ &\leq \int_0^\eta (\bar{f}_r - \bar{f}_s, u_r - u_s) + \int_0^\eta ([K - \bar{K}_r] \nabla \bar{u}_r, \nabla [u_r - u_s]) \\ &\quad - \int_0^\eta ([K - \bar{K}_s] \nabla \bar{u}_s, \nabla [u_r - u_s]) + \int_0^\eta (K \nabla [u_r - \bar{u}_r], \nabla [u_r - u_s]) \\ &\quad - \int_0^\eta (K \nabla [u_s - \bar{u}_s], \nabla [u_r - u_s]) - \int_0^\eta (\bar{g}_r^N - \bar{g}_s^N, u_r - u_s)_{\Gamma_N}. \end{aligned}$$

Aangezien $(u_r - u_s)(0) = u_r(0) - u_s(0) = u_0 - u_0 = 0$ is het linkerlid niet-negatief. We nemen de absolute waarde van beide leden. Uit de driehoeksongelijkheid volgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|(u_r - u_s)(\eta)\|^2 + C_0 \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\ &\leq \int_0^\eta |(\bar{f}_r - \bar{f}_s, u_r - u_s)| + \int_0^\eta |([K - \bar{K}_r] \nabla \bar{u}_r, \nabla [u_r - u_s])| \\ &\quad + \int_0^\eta |([K - \bar{K}_s] \nabla \bar{u}_s, \nabla [u_r - u_s])| + \int_0^\eta |(K \nabla [u_r - \bar{u}_r], \nabla [u_r - u_s])| \\ &\quad + \int_0^\eta |(K \nabla [u_s - \bar{u}_s], \nabla [u_r - u_s])| + \int_0^\eta |(\bar{g}_r^N - \bar{g}_s^N, u_r - u_s)_{\Gamma_N}|. \end{aligned} \quad (5.27)$$

We bekijken alle leden van het rechterlid apart. Achtereenvolgens toepassen van Cauchy-Schwarz, de driehoeksongelijkheid, f Lipschitzcontinu, Young en $\eta \leq T$ geeft

$$\begin{aligned}
\int_0^\eta |(\bar{f}_r - \bar{f}_s, u_r - u_s)| &\leq \int_0^\eta \|\bar{f}_r - \bar{f}_s\| \|u_r - u_s\| \\
&\leq \int_0^\eta \|\bar{f}_r - f + f - \bar{f}_s\| \|u_r - u_s\| \\
&\leq \int_0^\eta (\|\bar{f}_r - f\| + \|f - \bar{f}_s\|) \|u_r - u_s\| \\
&\leq \int_0^\eta \left(\sqrt{\int_\Omega (\bar{f}_r - f)^2} + \sqrt{\int_\Omega (f - \bar{f}_s)^2} \right) \|u_r - u_s\| \\
&\leq \int_0^\eta \left(\sqrt{\int_\Omega \left(\frac{L_f}{r}\right)^2} + \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{L_f}{s}\right)^2} \right) \|u_r - u_s\| \\
&\leq \int_0^\eta \left(\frac{L_f}{r} + \frac{L_f}{s} \right) \sqrt{|\Omega|} \|u_r - u_s\| \\
&\leq C_\varepsilon \int_0^\eta \left(\frac{L_f}{r} + \frac{L_f}{s} \right)^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2 \\
&\leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} \right) + \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2. \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Merk op dat we in de laatste overgang gebruik maakten van de volgende ongelijkheid: $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Door gebruik te maken van Cauchy-Schwarz, Young, f Lipschitzcontinu, stelling 5.1.3 en $\eta \leq T$ vinden we

$$\begin{aligned}
\int_0^\eta |([K - \bar{K}_r] \nabla \bar{u}_r, \nabla [u_r - u_s])| &\leq \int_0^\eta \|[K - \bar{K}_r] \nabla \bar{u}_r\| \|\nabla [u_r - u_s]\| \\
&\leq C_\varepsilon \int_0^\eta \|[K - \bar{K}_r] \nabla \bar{u}_r\|^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\
&\leq C_\varepsilon \int_0^\eta \int_\Omega (K - \bar{K}_r)^2 (\nabla \bar{u}_r)^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\
&\leq C_\varepsilon \int_0^\eta \left(\frac{1}{r}\right)^2 \|\nabla \bar{u}_r\|^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\
&\leq \frac{C_\varepsilon}{r^2} + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2. \tag{5.29}
\end{aligned}$$

Analoog is

$$\int_0^\eta |([K - \bar{K}_s] \nabla \bar{u}_s, \nabla [u_r - u_s])| \leq \frac{C_\varepsilon}{s^2} + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2. \tag{5.30}$$

Uit $K \leq C_1$, Cauchy-Schwarz, Young en stelling 5.1.4 volgt

$$\begin{aligned}
\int_0^\eta |(K \nabla [u_r - \bar{u}_r], \nabla [u_r - u_s])| &\leq C_1 \int_0^\eta \|\nabla [u_r - \bar{u}_r]\| \|\nabla [u_r - u_s]\| \\
&\leq C_\varepsilon \underbrace{\int_0^\eta \|\nabla [u_r - \bar{u}_r]\|^2}_{\leq C\tau_r \leq \frac{C}{r}} + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\
&\leq \frac{C_\varepsilon}{r} + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2. \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Analoog is

$$\int_0^\eta |(K \nabla [u_s - \bar{u}_s], \nabla [u_r - u_s])| \leq \frac{C_\varepsilon}{s} + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2. \quad (5.32)$$

Door gebruik te maken van Cauchy-Schwarz, de driehoeksongelijkheid, g^N Lipschitzcontinu, Young, de spoorongelijkheid en (2.4) vinden we

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta |(\bar{g}_r^N - \bar{g}_s^N, u_r - u_s)_{\Gamma_N}| \\ & \leq \int_0^\eta \|\bar{g}_r^N - g + g - \bar{g}_s^N\|_{\Gamma_N} \|u_r - u_s\|_{\Gamma_N} \\ & \leq \int_0^\eta \left(\frac{L_{g^N}}{r} + \frac{L_{g^N}}{s} \right) \sqrt{|\Gamma_N|} \|u_r - u_s\|_{\Gamma_N} \\ & \leq C_\varepsilon \int_0^\eta \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right)^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|_{\Gamma_N}^2 \\ & \leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right)^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|_1^2 \\ & \leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} \right) + \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Combinatie van (5.27), (5.28), (5.29), (5.30), (5.31), (5.32) en (5.33) geeft

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|(u_r - u_s)(\eta)\|^2 + C_0 \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\ & \leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} \right) + C_\varepsilon \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) + \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \end{aligned}$$

of

$$\frac{1}{2} \|(u_r - u_s)(\eta)\|^2 + (C_0 - \varepsilon) \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) + \varepsilon \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2.$$

We kiezen $\varepsilon > 0$ zodanig dat $C_0 - \varepsilon > 0$. We verkleinen het linkerlid en delen de positieve factor $\min(\frac{1}{2}, C_0 - \varepsilon)$ weg:

$$\|(u_r - u_s)(\eta)\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \leq C \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) + C \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2.$$

Na vergroten van het rechterlid bekomen we

$$\begin{aligned} & \|(u_r - u_s)(\eta)\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \\ & \leq C \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) + C \int_0^\eta \left[\|(u_r - u_s)(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \right] dt. \end{aligned}$$

Uit Gronwall volgt dat voor elke $\eta \in [0, T]$ geldt

$$\|(u_r - u_s)(\eta)\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \leq C \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right).$$

Bijgevolg geldt er

$$\max_{\eta \in [0, T]} \|u_r(\eta) - u_s(\eta)\|^2 + \int_0^T \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \leq C \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right).$$

Nu nemen we in het vorige de limiet $\min(r, s) \rightarrow \infty$. We bekommen

$$\max_{\eta \in [0, T]} \|u_r(\eta) - u_s(\eta)\|^2 \rightarrow 0 \text{ en } \int_0^T \|\nabla [u_r - u_s]\|^2 \rightarrow 0,$$

dus de Rothefuncties $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vormen een Cauchyrij in de de ruimtes $C([0, T], L_2(\Omega))$ en $L_2((0, T), H^1(\Omega))$. \square

Lemma 5.1.7. *Stel u de limiet van de rij (u_n) . Dan is $\partial_t u \in L_2((0, T), L_2(\Omega))$ en $\partial_t u_n \rightarrow \partial_t u$ in $L_2((0, T), L_2(\Omega))$.*

Bewijs. Het bewijs is identiek met het bewijs van Lemma 4.4.5. \square

Stelling 5.1.8. *Er bestaat een unieke zwakke oplossing in V_2 voor (5.3).*

Bewijs. We moeten de limiet nemen voor $n \rightarrow \infty$ in (5.25). Deze identiteit is equivalent met (5.26), wat we ook als volgt kunnen schrijven

$$\begin{aligned} & (\partial_t u_n, \varphi) + (K \nabla u_n, \nabla \varphi) \\ &= (f, \varphi) + (\bar{f}_n - f, \varphi) + ([K - \bar{K}_n] \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) \\ & \quad + (K \nabla [u_n - \bar{u}_n], \nabla \varphi) + (g^N - \bar{g}_n^N, \varphi)_{\Gamma_N} - (g^N, \varphi)_{\Gamma_N}. \end{aligned}$$

