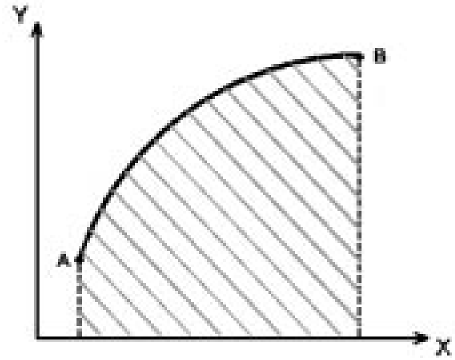
Supplementaire Opgaven "INLEIDING TOT DE VARIATIEREKENING"

<u>OPGAVE 2</u> (Februari '96)

Beschouw twee vaste punten $A(x_0, y_0)$ en $B(x_1, y_1)$ (in het eerste kwadrant).



Bepaal de voldoende gladde boog of bogen tussen A en B <u>met een vooropgegeven lengte l</u> $> |\overrightarrow{AB}|$, waarvoor de <u>gearceerde oppervlakte extremaal is.</u>
De integratieconstanten in de extremalen én de multiplicator moeten niét expliciet berekend worden. Zeg wel hoe u die – in principe – zou kunnen vinden. Wat is de meetkundige betekenis van de multiplicator ?

<u>ANTWOORD</u>

In dit vraagstuk zoekt men een voldoende gladde boog K, met cartesische vergelijking $y = y(x), x_0 \leq x \leq x_1$, waarvoor

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y\, dx \rightarrow \quad \text{extremaal}$$

onder de nevenvoorwaarde

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx = l \quad \text{gegeven} \tag{1}$$

met de randcondities

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1 \qquad (x_0, y_0, x_1, y_1 \text{ vast}) \tag{2}$$

Dit gebonden extremumvraagstuk wordt herleid tot een vrij extremumvraagstuk voor $J + \lambda I, \lambda$ multiplicator van Lagrange, (a priori) constant.

1e Stap : De Euler-Lagrange DV voor $F + \lambda G \equiv y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2}$.

Daar x niet expliciet optreedt is een 1e integraal

$$y'\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}}-\left(y+\lambda\sqrt{1+(y')^2}\right)=c_1,\ (c_1 \text{ integratieconstante})$$

waaruit

$$y'=\pm\frac{\sqrt{\lambda^2-(c_1+y)^2}}{c_1+y} \tag{3}$$

of, door scheiden der veranderlijken,

$$\frac{(c_1+y)dy}{\sqrt{\lambda^2-(c_1+y)^2}}=\pm dx$$

Integratie * leidt tot

$$\sqrt{\lambda^2-(c_1+y)^2}=\mp(x+c_2), \qquad (c_2 \text{ integratieconstante})$$

of

$$\boxed{(x+c_2)^2+(y+c_1)^2=\lambda^2} \qquad \text{(cirkelboog)} \tag{4}$$

Dit is de cartesische (impliciete) vergelijking van de extremalen.

2e Stap: Bepaling van c_1, c_2 (integratieconstanten) en λ (multiplicator) – principe.

- De boog K gaat door $A(x_0,,y_0), B(x_1,y_1)$ – anders gezegd, $y(x)$ vervult de condities (2) :

$$(x_0+c_2)^2+(y_0+c_1)^2=\lambda^2, \qquad (x_1+c_2)^2+(y_1+c_1)^2=\lambda^2 \tag{5}$$

- De boog K heeft lengte l – anders gezegd, men legt voorwaarde (1) op.
  Uit (4) (en de achterliggende (3)) volgt

$$1+(y')^2=\frac{\lambda^2}{(1+y)^2}=\frac{\lambda^2}{\lambda^2-(x+c_2)^2}$$

  zodat de voorwaarde (1) wordt (neem $\lambda>0$ – zonder de algemeenheid te schaden)

$$\lambda\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{\lambda^2-(x+c_2)^2}}=l$$

  of †

$$\left[\arcsin\frac{x+c_2}{\lambda}\right]_{x_0}^{x_1}=\frac{l}{\lambda} \tag{6}$$

- Besluit: c_1, c_2 en λ dienen bepaald uit (5)–(6). De multiplicator λ is de straal van de cirkelboog (4).

---

*Ter herinnering : $\int\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\sqrt{t}+C$

†Ter herinnering : $\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C$