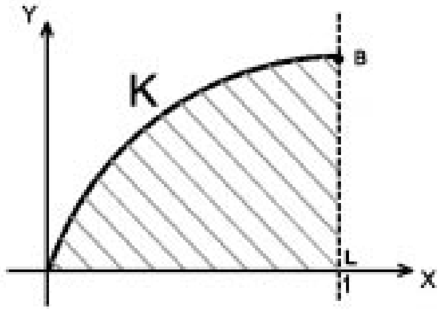
Supplementaire Opgaven "INLEIDING TOT DE VARIATIEREKENING"

Opgave 3 (Augustus '98)

Bepaal een kromme K (voldoende glad) die de oorsprong verbindt met een niet vooraf gekend punt B op de rechte $x = 1$, die de volgende eigenschappen heeft:

(a) De gearceerde oppervlakte is vooropgegeven (zeg S).

(b) De lengte van K is extremaal.



De integratieconstanten in de extremalen moeten níet expliciet bepaald worden. Evenmin moet de multiplicator, noch de ordinaat van het punt B expliciet bepaald worden. Zeg wel hoe u die zou kunnen vinden.

Antwoord

In dit vraagstuk zoekt men een voldoende gladddde boog K, met cartesische vergelijking $y = y(x)$, $0 \leq x \leq 1$, met onbekend eindpunt $B(1, y_b)$ en gekend beginpunt $A(0,0)$, waarvoor

$$J[y] = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx \longrightarrow \text{ extremaal}$$

onder de nevenvoorwaarde

$$I[y] = \int_0^1 y \; dx = S \qquad \text{gegeven} \tag{1}$$

Dit gebonden extremumvraagstuk – met "vrije rand" (d.i. eindpunt B dient gezocht op vertikale rechte $x = 1$) – wordt herleid tot een vrij extremumvraagstuk – met "vrije rand" – voor $J + \lambda I$, λ constante multiplicator.

1e Stap: De Euler-Lagrange DV voor $F + \lambda G \equiv \sqrt{1 + y')^2} + \lambda y$.

Deze DV is dezelfde als in de vorige opgave, waarbij men λ vervangt door $\frac{1}{\lambda}$, cfr. Gevolg 1.1 (p. II.3). De extremalen zijn dus

$$\boxed{(x+c_2)^2 + (y+c_1)^2 = \tfrac{1}{\lambda^2}} \qquad (c_1 \text{ en } c_2 \text{ integratieconstanten}) \tag{2}$$

2e Stap: Bepaling van c_1, c_2 (integratieconstanten), λ (multiplicator), y_b (ordinaat van eindpunt B) – principe

- $\underline{K \text{ gaat door } A(0,0)}$:

$$c_2^2 + c_1^2 = \frac{1}{\lambda^2} \tag{3}$$

- $\underline{K \text{ gaat door } B(1, y_b)}$:

$$(1+c_2)^2 + (y_b + c_1)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \tag{4}$$

- Transversaliteitsvoorwaarde in $B(1, y_b)$: geval van "vrije rand":

$$\frac{\partial}{\partial y'}(F + \lambda G) = 0 \qquad \text{in} \qquad x = 1$$

  of

$$\boxed{y' = 0 \qquad \text{in} \qquad x = 1}$$

  Dit betekent dat in $B(1, y_b)$ de boog K loodrecht staat op de rechte $x = 1$, dus dat die rechte een middellijn is van de cirkelboog (2). Derhalve is

$$c_2 = -1 \tag{5}$$

- $\underline{K \text{ vervult de nevenvoorwaarde (1)}}$:

$$\pm \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - (x-1)^2}\, dx = S + c_1 \tag{6}$$

  De overblijvende integraal kan -facultatief- uitgerekend worden via een goniometrische substitutie, of desgewenst met Maple. De vergelijkingen (3), (4) en (6) (met $c_2 = -1$, zie (5)) vormen een stelsel voor c_1, λ en y_b.