Supplementaire Opgaven "INLEIDING TOT DE EINDIGE-ELEMENTENMETHODEN"

<u>OPGAVE 2: ANTWOORD</u>

1. **Variationele formulering**

<u>1e stap</u>:

$$-\int_\Omega (\Delta u) v \, dx \, dy = \int_\Omega f v \, dxdy, \qquad \forall v \in C^1_D(\overline{\Omega})$$

<u>2e stap</u>: Green toepassen (om de 2de orde afgeleiden te elimineren)

$$\int_\Omega \text{grad}u \cdot \text{grad}v \, dxdy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_\Omega f v \, dxdy, \qquad \forall v \in C^1_D(\overline{\Omega})$$

<u>3e stap</u>: Elimineer normale afgeleide

- op Γ_1 en Γ_3: geen voorschrift voor $\frac{\partial u}{\partial n}$ gegeven $\Rightarrow$ laat $v = 0$ op Γ_1 en Γ_3
- op Γ_2 en Γ_4:

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds + \int_{\Gamma_4} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial y} v \, ds - \int_{\Gamma_4} \frac{\partial u}{\partial y} v \, ds$$

Gelet op de periodieke randconditie $\frac{\partial u}{\partial y}(P) = \frac{\partial u}{\partial y}(P')$, zullen we v zo kiezen dat $v(P) = v(P')$ voor alle P en P' gerelateerd zoals in Fig.1.

Kortom, voer in

$$V = \{v \in C^1_D(\overline{\Omega}) \,|\, v = 0 \text{ op } \Gamma_1 \text{ en } \Gamma_3; \; v(P) = v(P') \text{ voor alle } P \text{ en } P' \text{ gerelateerd zoals in Fig.1.}\}$$

Merk nog op dat de klassieke oplossing, zo die bestaat, tot V behoort. Dan komen we tot de variationele formulering

$$\boxed{(P_{var}): \; ? \; u \in V: \int_\Omega \text{grad}u \cdot \text{grad}v \, dxdy = \int_\Omega f v \, dxdy \qquad \forall v \in V}$$

2. **Constructie van twee speciale basisfuncties**

$$\Psi^{(1)} = \varphi_5 + \varphi_8, \qquad \Psi^{(2)} = \varphi_9 + \varphi_{12}$$

Redenering, bvb. voor $\Psi^{(1)}$: merk op dat

$$\begin{aligned}
\Psi^{(1)}_{|\Gamma_2} &= \varphi_{8|\Gamma_2} \\
&= \text{continue, stuksgewijze lineaire functie die de waarde 1 aanneemt in knoop 8} \\
&\quad\ \text{en de waarde 0 in alle andere knopen op } ,_2 \\
\Psi^{(1)}_{|\Gamma_4} &= \varphi_{5|\Gamma_4} \\
&= \text{continue, stuksgewijze lineaire functie die de waarde 1 aanneemt in knoop 5} \\
&\quad\ \text{en de waarde 0 in alle andere knopen op } ,_4
\end{aligned}$$

waaruit volgt dat

$$\Psi^{(1)}(P) = \Psi^{(1)}(P') \text{ voor alle } P \in ,_2 \text{ en } P' \in ,_4 \text{ gerelateerd als in Fig.1}$$

3. **Benaderingsruimte**

$$V_h = X_{0h} \oplus \mathrm{span}(\Psi_1, \Psi_2)$$

Is deze ruimte een deelruimte van V?

- $V_h \subset C^1_D(\overline{\Omega})$ want $X_h \subset C^1_D(\overline{\Omega})$
- $v \in V_h \Rightarrow v = 0$ op $,_1$ en $,_3$
- $v \in V_h \Rightarrow v_{|\Gamma_2} = a\Psi^{(1)}_{|\Gamma_2} + b\Psi^{(2)}_{|\Gamma_2}$ en $v_{|\Gamma_4} = a\Psi^{(1)}_{|\Gamma_4} + b\Psi^{(2)}_{|\Gamma_4}$, voor een stel (a,b), waaruit volgt, m.b.v. puntje (2) dat $v(P) = v(P')$ voor alle P en P' gerelateerd zoals in Fig.1.