We integreren het voorgaande over het tijdsinterval $]0, \eta[\subset [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta (\partial_t u_n, \varphi) + \int_0^\eta (K \nabla u_n, \nabla \varphi) \\ &= \int_0^\eta (f, \varphi) + \int_0^\eta (\bar{f}_n - f, \varphi) + \int_0^\eta ([K - \bar{K}_n] \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) \\ & \quad + \int_0^\eta (K \nabla [u_n - \bar{u}_n], \nabla \varphi) + \int_0^\eta (g^N - \bar{g}_n^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \int_0^\eta (g^N, \varphi)_{\Gamma_N}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

We tonen nu aan dat

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta (\bar{f}_n - f, \varphi) \rightarrow 0, \\ & \int_0^\eta ([K - \bar{K}_n] \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) \rightarrow 0, \\ & \int_0^\eta (K \nabla [u_n - \bar{u}_n], \nabla \varphi) \rightarrow 0, \\ & \int_0^\eta (g^N - \bar{g}_n^N, \varphi)_{\Gamma_N} \rightarrow 0, \\ & \int_0^\eta (\partial_t u_n, \varphi) \rightarrow \int_0^\eta (\partial_t u, \varphi) \end{aligned}$$

en

$$\int_0^\eta (K \nabla u_n, \nabla \varphi) \rightarrow \int_0^\eta (K \nabla u, \nabla \varphi)$$

als $n \rightarrow \infty$. Uit Cauchy-Schwarz, f Lipschitzcontinu, $\eta \leq T$ en $\varphi \in L_2(\Omega)$ volgt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\eta (\bar{f}_n - f, \varphi) \right| &\leq \int_0^\eta \|\bar{f}_n - f\| \|\varphi\| \\ &\leq \|\varphi\| \int_0^\eta \int_\Omega (\bar{f}_n - f)^2 \\ &\leq \|\varphi\| \int_0^\eta \int_\Omega \left(\frac{L_f}{n}\right)^2 \\ &\leq \frac{C}{n^2} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

als $n \rightarrow \infty$. Analoog geldt wegens g^N Lipschitzcontinu

$$\left| \int_0^\eta (g^N - \bar{g}_n^N, \varphi)_{\Gamma_N} \right| \rightarrow 0$$

als $n \rightarrow \infty$. Achtereenvolgens toepassen van Cauchy-Schwarz, K Lipschitzcontinu, stelling 5.1.3 en $\varphi \in H^1(\Omega)$ geeft dat

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\eta ([K - \bar{K}_n] \nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) \right| &\leq \int_0^\eta \|[K - \bar{K}_n] \nabla \bar{u}_n\| \|\nabla \varphi\| \\ &\leq \|\nabla \varphi\| \int_0^\eta \int_\Omega (K - \bar{K}_n)^2 (\nabla \bar{u}_n)^2 \\ &\leq \|\varphi\| \int_0^\eta \left(\frac{LK}{n}\right)^2 \underbrace{\|\nabla \bar{u}_n\|^2}_{\leq C} \\ &\leq \frac{C}{n^2} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

als $n \rightarrow \infty$. Door gebruik te maken van $K \leq C_1$, Cauchy-Schwarz, stelling 5.1.4 en $\tau_n = \frac{T}{n}$ vinden we dat

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\eta (K \nabla [u_n - \bar{u}_n], \nabla \varphi) \right| &\leq C_1 \|\nabla \varphi\| \underbrace{\int_0^\eta \|\nabla [u_n - \bar{u}_n]\|}_{\leq C \tau_n \leq \frac{C}{n}} \\ &\leq \frac{C}{n} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

als $n \rightarrow \infty$. Uit lemma 5.1.6 volgt dat $u_n \rightarrow u$ in $L_2((0, T), H^1(\Omega))$, dit wil zeggen dat $\int_0^T \|u_n - u\|_1^2 \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. Toepassen van $K \leq C_1$, Cauchy-Schwarz, (2.4) en $\eta \leq T$ geeft dat

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\eta (K \nabla u_n, \nabla \varphi) - \int_0^\eta (K \nabla u, \nabla \varphi) \right| &= \int_0^\eta (K \nabla [u_n - u], \nabla \varphi) \\ &\leq C_1 \|\nabla \varphi\| \int_0^\eta \|\nabla [u_n - u]\|^2 \\ &\leq C \int_0^\eta \|u_n - u\|_1^2 \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

als $n \rightarrow \infty$. Uit lemma 5.1.7 volgt voor $n \rightarrow \infty$ dat

$$\int_0^\eta (\partial_t u_n, \varphi) \rightarrow \int_0^\eta (\partial_t u, \varphi),$$

want $\int_0^\eta (\cdot, \varphi)$ is een functionaal op $L_2((0, T), L_2(\Omega))$. We hebben bewezen dat als we de limiet nemen voor $n \rightarrow \infty$ in (5.34), er voor elke $\eta \in [0, T]$ geldt dat

$$\int_0^\eta (\partial_t u, \varphi) + \int_0^\eta (K \nabla u, \nabla \varphi) = \int_0^\eta (f, \varphi) - \int_0^\eta (g^N, \varphi)_{\Gamma_N}.$$

We leiden beide leden af naar η . Uit de hoofdstelling van de integraalrekening (zie Stelling A.1.10) volgt dat

$$(\partial_t u(\eta), \varphi) + (K \nabla u(\eta), \nabla \varphi) = (f(\eta), \varphi) - (g^N(\eta), \varphi)_{\Gamma_N},$$

voor alle $\eta \in [0, T]$. Bijgevolg geldt (5.3). Rest nog aan te tonen dat de oplossing uniek is. Veronderstel dat er twee oplossingen u en v zijn voor (5.3), er geldt

$$(\partial_t u, \varphi) + (K \nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi) - (g^N, \varphi)_{\Gamma_N}$$

en

$$(\partial_t v, \varphi) + (K \nabla v, \nabla \varphi) = (f, \varphi) - (g^N, \varphi)_{\Gamma_N}$$

met $u(0) = u_0$ en $v(0) = u_0$. Stel $w = u - v$. Het verschil tussen bovenstaande twee identiteiten wordt dan

$$(\partial_t w, \varphi) + (K \nabla w, \nabla \varphi) = 0 \text{ b.o. in } [0, T],$$

met $w(0) = u(0) - v(0) = u_0 - u_0 = 0$. Neem $\eta \in [0, T]$. We stellen $\varphi = w$ en integreren de bovenstaande relatie over over het tijdsinterval $]0, \eta[$. We krijgen

$$\int_0^\eta (\partial_t w, w) + \int_0^\eta (K \nabla w, \nabla w) = 0.$$

Uit $K \geq C_0$, stelling A.1.8 en $w(0) = 0$ volgt

$$\frac{1}{2} \|w(\eta)\|^2 - \frac{1}{2} \|w(0)\|^2 + C_0 \int_0^\eta \|\nabla w\|^2 \leq 0$$

of

$$\underbrace{\frac{1}{2} \|w(\eta)\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{C_0 \int_0^\eta \|\nabla w\|^2}_{\geq 0} \leq 0$$

voor alle $\eta \in [0, T]$. Hieruit volgt dat $\|w(\eta)\| = 0$ voor alle $\eta \in [0, T]$. Bijgevolg is $w = 0$ of $u = v$. \square

Vorige stelling laat toe om een functie ψ te definiëren op $L_\infty((0, T) \times \Omega)$, namelijk

$$\psi : L_\infty((0, T) \times \Omega) \rightarrow C([0, T], L_2(\Omega)) \cap L_2((0, T), H^1(\Omega)) : K \mapsto \psi(K) = u_K, \quad (5.35)$$

die elke $K \in L_\infty((0, T) \times \Omega)$ afbeeldt op de unieke zwakke oplossing u_K in V_2 van (5.3). De variatie van K op Ω_0 is van de vorm

$$K(x, y) + K(t),$$

waarbij enkel het $K(t)$ gedeelte wordt gevarieerd.

Stelling 5.1.9. *De functies ψ gedefinieerd in (5.35) is continu op $L_\infty((0, T) \times \Omega)$.*

Bewijs. Stel dat met K_1 , respectievelijk K_2 de zwakke oplossing u^1 , respectievelijk $u^2 \in V_2$ correspondeert. Dan volgt uit (5.3) dat

$$(\partial_t u^1, \varphi) + (K_1 \nabla u^1, \nabla \varphi) = (f, \varphi) - (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} h$$

en

$$(\partial_t u^2, \varphi) + (K_2 \nabla u^2, \nabla \varphi) = (f, \varphi) - (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} - \varphi|_{\Gamma_0} h.$$

Aftrekken van de tweede van de eerste gelijkheid geeft

$$(\partial_t(u^1 - u^2), \varphi) + (K_1 \nabla u^1 - K_2 \nabla u^2, \nabla \varphi) = 0$$

of

$$(\partial_t(u^1 - u^2), \varphi) + (K_1 \nabla [u^1 - u^2], \nabla \varphi) = ((K_2 - K_1) \nabla u^2, \nabla \varphi).$$

Stel $\varphi = u^1 - u^2$ in het bovenstaande. Integratie over tijdsinterval $]0, \eta[$ voor willekeurige $\eta \in [0, T]$ geeft

$$\begin{aligned} \int_0^\eta (\partial_t(u^1 - u^2), u^1 - u^2) + \int_0^\eta (K_1 \nabla [u^1 - u^2], \nabla [u^1 - u^2]) \\ = \int_0^\eta ((K_2 - K_1) \nabla u^2, \nabla [u^1 - u^2]). \end{aligned}$$

