Supplementaire Opgaven "INLEIDING TOT DE VARIATIEREKENING"

<u>Opgave 1</u>

Bepaal de gladde kromme K, met cartesische vergelijking $y = y(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, met vaste eindpunten (t_0, y_0) en (t_1, y_1), waarvoor de volgende functionaal extremaal wordt:

$$I[y] = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + 2gy \right] dt, \qquad g \text{ constant (aardversnelling).}$$

Toon aan dat de gevonden $y(t)$ een *minimum* oplevert van de functionaal over de één-parameterfamilie $y_\alpha(t) = y(t) + \alpha\, \eta(t)$, met $\eta \in V_0 = \{v \in C^2([t_0, t_1]) | v(t_0) = v(t_1) = 0\}$ en $|\alpha| < \alpha_0$. Is er een beperking voor α_0 ?

<u>Antwoord</u>

DEEL 1

1e Stap

De Euler-Lagrange DV luidt

$$\ddot{y}(t) = 9, \qquad t_0 < t < t_1, \tag{1}$$

waaruit direct

$$y(t) = \frac{1}{2} g t^2 + c_1 t + c_2, \quad c_1 \text{ en } c_2 \text{ integratieconstanten.}$$

2e Stap

De integratieconstanten worden vastgelegd door de voorwaarde dat de gezochte krommen K door de gegeven eindpunten gaat. Dus

$$\begin{cases} y_0 &= \frac{1}{2}\, g t_0^2 + c_1 t_0 + c_2 \\ y_1 &= \frac{1}{3}\, g t_1^2 + c_1 t_1 + c_2 \end{cases}$$

DEEL 2

We beschouwen naburen van de gevonden extremaal $y(t)$ van het volgende type

$$y_\alpha(t) = y(t) + \alpha \eta(t), \quad \eta \text{ (vast) } \in V_0 = \{v \in C^2([t_0, t_1]) | v(t_0) = v(t_1) = 0\}, \quad |\alpha| < \alpha_0$$

Er komt

$$\begin{aligned} J[y_\alpha(t)] &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\left(\frac{dy_\alpha}{dt} \right)^2 + 2g y_\alpha \right) dt \\ &= J[y] + 2\alpha \int_{t_0}^{t_1} \frac{dy}{dt} \frac{d\eta}{dt} dt + \alpha^2 \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 dt + 2g\alpha \int_{t_0}^{t_1} \eta dt, \end{aligned}$$

of, na partiële integratie

$$J[y_\alpha] = J[y] - 2\alpha \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - g \right) \eta dt + \left[2\alpha \frac{dy}{dt} \eta \right]_{t_0}^{t_1} + \alpha^2 \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 dt$$

Vanwege (1) en de randcondities vervuld door η volgt dat

$$J[y_\alpha] = J[y] + \alpha^2 \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 dt \geq J[y] \tag{2}$$

Merk op dat het gelijkheidsteken enkel bereikt wordt voor $\alpha = 0$ of $\eta \equiv 0$ (η is i.h.b. continu in $[t_0, t_1]$), m.a.w. als $y_\alpha = y$.
De ongelijkheid (2) geldt $\forall \alpha \in R$.