Uit hulpstelling A.1.3 en $K_1 \geq 0$ volgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|(u^1 - u^2)(\eta)\|^2 - \frac{1}{2} \|(u^1 - u^2)(0)\|^2 + C_0 \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \\ \leq \int_0^\eta ((K_2 - K_1) \nabla u^2, \nabla [u^1 - u^2]). \end{aligned}$$

Nu is $u^1(0) = u^2(0) = u_0$. Bovenstaande wordt (we nemen de absolute waarde van beide leden, het linkerlid is niet negatief)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|(u^1 - u^2)(\eta)\|^2 + C_0 \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \\ \leq \int_0^\eta |((K_2 - K_1) \nabla u^2, \nabla [u^1 - u^2])|. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Vervolgens schatten we het rechterlid van (5.36) af. Door gebruik te maken van Cauchy-Schwarz, Young, $K_2 - K_1$ constant in Ω ($K_2 - K_1$ is nul in $\Omega \setminus \Omega_0$ en $K_2 - K_1$ is enkel een functie van de tijd in Ω_0) en Lemma 5.1.2(ii) vinden we dat

$$\begin{aligned} \int_0^\eta |((K_2 - K_1) \nabla u^2, \nabla [u^1 - u^2])| \\ \leq \int_0^\eta \|(K_2 - K_1) \nabla u^2\| \|\nabla [u^1 - u^2]\| \\ \leq C_\varepsilon \int_0^\eta \|(K_2 - K_1) \nabla u^2\|^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \\ \leq C_\varepsilon \int_0^\eta \int_\Omega (K_2 - K_1)^2 (\nabla u^2)^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \\ \leq C_\varepsilon \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2 \int_\Omega (\nabla u^2)^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_\varepsilon \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2 \underbrace{\|\nabla u^2\|^2}_{\leq C} + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \\
&\leq C_\varepsilon \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2 + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2.
\end{aligned}$$

We kunnen dan (5.36) schrijven als

$$\frac{1}{2} \|(u^1 - u^2)(\eta)\|^2 + (C_0 - \varepsilon) \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \leq C_\varepsilon \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2.$$

Kies ε zodanig dat $C_0 - \varepsilon > 0$. Wegdelen van de factor $\min(\frac{1}{2}, C_0 - \varepsilon)$ geeft

$$\|(u^1 - u^2)(\eta)\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \leq C \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2. \quad (5.37)$$

Dus

$$\|(u^1 - u^2)(\eta)\|^2 \leq C \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2.$$

of

$$\|(u^1 - u^2)(\eta)\| \leq C \sqrt{\int_0^\eta (K_2 - K_1)^2}.$$

Nemen van het maximum over $\eta \in [0, T]$ geeft

$$\max_{\eta \in [0, T]} \|(u^1 - u^2)(\eta)\| \leq C \max_{\eta \in [0, T]} \sqrt{\int_0^\eta (K_2 - K_1)^2}$$

of

$$\|u^1 - u^2\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} \leq C \sqrt{\int_0^T (K_2 - K_1)^2}$$

of

$$\|u^1 - u^2\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} \leq C \|K_2 - K_1\|_{L_2((0, T))}. \quad (5.38)$$

Achtereenvolgens toepassen van (2.4), de definitie van de norm in $C([0, T], L_2(\Omega))$, (5.37) en (5.38) levert

$$\begin{aligned}
\int_0^\eta \|u^1 - u^2\|_1^2 &= \int_0^\eta \|u^1 - u^2\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla [u^1 - u^2]\|^2 \\
&\leq \eta \|u^1 - u^2\|_{C([0, T], L_2(\Omega))}^2 + C \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2 \\
&\leq \eta C \|K_2 - K_1\|_{L_2((0, T))}^2 + C \int_0^\eta (K_2 - K_1)^2.
\end{aligned}$$

Deze laatste ongelijkheid maximaliseren we over $\eta \in [0, T]$. We bekommen

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u^1 - u^2\|_1^2 &\leq C \|K_2 - K_1\|_{L_2((0, T))}^2 + C \int_0^T (K_2 - K_1)^2 \\
&\leq C \|K_2 - K_1\|_{L_2((0, T))}^2
\end{aligned} \quad (5.39)$$

of

$$\|u^1 - u^2\|_{L_2((0,T),H^1(\Omega))}^2 \leq C \|K_2 - K_1\|_{L_2((0,T))}^2. \quad (5.40)$$

Uit (5.38) en (5.40) volgt dat ψ Lipschitzcontinu, i.e. continu, is op $L_\infty((0,T) \times \Omega)$, immers $\psi(K_1) \rightarrow \psi(K_2)$ als $K_1 \rightarrow K_2$. Merk op dat er geen bijhorende voorwaarden op K nodig zijn opdat $K_2 - K_1$ tot $L_2((0,T))$ zou behoren. Immers uit $K_1, K_2 \leq C_1$ volgt

$$\int_0^T (K_2 - K_1)^2 \leq \int_0^T (2C_1)^2 < \infty.$$

□

Uit de vorige stelling volgt dat de zwakke oplossing van (5.3) continu afhangt van K .

Gevolg 5.1.10. *Het voorwaarts probleem (5.1) is goed gedefinieerd in de betekenis van Hadamard.*

5.1.5 Invers probleem

Het hulpvraagstuk IBVP1 geeft voor elke vooraf gegeven K een unieke oplossing u_K . We definiëren de functie $\tilde{\psi}$ op $L_\infty((0,T) \times \Omega)$ als

$$\tilde{\psi} : L_\infty([0,T] \times \Omega) \rightarrow C([0,T]) : K \mapsto \tilde{\psi}(K) = \int_{\Gamma_0} -K \nabla u_K \cdot \nu, \quad (5.41)$$

met $\int_{\Gamma_0} -K \nabla u_K \cdot \nu$ de totale flux door de rand Γ_0 . Impliciet veronderstellen we hier dat

$$h \in C([0,T]).$$

Door de definitie van $\tilde{\psi}$ kan het invers probleem (3.1)-(3.5) omgezet worden tot:

$$\text{vind } K \in L_\infty((0,T) \times \Omega) \text{ zodanig dat } \tilde{\psi}(K) = h.$$

Stelling 5.1.11. *De functie $\tilde{\psi}$ gedefinieerd in (5.41) is continu op $L_\infty((0,T) \times \Omega)$.*

Bewijs. Voor alle testfuncties $\varphi \in H^1(\Omega)$ beschouwen we de variationele formulering (5.2) van probleem (5.1):

$$(u_t, \varphi) + (K \nabla u, \nabla \varphi) + (-K \nabla u \cdot \nu, \varphi)_\Gamma = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (5.42)$$

We beperken de testfuncties tot de ruimte

$$V_3 = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi|_{\Gamma_D} = 0 \text{ en } \varphi|_{\Gamma_0} \text{ is constant} \right\}.$$

Voor alle $\varphi \in V_3$ vinden we

$$\begin{aligned} (-K \nabla u \cdot \nu, \varphi)_\Gamma &= (-K \nabla u \cdot \nu, \varphi)_{\Gamma_D} + (-K \nabla u \cdot \nu, \varphi)_{\Gamma_N} + (-K \nabla u \cdot \nu, \varphi)_{\Gamma_0} \\ &= (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} + (-K \nabla u \cdot \nu, \varphi)_{\Gamma_0}. \end{aligned}$$

De variationele formulering (5.42) wordt

$$(u_t, \varphi) + (K \nabla u, \nabla \varphi) + (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} + (-K \nabla u \cdot \nu, \varphi)_{\Gamma_0} = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in V_3. \quad (5.43)$$

Onderstel dat met K_1 , respectievelijk K_2 de zwakke oplossing u^1 , respectievelijk $u^2 \in V_3$ correspondeert. Dan volgt uit (5.43) dat

$$(\partial_t u^1, \varphi) + (K_1 \nabla u^1, \nabla \varphi) + (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} + (-K_1 \nabla u^1 \cdot \nu, \varphi)_{\Gamma_0} = (f, \varphi)$$

en

$$(\partial_t u^2, \varphi) + (K_2 \nabla u^2, \nabla \varphi) + (g^N, \varphi)_{\Gamma_N} + (-K_2 \nabla u^2 \cdot \nu, \varphi)_{\Gamma_0} = (f, \varphi).$$

Aftrekken van de tweede van de eerste gelijkheid geeft

$$\begin{aligned} & (\partial_t(u^1 - u^2), \varphi) + (K_1 \nabla u^1 - K_2 \nabla u^2, \nabla \varphi) \\ & + (-K_1 \nabla u^1 \cdot \nu, \varphi)_{\Gamma_0} - (-K_2 \nabla u^2 \cdot \nu, \varphi)_{\Gamma_0} = 0 \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned} & (\partial_t(u^1 - u^2), \varphi) + (K_1 \nabla u^1 - K_2 \nabla u^2, \nabla \varphi) \\ & = (-K_2 \nabla u^2 \cdot \nu, \varphi)_{\Gamma_0} - (-K_1 \nabla u^1 \cdot \nu, \varphi)_{\Gamma_0}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Omdat $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_D = \emptyset$, volgt uit Friedman (zie [24], Lemma 5.1) dat er een functie $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ bestaat zodanig dat

$$\varphi = \begin{cases} 1 & \text{op } [0, T] \times \Gamma_0; \\ 0 & \text{op } [0, T] \times \Gamma_D; \end{cases}$$

Deze functie behoort tot de ruimte V_3 en kunnen we daardoor fixeren in (5.44). Na integratie van (5.44) over het tijdsinterval $]0, \eta[$ voor willekeurige $\eta \in [0, T]$ vinden we

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta (\partial_t(u^1 - u^2), \varphi) + \int_0^\eta (K_1 \nabla u^1 - K_2 \nabla u^2, \nabla \varphi) \\ & = \int_0^\eta (-K_2 \nabla u^2 \cdot \nu, 1)_{\Gamma_0} - \int_0^\eta (-K_1 \nabla u^1 \cdot \nu, 1)_{\Gamma_0}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

We tonen aan dat

$$\int_0^\eta (\partial_t(u^1 - u^2), \varphi) \rightarrow 0 \text{ en } \int_0^\eta (K_1 \nabla u^1 - K_2 \nabla u^2, \nabla \varphi) \rightarrow 0$$

als $K_1 \rightarrow K_2$. Uit hulpstelling A.1.3 en Stelling 5.1.9 volgt

$$\begin{aligned} \int_0^\eta (\partial_t(u^1 - u^2), \varphi) &= \frac{1}{2} \|(u^1 - u^2)(\eta)\|^2 - \frac{1}{2} \|(u^1 - u^2)(0)\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|(u^1 - u^2)(\eta)\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|u^1 - u^2\|_{C([0, T], L_2(\Omega))}^2 \\ &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.46)$$

als $K_1 \rightarrow K_2$. Uit Lemma 5.1.3 volgt dat $\|u\|_1 < C$ want $\|u\| < C$ en $\|\nabla u\| < C$. Hieruit volgt dat als $K_1 \rightarrow K_2$, dat de rij van de corresponderende zwakke oplossingen in $H^1(\Omega)$ van (5.43) die begint met u^1 en convergeert naar u^2 een begrensde rij is. Omdat $H^1(\Omega)$ een separabele Hilbertruimte is (zie Stelling 2.1.65), krijgen we uit Gevolg 2.2.25 dat deze rij een zwak convergente deelrij bevat met als limiet de limiet van de oorspronkelijke rij: $u^1 \rightharpoonup u^2$. Hieruit volgt dat

$$\int_0^\eta (K_1 \nabla u^1, \nabla \varphi) \rightarrow \int_0^\eta (K_2 \nabla u^2, \nabla \varphi), \quad (5.47)$$

als $K_1 \rightarrow K_2$. Uit (5.45), (5.46) en (5.47) volgt dat

$$\int_0^\eta (-K_1 \nabla u^1 \cdot \nu, 1)_{\Gamma_0} - \int_0^\eta (-K_2 \nabla u^2 \cdot \nu, 1)_{\Gamma_0} \rightarrow 0,$$

als $K_1 \rightarrow K_2$. Als we deze laatste gelijkheid afleiden naar η vinden we wegens de hoofdstelling van de integraalrekening dat

$$(-K_1 \nabla u^1(\eta) \cdot \nu, 1)_{\Gamma_0} - (-K_2 \nabla u^2(\eta) \cdot \nu, 1)_{\Gamma_0} \rightarrow 0$$

of

$$\int_{\Gamma_0} -K_1 \nabla u^1(\eta) \cdot \nu \rightarrow \int_{\Gamma_0} -K_2 \nabla u^2(\eta) \cdot \nu$$

als $K_1 \rightarrow K_2, \forall \eta \in [0, T]$. Dit volstaat voor de continuïteit van $\tilde{\psi}$. \square

Om minstens één oplossing van het invers probleem (3.1)-(3.5) te garanderen is er een bijkomende voorwaarde nodig op h . Deze voorwaarde vinden we terug in de volgende stelling die volgt uit de continuïteit van $\tilde{\psi}$.

Gevolg 5.1.12. *Het invers probleem (3.1)-(3.5) bestaande uit het hulpvraagstuk IBVP2 en de bijkomende voorwaarde (3.10) heeft minstens één oplossing $K \in L_\infty((0, T) \times \Omega)$ als $h \in \tilde{\psi}[C_0, C_1]$, met $\tilde{\psi}$ gedefinieerd in (5.41).*

Uit al het voorgaande kunnen we volgende hoofdstelling afleiden.

Stelling 5.1.13. *Het volgende invers begin- en randwaardenprobleem heeft tenminste één zwakke oplossing: vind een koppel (K, u) zodanig dat*

$$(i) \ u \in C([0, T], L_2(\Omega)) \cap L_2((0, T), H^1(\Omega)),$$

$$(ii) \ \partial_t u \in L_2((0, T), L_2(\Omega)),$$

$$(iii) \ K \in L_\infty((0, T) \times \Omega), \text{ dit wil zeggen dat } K \leq C_1,$$

$$(iv) \ K \geq C_0 > 0,$$

en zodanig dat voldaan is aan

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot (K \nabla u) = f & \text{in } (0, T) \times \Omega; \\ u = g^D & \text{op } (0, T) \times \Gamma_D; \\ -K \nabla u \cdot \nu = g^N & \text{op } (0, T) \times \Gamma_N; \\ u = U & \text{op } (0, T) \times \Gamma_0; \end{cases} \quad (5.48)$$

met bijkomende voorwaarde

$$\int_{\Gamma_0} -K \nabla u \cdot \nu = h \quad \text{in } (0, T);$$

voor gegeven

$$(i) \ u_0 \in H^1(\Omega),$$

$$(ii) \ h \in C([0, T]) \text{ en } h \text{ in het bereik van } \tilde{\psi}[C_0, C_1] \text{ met}$$

$$\tilde{\psi} : L_\infty((0, T) \times \Omega) \rightarrow C([0, T]) : K \mapsto \tilde{\psi}(K) = \int_{\Gamma_0} -K \nabla u_K \cdot \nu,$$

een afbeelding die met elke gegeven $K \in L_\infty((0, T) \times \Omega)$ de totale flux door de rand Γ_0 (u_K is de unieke zwakke oplossing van het voorwaarts probleem (5.48)) doet corresponderen,

- (iii) $g^N \in L_2((0, T), L_2(\Gamma_N))$,
- (iv) $g^D \in L_2((0, T), L_2(\Gamma_D))$,
- (v) $f \in L_2((0, T), L_2(\Omega))$,
- (vi) $\partial_t U \in L_2((0, T))$,
- (vi) K, g^N, g^D, U, h en f Lipschitzcontinu.

5.2 Numeriek experiment

In deze sectie geven we vier numerieke voorbeelden op het invers probleem (3.1)-(3.5) waarin we de diffusiecoëfficiënt K gaan bepalen. We gaan als volgt te werk.

Stel Ω het eenheidsvierkant in \mathbb{R}^2 . We beschouwen het tijdsinterval $[0, 1]$, i.e., $T = 1$. De grens $\partial\Omega$ is opgesplitst in drie niet-overlappende delen Γ_0, Γ_N en Γ_D (zie Figuur 3.2). Het deeldomein Ω_0 bestaat uit alle koppels in het domein Ω met abscis kleiner dan 0.2, dit wil zeggen

$$\Omega_0 = \{(x, y) \in \Omega \mid x < 0.2\}.$$

We definiëren de diffusiecoëfficiënt als¹

$$K(t, x, y) = \tilde{K}(t) \times \mathbb{1}_{\{x < 0.2\}} + 0.2,$$

met

$$\tilde{K} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \tilde{K}(t),$$

een onbekende functie die enkel afhankelijk is van de tijd.

We beschouwen het voorwaarts hulpvraagstuk (5.1) met $u_0 = 1, f = 1, g^N = 0.4$ en $g^D = U = 0$:

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot (K \nabla u) = 1 & \text{in } [0, T] \times \Omega; \\ u = 0 & \text{op } [0, T] \times \Gamma_D; \\ -K \nabla u \cdot \nu = 0.4 & \text{op } [0, T] \times \Gamma_N; \\ u = 0 & \text{op } [0, T] \times \Gamma_0; \\ u(0, x, y) = 1 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (5.49)$$

We schreven een programma om \tilde{K} te bepalen met behulp van de algebraïsche solver FreeFem++ (de code bevindt zich in Appendix A.2). A fortiori hebben we dan ook de diffusiecoëfficiënt K gevonden. FreeFem++ is een open source pakket² om partiële differentiaalvergelijkingen op te lossen met behulp van de eindige elementenmethode. We doorlopen kort de verschillende stappen in het programma.

Voor de tijdsdiscretisatie kiezen we een equidistante tijdspartitie met tijdsstap $\tau = 0.02$. In elk numeriek voorbeeld vertrekken we vanuit een gegeven \tilde{K} en berekenen we met

¹

$$\mathbb{1}_X(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{als } (x, y) \in X; \\ 0 & \text{als } (x, y) \notin X. \end{cases}$$

²<http://www.freefem.org/ff++/>

behulp van de eindige elementenmethode op elk tijdstip $t_i, i = 1, \dots, 50$ de oplossing u_i van het direct probleem (5.49). Dit gaat als volgt. Ten eerste beschouwen we een reguliere triangulatie τ_h van Ω bestaande uit 9800 gelijke driehoeken. De volgende ruimte van stuksgewijze eerste graadspolynomen op $\bar{\Omega}$ gebruiken we als testruimte (zie sectie 2.2.3 voor de details)

$$V_4 = \left\{ \varphi \in X_h^{0,1} \mid \varphi|_{\Gamma_D} = 0 \text{ en } \varphi|_{\Gamma_0} = 0 \right\},$$

met

$$X_h^{0,1} = \left\{ \varphi \in C^0(\bar{\Omega}) : \varphi|_{D_l} \in P_1(D_l), \forall D_l \in \tau_h \right\}.$$

De variationele formulering van probleem (5.49) op elk tijdstip $t_i, i = 1, \dots, 50$ is

$$\left(\frac{u_i}{\tau}, \varphi_h \right) + (K_i \nabla u_i, \nabla \varphi_h) = (1, \varphi_h) - (0.4, \varphi_h)_{\Gamma_N} + \left(\frac{u_{i-1}}{\tau}, \varphi_h \right), \quad (5.50)$$

voor alle $\varphi_h \in V_4$. V_4 is een eindig dimensionale ruimte. De basisfuncties in V_4 zijn alle functies ψ_k , ‘hoedfuncties’ genoemd, die in één knoop waarde één hebben en nul zijn in alle andere knopen. Dus de zwakke oplossing u_i van de variationele formulering (5.50) is van de vorm

$$u_i = \sum_{k=1}^M c_k \psi_k,$$

met M het aantal knooppunten (dus alle hoekpunten van alle driehoeken) in de triangulatie. De variationele formulering (5.50) wordt getransformeerd naar een stelsel van lineaire vergelijkingen via de Galerkin methode (zie sectie 2.2.2). Dit lineair systeem is van de vorm $M\mathbf{c} = \mathbf{f}$ en wordt opgelost door middel van een LU-factorisatie³. Op elk tijdstip t_i lossen we een stelsel op en zo bekomen we op elk tijdstip de zwakke oplossing u_i van de variationele formulering (5.50).

Daarna berekenen we op elk tijdstip $t_i, i = 0, \dots, 50$ de flux door de rand Γ_0

$$\int_{\Gamma_0} -K \nabla u_i \cdot \boldsymbol{\nu} =: h_i \quad i = 0, \dots, 50. \quad (5.51)$$

Op deze manier genereren we de volgende stuksgewijze constante datafunctie

$$\bar{h}_{50}(t) = \begin{cases} h_0 & \text{voor } t = 0; \\ h_i & \text{voor } t \in]t_{i-1}, t_i]. \end{cases}$$

Nu hebben we alle data die nodig is om het invers probleem (3.1)-(3.5) op te lossen via het hulpvraagstuk (5.49) en de bijkomende voorwaarde

$$\int_{\Gamma_0} -K \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = \bar{h}_{50} \quad \text{in } [0, T].$$

Op elk tijdstip t_i bepalen we \tilde{K}_i zodanig dat het verschil

$$J(\tilde{K}_i) := \left(\int_{\Gamma_0} (\tilde{K}_i + 0.2) \nabla u_i \cdot \boldsymbol{\nu} - \bar{h}_{50}(t_i) \right)^2$$

minimaal is. We zoeken dus $\tilde{K}_i, i = 1, \dots, 50$ zodanig dat

$$\frac{\partial J(\tilde{K}_i)}{\partial \tilde{K}_i} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\tilde{K}_i + \varepsilon) - J(\tilde{K}_i)}{\varepsilon} = 0.$$

³Stel $M = LU$, met L een beneden triangulaire vierkante matrix met alle diagonaalelementen één en U een boventriangulaire matrix. Dan is het oorspronkelijke systeem $M\mathbf{c} = \mathbf{f}$ op te lossen door het berekenen van twee eenvoudiger systemen. Eerst \mathbf{y} berekenen uit $L\mathbf{y} = \mathbf{f}$, daarna \mathbf{c} uit $U\mathbf{c} = \mathbf{y}$.

We maken gebruik van het toegevoegde gradiënt algoritme⁴ (zie bijvoorbeeld [27], sectie 10) om op elk tijdstip $t_i, i = 1, \dots, n$ de oplossing \tilde{K}_i van $\frac{\partial J(\tilde{K}_i)}{\partial \tilde{K}_i} = 0$ te bepalen. Als startwaarde nemen we $\tilde{K}_i^{(0)} = 3$ in het algoritme. Daarna bestuderen we hoe goed \tilde{K}_i de oorspronkelijke $\tilde{K}(t_i), i = 1, \dots, 50$ benaderd door het berekenen van de absolute fout

$$\left| \tilde{K}(t_i) - \tilde{K}_i \right|, i = 1, \dots, 50.$$

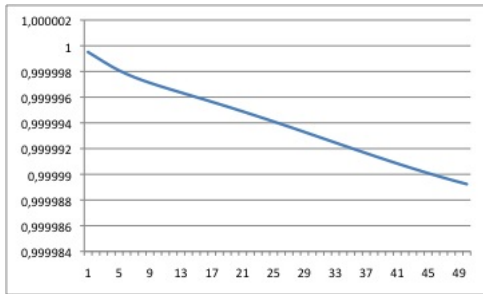
We bekijken nu vier numerieke voorbeelden.

5.2.1 Constante diffusiecoëfficiënt

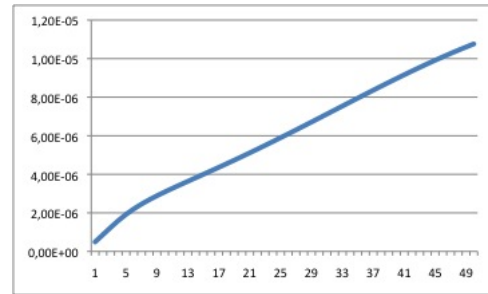
In dit voorbeeld veronderstellen we dat \tilde{K} onafhankelijk is van de tijd, namelijk $\tilde{K} = 1$. De diffusiecoëfficiënt is dus gelijk aan

$$K(t, x, y) = \mathbb{1}_{\{x < 0.2\}} + 0.2.$$

In Figuur 5.1 vinden we de benaderende oplossing $\tilde{K}_i, i = 1, \dots, 50$ en de fout⁵. Die fout is heel klein op elk tijdstip. Dit komt doordat we gebruik hebben gemaakt van perfecte data.



(a) $\tilde{K}_i, i = 1, \dots, 50$ op elk tijdstip.



(b) Absolute waarde van de fout: $\left| \tilde{K}(t_i) - \tilde{K}_i \right|, i = 1, \dots, 50.$

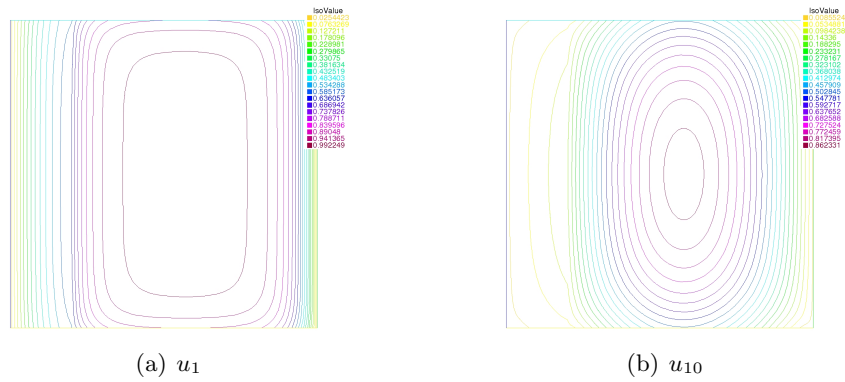
Figuur 5.1: Constante diffusiecoëfficiënt: $K(t) = \mathbb{1}_{\{x < 0.2\}} + 0.2.$

Enkel in dit voorbeeld beschouwen we de zwakke oplossing u_i op de tijdstippen $t_i, i = 1, 10, 20, 30, 40$ en 50 van het voorwaarts vraagstuk (5.49). In de andere voorbeelden krijgen we analoge resultaten. De begintemperatuur u_0 en de bronterm f hebben we beide één verondersteld in Ω . We verwachten dat de temperatuur op elk tijdstip symmetrisch verdeeld zal zijn over Ω . Op de Neumannrand $y = 1$ van Ω is $\frac{du}{dy} < 0$ ($\nu = (0, 1)$ in elk punt) en op de Neumannrand $y = 0$ is $\frac{du}{dy} > 0$ ($\nu = (0, -1)$ in elk punt). De warmte loopt weg uit Ω door beide Neumannranden. Omdat de diffusiecoëfficiënt K groter is in het domein Ω_0 verwachten we dat in dit deeldomein van Ω de warmte zich sneller zal verspreiden en dus sneller zal weglopen door de aangrenzende Neumannranden. Daardoor verwachten we dat de temperatuur in de tijd sneller zal dalen in Ω_0 dan in $\Omega \setminus \Omega_0$. Alle vermoedens worden bevestigd in Figuren 5.2, 5.3 en 5.4. In deze figuren zien we de isolijnen (lijnen van gelijke temperatuur) van de zwakke oplossing u_i van het voorwaarts vraagstuk (5.49) op de tijdstippen $t_i, i = 1, 10, 20, 30, 40$ en 50 . De isolijnen liggen symmetrisch ten

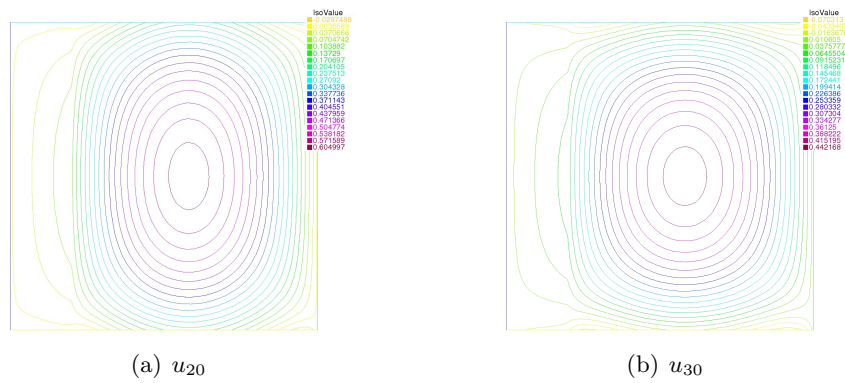
⁴Non-linear conjugate gradient

⁵Alle figuren zijn gemaakt in Microsoft Excel.

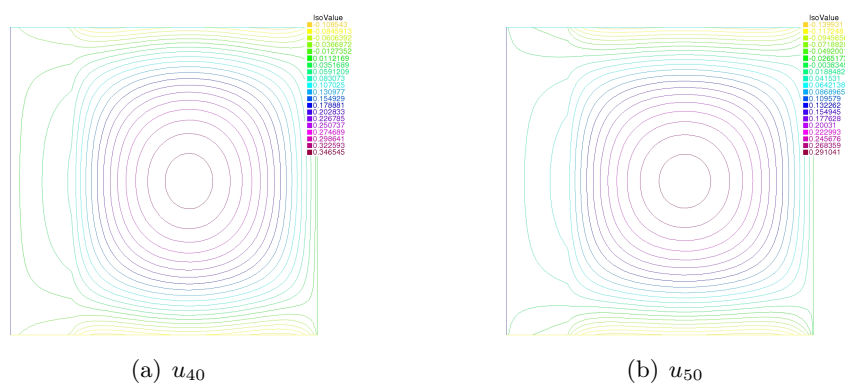
opzichte van de rechte $y = \frac{1}{2}$ en de temperatuur daalt over het algemeen meer in $\Omega \setminus \Omega_0$ dan in Ω_0 . Enkel de temperatuur op de rand komt niet overeen met wat we verwachten. Bijvoorbeeld is de temperatuur op de Dirichletrand $x = 0$ niet gelijk aan nul. Dit kunnen we niet verklaren. Mogelijks is dit te wijten aan een fout bij het omzetten van de figuren in het programma FreeFem++ omdat de temperatuur dicht bij deze rand wel ongeveer nul is.



Figuur 5.2: Isolijnen voor u_1 en u_{10} als $\tilde{K} = 1$.



Figuur 5.3: Isolijnen voor u_{20} en u_{30} als $\tilde{K} = 1$.



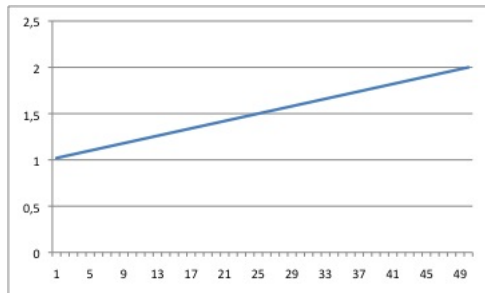
Figuur 5.4: Isolijnen voor u_{40} en u_{50} als $\tilde{K} = 1$.

5.2.2 Lineaire diffusiecoëfficiënt

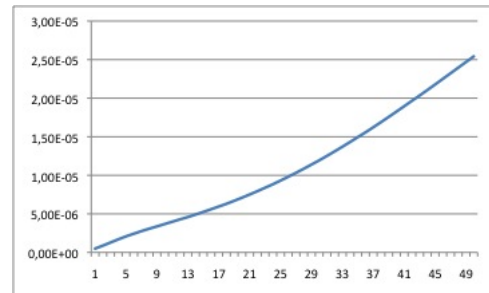
Nu veronderstellen we dat \tilde{K} lineair afhankelijk is van de tijd. We stellen de diffusiecoëfficiënt gelijk aan

$$K(t) = (1 + t) \mathbb{1}_{\{x < 0.2\}} + 0.2.$$

De evolutie van de berekende $\tilde{K}_i, i = 1, \dots, 50$ en de corresponderende fout vinden we in Figuur 5.5. We vinden dat $\tilde{K}_i, i = 1, \dots, 50$ een goede benadering is van \tilde{K} .



(a) $\tilde{K}_i, i = 1, \dots, 50$ op elk tijdstip.



(b) Absolute waarde van de fout: $|\tilde{K}(t_i) - \tilde{K}_i|, i = 1, \dots, 50$.

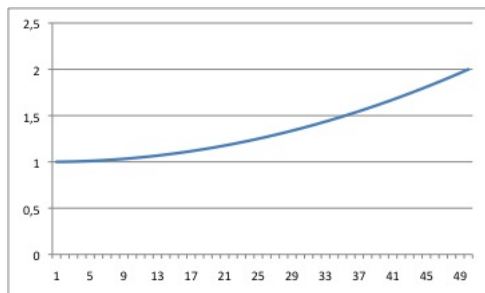
Figuur 5.5: Lineaire diffusiecoëfficiënt: $K(t) = (1 + t) \mathbb{1}_{\{x < 0.2\}} + 0.2$.

5.2.3 Kwadratische diffusiecoëfficiënt

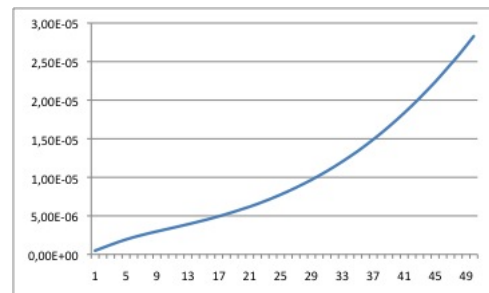
We veronderstellen dat het verloop van \tilde{K} kwadratisch is. De diffusiecoëfficiënt veronderstellen we

$$K(t) = (1 + t^2) \mathbb{1}_{\{x < 0.2\}} + 0.2.$$

In Figuur 5.6 vinden we de benaderende oplossing $\tilde{K}_i, i = 1, \dots, 50$ en de fout. Opnieuw is de fout heel klein.



(a) $\tilde{K}_i, i = 1, \dots, 50$ op elk tijdstip.



(b) Absolute waarde van de fout: $|\tilde{K}(t_i) - \tilde{K}_i|, i = 1, \dots, 50$.

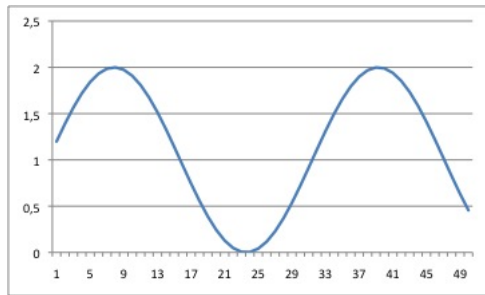
Figuur 5.6: Kwadratische diffusiecoëfficiënt: $K(t) = (1 + t^2) \mathbb{1}_{\{x < 0.2\}} + 0.2$.

5.2.4 Goniometrische diffusiecoëfficiënt

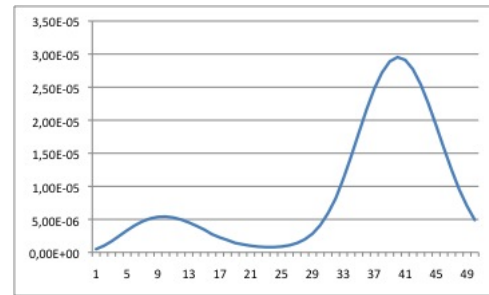
In dit voorbeeld definiëren we de diffusiecoëfficiënt als

$$K(t) = (1 + \sin(10t)) \mathbb{1}_{\{x < 0.2\}} + 0.2.$$

De evolutie van de berekende $\tilde{K}_i, i = 1, \dots, 50$ en de corresponderende fout vinden we in Figuur 5.7. Ook in dit voorbeeld is $\tilde{K}_i, i = 1, \dots, 50$ een goede benadering van \tilde{K} .



(a) $\tilde{K}_i, i = 1, \dots, 50$ op elk tijdstip.



(b) Absolute waarde van de fout:
 $|\tilde{K}(t_i) - \tilde{K}_i|, i = 1, \dots, 50$.

Figuur 5.7: Goniometrische diffusiecoëfficiënt: $K(t) = (1 + \sin(10t)) \mathbb{1}_{\{x < 0.2\}} + 0.2$.

Hoofdstuk 6

Conclusie

In hoofdstuk 3 presenteerden we een lineair parabolisch begin- en randwaardenprobleem van de tweede orde. In dit invers probleem (3.1)-(3.5) wilden we de onbekende diffusiecoëfficiënt K bepalen. Hiervoor presenteerden we twee oplossingsmethoden. In hoofdstukken 4 en 5 hebben we door middel van beide oplossingsmethoden aangetoond dat het invers probleem, onder bepaalde voorwaarden op de data, tenminste één oplossing heeft. Tot slot van hoofdstuk 5 gaven we ook een numeriek voorbeeld. Hiermee is het werk echter nog niet ten einde.

Ten eerste hebben we geen algemene uitspraak kunnen doen over de uniciteit van de oplossing van het invers probleem. Ten tweede was de bijkomende voorwaarde in het numeriek deel 5.2 zonder ‘verstoring’. In inverse problemen moet men ook niet-perfecte data met ‘verstoring’ beschouwen. Bovendien moet de gevoeligheid van de oplossing op de verstoring bestudeerd worden.

Beide opmerkingen openen een poort naar toekomstig onderzoek.

Bijlage A

Appendix

A.1 Hulpstellingen

Stelling A.1.1 (Hölderongelijkheid voor integralen). *Stel $1 \leq p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ en $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dan is*

$$\left| \int_{\Omega} fg \right| \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [19], pp. 128. □

Hulpstelling A.1.2. *Stel c constant op $\Gamma \subset \partial\Omega$, dan is $|c| = \frac{\|c\|_{\Gamma}}{\sqrt{|\Gamma|}}$.*

Bewijs. Uit c constant op Γ volgt

$$\|c\|_{\Gamma} = \sqrt{\int_{\Gamma} c^2 d\Gamma} = |c| \sqrt{\int_{\Gamma} d\Gamma} = |c| \sqrt{|\Gamma|}.$$

□

Hulpstelling A.1.3. *Stel $u_i, i = 1, \dots, n$ de unieke zwakke oplossingen van het recurrent systeem van lineaire elliptische BVP's (4.4) en (5.4). Dan geldt*

$$\sum_{i=1}^j (u_i - u_{i-1}, u_i) = \frac{1}{2} \left[\|u_j\|^2 - \|u_0\|^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2.$$

Bewijs. Als we

$$\begin{aligned} 2u_i(u_i - u_{i-1}) &= 2u_i^2 - 2u_i u_{i-1} \\ &= u_i^2 - u_{i-1}^2 + u_i^2 + u_{i-1}^2 - 2u_i u_{i-1} \\ &= u_i^2 - u_{i-1}^2 + (u_i - u_{i-1})^2 \end{aligned}$$

sommen over i van 1 tot j krijgen we

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j 2u_i(u_i - u_{i-1}) &= \sum_{i=1}^j (u_i^2 - u_{i-1}^2) + \sum_{i=1}^j (u_i - u_{i-1})^2 \\ &= u_j^2 - u_0^2 + \sum_{i=1}^j (u_i - u_{i-1})^2. \end{aligned}$$

Vervolgens bekomen we

$$\sum_{i=1}^j u_i(u_i - u_{i-1}) = \frac{1}{2} \left[u_j^2 - u_0^2 + \sum_{i=1}^j (u_i - u_{i-1})^2 \right]$$

in Ω . Dit laatste integreren we over Ω . Na wisselen van integratie en sommatie vinden we

$$\sum_{i=1}^j \int_{\Omega} u_i(u_i - u_{i-1}) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} u_j^2 - \int_{\Omega} u_0^2 + \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} (u_i - u_{i-1})^2 \right]$$

of het gestelde. □

Hulpstelling A.1.4 (De Young ongelijkheid). $\forall a, b \in \mathbb{R}$ en $\varepsilon > 0$ geldt

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} = \varepsilon a^2 + C_{\varepsilon} b^2.$$

Bewijs. Eerst tonen we aan dat $\forall a, b \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \text{ of } -\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right) \leq ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Dit volgt uit

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -a^2 - b^2 &\leq 2ab \\ \Leftrightarrow -\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right) &\leq ab \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &\geq 2ab \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right) &\geq ab. \end{aligned}$$

Stel $a = \sqrt{2\varepsilon}\tilde{a}$ en $b = \frac{\tilde{b}}{\sqrt{2\varepsilon}}$ met $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ en $\varepsilon > 0$. Dan is

$$|ab| = |\tilde{a}\tilde{b}| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \varepsilon\tilde{a}^2 + \frac{\tilde{b}^2}{4\varepsilon}.$$

□

Hulpstelling A.1.5 (Gronwall). *Stel $r(t), h(t)$ en $y(t)$ continue reële functies gedefinieerd op het interval $[a, b]$ waarvoor geldt dat $r(t) \geq 0$ en $h(t) \geq 0$.*

(i) *Als*

$$y(t) \leq h(t) + \int_a^t r(s)y(s)ds \text{ voor } a \leq t \leq b,$$

dan is

$$y(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s)r(s) \exp\left(\int_s^t r(\tau)d\tau\right) ds$$

voldaan voor alle $t \in [a, b]$.

(ii) Veronderstel (1). Als $r(s) = C$ en de functie h is stijgend dan is

$$y(t) \leq h(t)e^{C(t-a)} \text{ voor } a \leq t \leq b.$$

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [20], pp. 8. □

Hulpstelling A.1.6. Stel $u_i, i = 1, \dots, n$ de unieke zwakke oplossingen van het recurrent systeem van lineaire elliptische BVP's (4.4) of (5.4). Dan geldt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j (K_i \nabla u_i, \nabla [u_i - u_{i-1}]) &= \frac{1}{2} [(K_j \nabla u_j, \nabla u_j) - (K_0 \nabla u_0, \nabla u_0)] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j (K_i \nabla [u_i - u_{i-1}], \nabla [u_i - u_{i-1}]) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j (\delta K_i \nabla u_{i-1}, \nabla u_{i-1}) \tau, \end{aligned}$$

met $\delta K_i = \frac{K_i - K_{i-1}}{\tau}$.

Bewijs. Sommeren van

$$\begin{aligned} &2K_i \nabla u_i \cdot \nabla [u_i - u_{i-1}] \\ &= 2K_i \nabla u_i \cdot (\nabla u_i - \nabla u_{i-1}) \\ &= 2K_i \nabla u_i \cdot \nabla u_i - 2K_i \nabla u_i \cdot \nabla u_{i-1} \\ &= K_i \nabla u_i \cdot \nabla u_i - K_{i-1} \nabla u_{i-1} \cdot \nabla u_{i-1} + K_i \nabla u_i \cdot \nabla u_i - 2K_i \nabla u_i \cdot \nabla u_{i-1} \\ &\quad + K_i \nabla u_{i-1} \cdot \nabla u_{i-1} - K_i \nabla u_{i-1} \cdot \nabla u_{i-1} + K_{i-1} \nabla u_{i-1} \cdot \nabla u_{i-1} \\ &= K_i (\nabla u_i)^2 - K_{i-1} (\nabla u_{i-1})^2 + K_i (\nabla u_i - \nabla u_{i-1})^2 + (K_{i-1} - K_i) (\nabla u_{i-1})^2 \\ &= K_i (\nabla u_i)^2 - K_{i-1} (\nabla u_{i-1})^2 + K_i (\nabla u_i - \nabla u_{i-1})^2 - \tau \delta K_i (\nabla u_{i-1})^2 \end{aligned}$$

over i van 1 tot j geeft

$$\begin{aligned} &2 \sum_{i=1}^j K_i \nabla u_i \cdot \nabla [u_i - u_{i-1}] \\ &= \sum_{i=1}^j [K_i (\nabla u_i)^2 - K_{i-1} (\nabla u_{i-1})^2] + \sum_{i=1}^j K_i (\nabla u_i - \nabla u_{i-1})^2 - \tau \sum_{i=1}^j \delta K_i (\nabla u_{i-1})^2 \\ &= K_j (\nabla u_j)^2 - K_0 (\nabla u_0)^2 + \sum_{i=1}^j K_i (\nabla [u_i - u_{i-1}])^2 - \tau \sum_{i=1}^j \delta K_i (\nabla u_{i-1})^2. \end{aligned}$$

Vervolgens integreren we het voorgaande over Ω . Na wisselen van integratie en sommatie vinden we

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^j (K_i \nabla u_i, \nabla [u_i - u_{i-1}]) &= (K_j \nabla u_j, \nabla u_j) - (K_0 \nabla u_0, \nabla u_0) \\ &+ \sum_{i=1}^j (K_i \nabla [u_i - u_{i-1}], \nabla [u_i - u_{i-1}]) - \tau \sum_{i=1}^j (\delta K_i \nabla u_{i-1}, \nabla u_{i-1}). \end{aligned}$$

□

Stelling A.1.7 (Partiële sommatie). *Stel $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ een bilineaire vorm op een vectorruimte V en $z_i, w_i \in V, i = 1, \dots, n$. Dan is*

$$\sum_{i=1}^j b(z_i, w_i - w_{i-1}) = b(z_j, w_j) - b(z_0, w_0) - \sum_{i=1}^j b(\delta z_i, w_{i-1})\tau,$$

met $\delta z_i = \frac{z_i - z_{i-1}}{\tau}$.

Bewijs.

$$\begin{aligned} & b(z_j, w_j) - b(z_0, w_0) - \sum_{i=1}^j b(\delta z_i, w_{i-1})\tau \\ = & b(z_j, w_j) - b(z_0, w_0) - \sum_{i=1}^j b(z_i - z_{i-1}, w_{i-1}) \\ = & b(z_j, w_j) - b(z_0, w_0) - b(z_1 - z_0, w_0) - b(z_2 - z_1, w_1) - b(z_3 - z_2, w_2) \\ & - \dots - b(z_{j-1} - z_{j-2}, w_{j-2}) - b(z_j - z_{j-1}, w_{j-1}) \\ = & b(z_1, w_1 - w_0) + b(z_2, w_2 - w_1) + \dots + b(z_{j-1}, w_{j-1} - w_{j-2}) - b(z_j, w_j - w_{j-1}) \\ = & \sum_{i=1}^j b(z_i, w_i - w_{i-1}). \end{aligned}$$

□

Hulpstelling A.1.8. *Stel $\eta \in [0, T]$ en $\frac{\partial z}{\partial t} \in L_2((0, T))$, dan is*

$$\int_0^\eta (\partial_t z, z) = \frac{1}{2} \|z(\eta)\|^2 - \frac{1}{2} \|z(0)\|^2.$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} \int_0^\eta (\partial_t z, z) &= \int_0^\eta \int_\Omega z \partial_t z \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\eta \int_\Omega \partial_t (z^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^\eta \partial_t (z^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega (z^2(\eta) - z^2(0)) \\ &= \frac{1}{2} \|z(\eta)\|^2 - \frac{1}{2} \|z(0)\|^2. \end{aligned}$$

□

Hulpstelling A.1.9 (Middelwaardestelling). *Als f continu is over $[a, b]$, dan bestaat er een $c \in [a, b]$ zodat*

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c).$$

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [21], pp. 294.

□

Stelling A.1.10 (Hoofdstelling van de Integraalrekening). *Als f continu is over $[a, b]$ en $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, dan geldt over $[a, b]$ dat*

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x).$$

Bijgevolg

$$\frac{d}{db} \int_a^b f(x)dx = f(b).$$

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [28], sectie 2. □

Hulpstelling A.1.11 (Lusin). *Is $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$) Lebesguemeetbaar, dan bestaat er bij elke $\varepsilon > 0$ een Lebesguemeetbare $F \subset \Omega$ met de twee eigenschappen:*

(i) $\text{maat}(F) < \varepsilon$,

(ii) *de beperking van f tot $\Omega \setminus F$ is continu.*

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [22]. □

Hulpstelling A.1.12 (Absolute continuïteit van de integraal). *Is $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$) integreerbaar, dan bestaat er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta = \delta(\varepsilon)$ zodanig dat voor elke meetbare deelverzameling F van Ω , met $\text{maat}(F) < \delta$, geldt dat*

$$\left| \int_F f \right| < \varepsilon.$$

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [23], pp. 93. □

hoofdstelling integraalrekening

A.2 Code van het numeriek experiment


```

// file met ok = 1 + t

func u0 = 1;
real ok;
func K = ok*(x<0.2)+0.2;
int n = 50;
real T=1, dt=T/n;
func f=1;
func gN=0.4;
int ig;
string name;
real t;
real[int] gk(1);
real[int] dk(1);
mesh Th=square(70,70,[1*x,1*y]);
plot(Th, wait=1);
fespace Vh(Th,P1);

real[int] Kdata(n);
real[int] Krec(n);
real[int] okdata(n);

Vh u=u0,v,uold;
problem thermic(u,v)= int2d(Th)(u*v/dt + K*(dx(u) * dx(v) + dy(u) * dy(v)))
    + int1d(Th,1,3)(gN*v)
    - int2d(Th)(uold*v/dt + f*v)
    + on(2,4,u=0);

func real Generatedata()
{
    u=u0;
    t=0;
    for(int i=0;i<n;i++){
        t+=dt;
        uold=u;
        ok = 1+t;
        okdata[i] = ok;
        thermic;
        Kdata[i]= int1d(Th,4)(-(ok+0.2)*(dx(u)*N.x + dy(u)*N.y));
    }
}

func real[int] dJ(real[int] &k) {
    real h = 0.000001;
    ok = k[0];
    thermic;
    real r1 = (int1d(Th,4)(-(k[0]+0.2)*(dx(u)*N.x + dy(u)*N.y)) - Kdata[ig])^2;
    ok = k[0] + h;
    thermic;
    real r2 = (int1d(Th,4)(-((k[0]+h)+0.2)*(dx(u)*N.x + dy(u)*N.y)) - Kdata[ig])^2;
    dk[0] = (r2-r1)/h;
    return dk;
}

func real[int] matId(real[int] &xx)
{
    return xx;
}

{
    name="Output14a.txt";
    ofstream file(name);
}

```

```
{
    name="Output14b.txt";
    ofstream file(name);
}

func real findsolution(){
    ig = 0;
    uold=u0;
    gk[0]=3;
    t=0;
    for(int i=0;i<n;i++){
        t+=dt;
        NLCG(dJ,gk,nbiter = 10, precon = matId, eps = 1e-6);
        Krec[i] = gk[0];
        ok = gk[0];
        thermic;
        uold = u;
        {
            name="Output14a.txt";
            ofstream file(name, append);
            file << gk[0]<<endl;
        }
        ig++;
    }
}

Generatedata();
plot(u,ps="fig14a.eps", fill=false, value = true, wait=true);
cout << Kdata;
findsolution();
cout << Krec;

int i;
real[int] aa(n),bb(n);
for(i=0; i < n; i++)
{
    aa[i] = i+1;
    bb[i] = abs(okdata[i] - Krec[i]);
    {
        name="Output14b.txt";
        ofstream file(name, append);
        file << abs(okdata[i] - Krec[i])<<endl;
    }
}
```

Bibliografie

- [1] Herbert Amann, Joachim Escher, *Analysis I*, Birkhäuser, 2005.
- [2] Tsoy-Wo Ma, *Banach-Hilbert Spaces, Vector Measures and Group Representations*, World Scientific, 2002.
- [3] Tsoy-Wo Ma, *Classical analysis on normed spaces*, World Scientific, 1995.
- [4] Charalambos D. Aliprantis, Kim C. Border, *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*, Springer, 2006.
- [5] A. Kufner, O. John, S. Fučík, *Function Spaces. Monographs and textbooks on mechanics of solids and fluids.*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.
- [6] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2010.
- [7] Kendall Atkinson, Weimin Han, *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*, Springer, 2009.
- [8] Peter Knabner, Lutz Angermann, *Numerical methods for elliptic and parabolic partial differential equations*, Springer, 2003.
- [9] Zhonghai Ding, *A proof of the trace theorem of sobolev spaces on Lipschitz domains*, American Mathematical Society, Volume 124, Nummer 2, Februari 1996.
- [10] Karel Rektorys, *Variational methods in mathematics, science, and engineering*, Kluwer, 1980.
- [11] Bo-Nan Jiang, *The least-squares finite element method: theory and applications in computational fluid dynamics and electromagnetics*, Springer, 1998.
- [12] J. Nečas, *Les Méthodes directes en théories des équations elliptiques*, Academia, Prague, 1967.
- [13] Yehuda Pinchover, Jacob Rubinstein, *An introduction to partial differential equations*, Cambridge University Press, 2005.
- [14] Albert Tarantola, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [15] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein, *Introduction to algorithms*, The Massachusetts Institute of Technology, 2003.
- [16] Susanne C. Brenner, L. Ridgway Scott, *The mathematical theory of finite element methods*, Springer, 2002.

- [17] Mariano Giaquinta, Giuseppe Modica, *Mathematical Analysis: Linear and Metric Structures and Continuity*, Birkhäuser, 2007.
- [18] Hayrettin Kardestuncer, Douglas H. Norrie, *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill, 1987
- [19] Richard L. Wheeden, Antoni Zygmund, *Measure and integral: an introduction to real analysis*, Marcel Dekker, Inc., 1977.
- [20] Anton Zettl, *Sturm-Liouville theory*, American Mathematical Society, 2005.
- [21] Brian S. Thomson, Andrew M. Bruckner, *Elementary Real Analysis*, ClassicalRealAnalysis.com, 2008.
- [22] M.B. Feldman, *A proof of Lusin's theorem*, American Mathematical Monthly 88, 1981, 191 – 192
- [23] Y. M. Berezansky, Z.G. Sheftel, G.F. Us, *Functional analysis, Volume 1*, Birkhäuser, 1996
- [24] A. Friedman, *Partial differential equations*, Robert E. Krieger Publishing Company, Hungtinton, New York, 1976.
- [25] K. Rektorys, *The method of discretization in time and partial differential equations*, Reidel Publishing Company, Dordrecht-Boston-London, 1982.
- [26] J. Kačur, *Method of Rothe in evolution equations, volume 80 of Teubner Texte zur Mathematik* Teubner, Leipzig, 1985.
- [27] Edwin K.P. Chong, Stanislav H. Žak, *An Introduction to Optimization*, Replika Press Pvt. Ltd., 2005
- [28] Staf Deen, Dr. Paul Levrie, *Analyse voor het hoger onderwijs*, Uitgeverij De Boeck, 2003
- [29] N.L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, London Mathematical Society, 2005
- [30] R.E. Edwards, *Functional Analysis: Theory and applications*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1965
- [31] Roger Van Keer and Marián Slodička, *Numerical modelling for the recovery of an unknown flux in semilinear parabolic problems with nonstandard boundary conditions*, ECCOMAS 2000
- [32] Roger Van Keer and Marián Slodička, *Determination of a Robin coefficient in semilinear parabolic problems by means of boundary measurements*, Inverse Problems Volume 18, Number 1, February 2002
- [33] Marián Slodička, *Partial Differential Equations*
- [34] F. Brackx, *Wiskundige Analyse V*
- [35] R. Van Keer, *Benaderingsmethoden voor randwaardenproblemen*
- [36] Wikipedia, the free encyclopedia, <http://en.wikipedia.org/>

Lijst van figuren

2.1	Domeinen	8
2.2	Domein zonder Lipschitzgrens.	11
3.1	Het rechthoekig domein Ω	30
3.2	Het rechthoekig domein Ω met de randcondities.	31
5.1	Constante diffusiecoëfficiënt: $K(t) = \mathbb{I}_{\{x < 0.2\}} + 0.2$	88
5.2	Isolijnen voor u_1 en u_{10} als $\tilde{K} = 1$	89
5.3	Isolijnen voor u_{20} en u_{30} als $\tilde{K} = 1$	89
5.4	Isolijnen voor u_{40} en u_{50} als $\tilde{K} = 1$	89
5.5	Lineaire diffusiecoëfficiënt: $K(t) = (1 + t) \mathbb{I}_{\{x < 0.2\}} + 0.2$	90
5.6	Kwadratische diffusiecoëfficiënt: $K(t) = (1 + t^2) \mathbb{I}_{\{x < 0.2\}} + 0.2$	90
5.7	Goniometrische diffusiecoëfficiënt: $K(t) = (1 + \sin(10t)) \mathbb{I}_{\{x < 0.2\}} + 0.2$	91

